

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade

Bruno Ferreira Campos da Silva

**MODELO DE BLACK – SCHOLES COMO ALTERNATIVA DE
INVESTIMENTO PARA OS PRODUTORES RURAIS DOS VALES DO
JEQUITINHONHA E MUCURI**

Teófilo Otoni
2017

Bruno Ferreira Campos da Silva

**MODELO DE BLACK – SHOLES COMO ALTERNATIVA DE
INVESTIMENTO PARA OS PRODUTORES RURAIS DOS VALES
JEQUITINHONHA E MUCURI**

Dissertação apresentada ao PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIA
AMBIENTE E SOCIEDADE – STRICTO
SENSU, nível de MESTRADO como parte dos
requisitos para obtenção do título de MAGISTER
SCIENTIAE EM TECNOLOGIA, AMBIENTE E
SOCIEDADE.

Orientador: Dr. Carlos Alberto Mirez Tarrillo.

Teófilo Otoni
2017

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

S586m Silva, Bruno Ferreira Campos da.
2017 Modelo de Black-Scholes como Alternativa de Investimento para os Produtores Rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. / Bruno Ferreira Campos da Silva. Teófilo Otoni: UFVJM, 2017.
183 f. ; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Mirez Tarrillo.

1. Black-Scholes. 2. Produtor. 3. Binomial. 4. Opções. 5. Volatilidade. I. Título.

CDD: 658

BRUNO FERREIRA CAMPOS DA SILVA

Modelo de Black - Scholes como Alternativa de Investimento para os Produtores Rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

Dissertação apresentada ao
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM TECNOLOGIA, AMBIENTE E
SOCIEDADE - STRICTO SENSU,
nível de MESTRADO como parte dos
requisitos para obtenção do título de
MAGISTER SCIENTIAE EM
TECNOLOGIA, AMBIENTE E
SOCIEDADE

Orientador : Prof. Dr. Carlos Alberto
Mirez Tarrillo

Data da aprovação : 03/02/2017


Prof. Dr. WEDERSON MARCOS ALVES - UFVJM


Prof. Dr. MAURO LUCIO FRANCO - UFVJM


Prof.ª Dr.ª SILVIA SWAIN CANÓAS - UFVJM


Prof. Dr. CARLOS ALBERTO MIRÉZ TARRILLO - UFVJM

TEÓFILO OTONI

Dedico a todos aqueles que me deram
palavras de apoio, e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar presente em minha vida.

Tenho que agradecer muito minha querida mãe Maria, por me dar palavras de apoio quando todos tentaram me derrubar para o abismo.

Quero agradecer meu orientador Carlos Mirez, por dedicar tempo e atenção na colaboração do desenvolvimento desse trabalho. E todos os professores do curso de Mestrado em Tecnologia, Ambiente e Sociedade da UFVJM que dedicaram seus conhecimentos em prol do meu desenvolvimento. Em especial os professores Fernando e Marcio Coutinho, que me apoiaram num momento delicado de minha jornada, contribuindo de forma fundamental para o término desta dissertação.

Ao professor Antonio Carlos, que sempre acreditou que as pessoas podem mudar para melhor.

A Ivete e meus filhos Augusto e Maria Alice, por compartilhar dos meus anseios e ter paciência em minha caminhada.

*"Nossas cicatrizes servem pra nos lembrar que o
passado foi real." (Thomas Harris).*

RESUMO

Nesta dissertação é apresentada a teoria que envolve o modelo de Black – Scholes como uma alternativa de investimento para produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Ao fazer um estudo sobre os produtores rurais dos vales, percebe-se que a produção no campo é voltada para a subsistência, vendendo somente o excedente. Foi constatado que a falta de investimento no campo reduz em partes o nível de produção do produtor rural. A alternativa de investimento através do modelo de Black – Scholes na precificação de opções se faz necessário não somente para se ter um maior investimento no meio rural, mas sim, ser também uma outra forma de se obter renda com técnicas aplicadas na Bolsa de Valores, ajudando o homem do campo em ter uma estabilidade financeira baseada não somente em sua produção.

É realizado um estudo criterioso da equação diferencial parcial estocástica advinda deste modelo, no tocante à determinação de possíveis simulações de problemas enfrentados diante das volatilidades dos mercados na precificação de opções. Para que o produtor rural utilize o modelo de Black – Scholes é interessante se observar como se comporta os seus parâmetros. Então foi realizada uma análise do comportamento do valor da precificação de opções em relação aos parâmetros do modelo de Black – Scholes baseados em dados reais retirados da BM&FBOVESPA. É apresentada uma breve comparação do modelo de Black – Scholes com o modelo Binomial, comparação feita com um exemplo de obtenção do valor da opção de compra e venda via Binomial e Black – Scholes, e neste exemplo é observado um melhor retorno para o modelo Binomial.

É observado ao longo da pesquisa que existem dois parâmetros que mais oscilam nos mercados, que são a volatilidade e a taxa de juros. Para se fazer bons investimentos, o produtor rural deve ficar atento e ter ciência do comportamento da oscilação desses parâmetros. Para se ter uma melhor representação da variação desses parâmetros, é feito uma comparação entre o valor das opções de compra e venda calculados pelo modelo de Black – Scholes e Binomial. Para a taxa de juros o modelo Binomial apresentou valores fora do esperado em relação ao modelo de Black – Scholes.

Devido a carência de informações a respeito de como se investir na Bolsa de Valores, é criado uma cartilha que se encontra nos anexos desta dissertação voltada para o produtor rural, sobre como fazer um investimento na Bolsa de Valores e quais procedimentos iniciais deve-se tomar para obter êxito nos mercados. Desses estudos, conclui-se que é possível o produtor rural investir pequenas quantias de dinheiro e obter retornos significativos em relação ao

investimento inicial. Podendo assim, aplicar parte desse dinheiro em seu trabalho no campo e também ter uma forma de renda quando os retornos das produções no meio rural não forem favoráveis.

Palavras-chave: Black – Scholes. Produtor. Binomial. Opções. Volatilidade.

ABSTRACT

In this dissertation there is presented the theory that involves the Black model – Scholes as an alternative of investment for rural producer Jequitinhonha and Mucuri Valleys. When doing a study on the rural producers of the valleys, it is seen that the production in the field is turned for the subsistence, selling only the excess. It was noted that the lack of investment in the field reduces in parts the level of production of the rural producer. The investment alternative through Black model – Scholes in the options pricing is made necessary not only in order that a bigger investment has been in the rural environment, but yes, to be also another form of income being obtained with techniques applied in the valuable Stock Exchange, helping the man of the field in having a financial stability based not only on his production.

It is accomplished out a discerning study of the partial differential equation stochastic resulted from this model, regarding the determination of possible simulations of problems faced before the volatilities of the markets in the options pricing. For the rural producer to use the Black model – Scholes is interesting it will notice how if it holds his parameters. Then there was accomplished out an analysis of the behavior of the value of the pricing of options regarding the parameters of the Black model – Scholes based on retired real data of the BM&FBOVESPA. There is presented a short comparison of the Black model – Scholes with the Binomial model, comparison done with an example of getting the value of the option of purchase and sale was seeing Binomial and Black – Scholes, and in this example a better return is observed for the Binomial model.

It is observed throughout the research that there are two parameters that more oscillate in the markets, which are the volatility and the interest rate. In order that good investments become, the rural producer must be attentive and have science of the behavior of the oscillation of these parameters. In order that there has been a better representation of the variation of these parameters, it is done a comparison between the value of the options of purchase and sale calculated by the Black model – Scholes and Binomial. For the interest rate the Binomial model presented values out of the waited one regarding the Black model – Scholes.

Due to lack of information about how to invest in the Stock Exchange, it is created a primer that is in the annexes of this dissertation turned to the rural producer how to make an investment in the Stock Exchange and it is necessary to take which initial proceedings to obtain succeed in the markets. Of these studies, it is ended that the possible the rural producer to invest small amounts of money and to obtain significant returns regarding the initial investment. Being

able so, to apply part of this money in his work in the field and also to have the form of income when the returns of the productions in the rural environment are not favorable.

Key - words: Black – Scholes. Producer. Binomial. Options. Volatility.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	METODOLOGIA	17
2.1	Fonte de Dados	17
3	FUNDAMENTOS DO MERCADO FINANCEIRO	21
3.1	No Começo	21
3.2	Caminhando Rumo ao Mercado Futuro Organizado	21
3.3	Junta Comercial de Chicago	22
3.4	Contrato a Termo	23
3.5	Contratos Futuros	24
3.6	No Brasil	24
3.7	Fundamentos de Finanças	25
3.8	Opções	28
4	MODELO DE BLACK – SCHOLES	33
4.1	Breve História	33
4.2	Hipóteses do Modelo	36
4.3	Medidas de Sensibilidade	36
4.4	Construção do Modelo de Black – Scholes	37
4.5	Resolução Analítica do Modelo de Black – Scholes	49
4.6	Revisão dos Modelos de Precificação	60
5	MODELO BINOMIAL	65
5.1	Hipóteses do Modelo	65
5.2	Avaliação de Opções	66
5.3	Determinando p , u e d	67
5.4	Árvore do preço dos ativos	69
5.5	Árvore do preço das opções	70
6	PRODUTORES RURAIS NOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI	73
6.1	Desenvolvimento Econômico Rural	74
6.2	Programas Rurais	75
6.3	Associações	75
6.4	Recursos e Investimento para o Produtor Rural	76
6.5	Outras Alternativas de Investimentos	77
7	BOLSA DE VALORES: Alternativa de Investimento para os Produtores Rurais	79

8 SIMULAÇÃO	81
8.1 Códigos das Ações	81
8.2 Precificação das Opções via Modelo Black – Scholes.....	82
8.3 Prêmio das Opções e as Variáveis do Modelo de Black - Scholes	85
8.3.1 Prêmio da Opção e o Ativo Objeto.....	85
8.3.2 Prêmio da Opção e o Preço de Exercício.....	87
8.3.3 Prêmio da Opção e o Tempo	90
8.3.4 Prêmio da Opção e a Volatilidade	93
8.3.5 Prêmio da Opção e a Taxa de Juros.....	96
8.4 Precificação das Opções via Modelo Binomial.....	99
8.5 Black – Scholes e Binomial: oscilando volatilidade e taxa de juros	102
8.5.1 Variação da Volatilidade	102
8.5.2 Variação da Taxa de Juros.....	105
9 ANÁLISE DE RESULTADOS	109
10 CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117
APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	121
A.1 Equações Diferenciais	121
A.2 Equações Diferenciais Ordinárias	121
A.3 Equações Diferenciais Parciais.....	122
A.4 Solução da Equação Diferencial Parcial.....	122
A.5 Problemas de Valores Iniciais ou de Fronteira.....	123
A.6 Classificação de uma Curva Cônica	123
A.7 Separação de Variáveis.....	125
A.7.1 Método de Fourier	126
APÊNDICE B - ASPECTOS GERAIS	137
B.1 Processos Estocásticos.....	137
B.2 Movimento Browniano como um Processo Estocástico.....	142
B.3 As Integrais de Itô.....	152
B.4 Equações Diferenciais Estocásticas	160
ANEXOS	163

1 INTRODUÇÃO

Os mercados de derivativos têm sido objeto de inúmeros estudos. Tal fato deve-se à preocupação dos gestores da Bolsa de Mercadorias e Futuros – BM&F, os quais identificaram um desconhecimento dos processos por parte das pessoas físicas nas operações financeiras realizadas cotidianamente nas Bolsas de Valores. Devido à falta de conhecimento a respeito do funcionamento de tal órgão, é necessária a realização de estudos significativos a respeito de tais Mercados, visando uma aproximação da sociedade civil com esta entidade.

Para entender o que é o Mercado de Derivativo é necessário saber o significado da palavra “derivativo”. De acordo com [17], um dos seus significados é “relativo à derivação, ou seja, origina-se de outro”. Os derivativos são instrumentos financeiros, nos quais os seus preços estão ligados a outro instrumento que lhes servem de referência. A precificação de tais instrumentos é realizada no mercado à vista. O mercado de derivativos se subdivide em três tipos diferentes, a saber: Mercado a Termo, Mercado Futuro e Mercado de Opções. Tais termos serão melhores explicados na seção 3.

Em particular, ao analisar os mercados de opções, é comum se deparar com um sério problema. Tendo em vista que o preço de um bem é fixado em uma data futura, torna-se muito arriscado operar em tais mercados em virtude das possíveis eventualidades futuras. Por exemplo, suponha que um produtor de soja resolva negociar certa quantidade de sacas, que serão colhidas em um tempo futuro. Se, no tempo presente, um investidor tem a intenção de comprar tais sacas, haverá a necessidade da negociação de um contrato de compra com o produtor. Este contrato deverá conter o preço a ser pago pela saca na época da entrega do produto. Porém, ao fixar o preço do produto, tanto o investidor quanto o comprador não podem desconsiderar eventualidades futuras tais como problemas de sazonalidade¹, infestação de pragas ou superprodução. Deste modo, a precificação do produto acaba tornando-se uma “ciência adivinhativa”, na qual tanto comprador quanto vendedor assume o risco de prejuízo.

Os produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri vendem seus excedentes em pequenas feiras e mercados nas cidades, sem nenhuma forma de contrato ou resguardo específico, [2], no entanto, o produtor sofre com as dificuldades apresentadas com o trabalho na terra. Maior parte de suas produções é para a subsistência, sendo vendido somente uma pequena parte da produção. Esses produtores rurais sofrem com problemas financeiros, pois a região dos vales é considerado pobre, apresentando famílias com alto grau de carência

¹Produção de determinado produto somente em épocas específicas do ano.

econômica, veja [29]. A preocupação em se ter feiras e comércios organizados se remontam a era Medieval², tendo notícias de contratos de comércios mais sofisticados já nos anos de 1840. Tal fato, leva há uma preocupação referente a região dos vales em saber se é possível criar mecanismos que possam incentivar a produção no meio rural com novas alternativas de investimentos, motivando estudos a respeito dos mercados financeiros.

Portanto, a precificação de opções³ de compra e venda torna-se um problema sério nestas negociações. O problema central da negociação consiste no gerenciamento dos riscos, a fim de possibilitar uma precificação justa de uma opção. Um dos primeiros a estudar a teoria de preços de ações⁴ flutuantes foi L. Bachelier⁵ (1900), cujo trabalho pode ser visto em [6]. Neste contexto, os economistas Fischer Black e Myron Scholes apresentaram, em 1973, a fórmula de Black – Scholes no artigo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” (A Precificação de Opções e Responsabilidades Corporativas), em [27], como é possível ver a seguir,

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - rV(t, S) = 0 \quad (1.1)$$

que modela o preço V de uma opção europeia⁶, em função do tempo t e do valor S do ativo, onde r é a taxa de juros e σ^2 é a variância.

O estudo do modelo de Black – Scholes se faz importante, sendo que a demonstração da construção do modelo não é amplamente difundida, bem como o Cálculo de Itô, conforme [12], o qual é fundamental em sua construção, apesar de não seguir as regras usuais do cálculo diferencial Newtoniano. É importante evidenciar e é dar sentido à equação (1.1) embasada na junção das teorias da Fórmula de Itô, dos Processos Estocásticos, das Equações Diferenciais Parciais Estocásticas, do Movimento Browniano, e da Teoria Moderna de Probabilidade, como podem ser vistos em [12] e [36].

Fazer o entendimento do estudo sobre os mercados de futuros e de opções, se faz necessário para entender melhor o apreçamento de opções. Tendo como objetivo específico fazer uma análise do modelo de Black – Scholes, bem como das equações diferenciais parciais

² Período da história da Europa entre os séculos V e XV.

³ Contratos que concedem o direito, mas não a obrigação de comprar, ou vender determinado ativo (para maiores detalhes sobre ativos ver definição (2.7.1)) em uma data futura especificada.

⁴ É o valor mobiliário emitido pelas companhias e representativo de parcela do capital.

⁵ Louis Jean Baptiste Alphonse Bachelier nasceu na cidade de Le Havre em 11 de março de 1870, e morreu na cidade de Saint-Malo em 26 de abril de 1946, foi um grande matemático francês.

⁶ O titular da opção só pode exercer o contrato no fim da maturidade.

advindas desse modelo, visando sua construção e determinação de possíveis soluções com base em dados reais de mercados.

O foco central da dissertação é apresentar uma alternativa de investimento para os produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Uma dessas alternativas é a utilização do modelo de Black – Scholes como forma de investimento e discutindo suas implicações ao se usar este modelo. Um dos objetivos específicos é apresentar o entendimento das potencialidades do modelo de Black – Scholes em comparação com o modelo Binomial considerando a volatilidade e a taxa de juros, dando uma opção para o produtor rural em também escolher outro modelo de precificação.

Investir na Bolsa de Valores como alternativa de ganho monetário para o produtor rural, leva a necessidade de se elaborar uma cartilha com algumas informações primárias a respeito de como investir com segurança na bolsa de valores. É feita uma breve discursão a respeito do primeiro investimento. Nessa cartilha encontra-se informações que possibilita uma melhor compreensão técnica de como o produtor rural possa fazer seu investimento. A cartilha é apresentada nos anexos dessa dissertação.

Por fim, deseja-se aplicar um exemplo usando dados reais aplicados à teoria dos Mercados de Futuros e Opções em paralelo juntamente com um outro modelo muito utilizado nos mercados de opções, o modelo Binomial desenvolvido em 1979 por Cox, Ross e Rubinstein. Dessa forma, é discutido sobre qual melhor modelo usar, e em qual situação é mais eficaz a precificação das opções.

2 METODOLOGIA

O estudo desta dissertação envolveu primeiramente a obtenção de informações teóricas, de caráter exploratório e descritivo, apoiado numa pesquisa bibliográfica com base em diversos autores que abordam o tema tratado. Além da leitura de artigos, livros, documentos impressos ou inseridos em meios eletrônicos, dissertações e teses, que tratam sobre o assunto existente nos mercados. Tendo como a finalidade, explorar os conceitos sobre derivativos, mercado de opções, precificação de ativos e mercados de ações.

É abordado ao longo do texto temas que envolvem os mercados financeiros, tratando especificamente de dois modelos de precificações de opções o modelo de Black – Scholes e o modelo Binomial. Nessa temática é discutido os procedimentos que traduzem a precificação de opções do tipo europeia, elencando as técnicas de precificação que giram em torno dos modelos.

Outro ponto transcorrido no texto é sobre os produtores rurais dos vales do Jequitinhonha e Mucuri. É discutido como se procede o trabalho no meio rural, suas dificuldades e investimentos nesse setor. Desse enfoque, é proposto uma cartilha auto explicativa voltada para os produtores rurais. Nesta cartilha, os produtores irão encontrar meios de se investir nos mercados financeiros, podendo utilizar o modelo de Black – Scholes e Binomial para precificar opções. Dando base também, para que qualquer pessoa física possa fazer seu primeiro investimento.

É realizado uma simulação com dados reais que precificam opções utilizando o modelo de Black – Scholes e Binomial. É feito uma comparação dos valores das variáveis do modelo de Black – Scholes com o valor da opção de compra e venda referente a este modelo. Em seguida, é apresentado a precificação de opções via Binomial em comparação com Black – Scholes. E por fim, comparado os valores gerados via modelo de Black – Scholes e Binomial da precificação de opções, levando em consideração uma das variáveis mais voláteis nos mercados, que é a taxa de juros e a volatilidade.

2.1 Fonte de Dados

Os dados utilizados para a realização das simulações na seção 8 foram coletados no site da BM&FBOVESPA. Os valores dos ativos objetos se referem ao mês de abril do ano de 2016, tendo como base os valores da volatilidade anualizada. A volatilidade utilizada para cada ação

se refere ao cálculo histórico⁷ referente ao mês de abril de 2015 há abril do ano de 2016, totalizando 252 dias úteis.

A taxa de juros Selic, apresentada na dissertação coletada no mês de abril do ano de 2016, é a menor taxa de juros no mercado, usada como base para outras taxas de juros na economia brasileira, para seu cálculo é considerado as operações de compra e venda de títulos federais⁸. Esta taxa é expressa na forma anual de 252 dias úteis e não é fixa, variando praticamente todos os dias, porém dentro de um intervalo pequeno. Existe uma meta da taxa selic, que é determinada oito vezes por ano, estabelecido pelo Comitê de Política Monetária, órgão constituído com a finalidade de estabelecer as diretrizes da política monetária e definir a taxa básica de juros.

A metodologia do cálculo da volatilidade é feita através da seguinte equação,

$$\sigma_{i,j}^2 = \frac{\sum_{t=0}^n (R_{i,t} - \bar{\mu}_i)(R_{j,T} - \bar{\mu}_j)}{(n - 1)}$$

$\sigma_{i,j}^2$: Volatilidade entre o ativo i e j ;

$R_{i,t}$: Retorno do ativo i no instante t ;

$R_{j,t}$: Retorno do ativo j no instante T ;

$\bar{\mu}_i$: Retorno médio do ativo i ;

$\bar{\mu}_j$: Retorno médio do ativo j ;

n : Quantidade de retornos da amostra.

A metodologia do cálculo da taxa de juros Selic é feita através da seguinte equação,

$$Taxa\ Selic = \left\{ \left[\left(\frac{\sum_{j=1}^n L_j \cdot V_j}{\sum_{j=1}^n V_j} \right)^{252} - 1 \right] \times 100 \right\} ao\ ano$$

L_j : Fator diário correspondente à taxa da j – ésima operação;

V_j : Valor financeiro correspondente à taxa da j – ésima operação;

n : Número de operações que compõem a amostra.

⁷Volatilidade calculada através do desvio padrão histórico dos retornos do ativo objeto no período considerado de um ano.

⁸Os títulos públicos federais que representam a disponibilidade financeira do governo federal brasileiro e são emitidos pelo Tesouro Nacional.

Para mais informações a respeito dos cálculos da taxa de juros Selic e a volatilidade dos ativos consulte [9]. Os outros dados coletados se referem a fontes bibliográficas como citado acima.

3 FUNDAMENTOS DO MERCADO FINANCEIRO

O modelo de Black – Scholes está intrinsecamente ligado aos mercados futuros. Portanto é apresentada uma abordagem desse mercado e seus fundamentos, conforme [8], [17] e [24].

3.1 No Começo

Os mercados surgiram a partir da necessidade de administrar as alterações de preços de ativos agrícolas. Em síntese, consideram-se ativos qualquer coisa que possa gerar lucro econômico. Na Grécia e Roma antiga, os mercados⁹ ganharam um elevado grau de institucionalização, com horários e locais fixos para acontecer às negociações, sistema de escambo e de câmbio de moedas, e um esquema de contratação para entrega futura. Logo no início desses mercados, já existia a preocupação dos compradores em adquirir junto aos agricultores as futuras colheitas por um preço fixo. Esse procedimento tornou-se ótimo para às partes envolvidas, sendo o embrião do mercado de entrega antecipada de um bem. Com o declínio dessas civilizações, os princípios básicos dos mercados centrais sobreviveram à chamada Idade das Trevas, embora o amplo fluxo de comércio tenha sido interrompido.

A busca pela organização dos preços agrícolas era grande desde os tempos medievais, ocorrido notícias de realização de acordos e contratos nas feiras da Europa do século XII. Com o passar do tempo, esse desejo foi aumentando e se espalhando pelo resto do mundo.

3.2 Caminhando Rumo ao Mercado Futuro Organizado

Durante a década de 1840, Chicago¹⁰ surgiu como um forte centro de mercado para os Estados vizinhos. Agricultores se reuniam em épocas de colheitas para vender e trocar seus grãos. Nessas oportunidades, muitas vezes os agricultores jogavam seus grãos no Lago Michigan, por causa da falta de compradores e espaço adequado para armazenamento das sobras. Dessa forma, na primavera, não havia produtos agrícolas suficientes para atender a demanda, pois como alguns produtos agrícolas eram de clima quente, os agricultores plantavam no verão e consumiam no outono e no inverno. Quando chegava à primavera não havia produtos

⁹Resultado da existência de oferta e procura por um bem qualquer.

¹⁰Chicago é uma cidade situada no estado de Illinois-EUA.

o suficiente. Com isso, tal situação levava à oscilação constante de preços de grãos e de todos os produtos de origem agrícola, o que acabou por tornar-se um problema.

Considere um exemplo simples de oscilação de preços de produtos agrícolas, o tomate, um fruto tropical. Assim, sua produção concentra-se nos períodos mais quentes do ano. No período de safra, o preço de venda do tomate diminui pelo motivo da grande quantidade disponível para compra. Os interessados em adquirir este produto compram-no por um preço muito abaixo e os produtores acabam por não receberem os lucros esperados.

Já no inverno, o preço de compra do tomate aumenta significativamente, pois sua oferta diminui por causa das condições climáticas. Portanto, os interessados em ter este produto em sua mesa devem estar dispostos a pagar um preço mais alto por ele. Desta forma, o preço deixa de ficar atraente para grande parte dos compradores. Estas situações fizeram com que agricultores e compradores buscassem formas de diminuir as variações abruptas de preços que ocorriam com vários produtos.

3.3 Junta Comercial de Chicago

Por volta de 1848, comerciantes de grãos se reuniram para formar uma troca de grãos organizada, na Junta Comercial de Chicago (CBOT¹¹). A Junta Comercial de Chicago nada mais era do que uma associação de comerciantes que criaram um local específico e organizado de encontro para compradores e vendedores de diversos grãos, assim eles poderiam se reunir e realizar seus negócios. Com o passar do tempo, alguns investidores observaram uma oportunidade de construir silos para armazenar os grãos para consumo durante todo o ano. Esta ação permitiu que o abastecimento de produtos agrícolas se tornasse mais constante nos períodos de procura e oferta, o que trouxe estabilidade para o preço dos grãos durante o decorrer do ano.

No princípio da década de 1970, os negócios com mercadorias representavam uma parte da totalidade das transações realizadas em mercados futuros organizados. Estes mercados eram um local onde se negociavam acordos de compra e venda que só seriam realizados no futuro. O início da negociação de ativos financeiros nos Mercados Futuros deu-se em 1973, com o surgimento do International Monetary Market pela Chicago Mercantile Exchange, negociando contratos futuros de câmbio¹². Esses contratos de futuros sobre as mercadorias, representam um

¹¹Sigla em inglês da Junta Comercial de Chicago significa: Chicago Board of Trade.

¹²Os contratos futuros de câmbio consistem em assumir posições compradas ou vendidas em contratos de dólar com vencimento em uma data futura especificada, por preço previamente estabelecido.

compromisso de poder entregar ou de poder receber certa quantidade de mercadorias a certo preço num lugar fixado pelo contrato.

O foco desse mercado organizado de futuros objetiva em formalizar os contratos para entrega diferida de mercadorias e meios fáceis para melhorar o funcionamento dos contratos à vista. Neste caso, o contrato era um tipo de termo que regia a negociação e consistia em comprar e pagar a mercadoria no tempo presente e recebê-la depois num tempo futuro.

A partir de 1800, essa troca de mercadoria passou a ocorrer de forma centralizada em Chicago. Esse procedimento ajudou a estabilizar a flutuação dos preços. Contudo, essa centralização não eliminou a oscilação de preços em sua totalidade.

Os comerciantes ainda tinham que pensar em outros problemas na precificação de seus produtos, tais como: geadas, secas graves e infestação de insetos e outros desastres naturais, os quais influenciavam a oferta de mercadorias agrícolas. Algumas doenças também poderiam matar rebanhos inteiros de gado ou mesmo atrasar os prazos de venda. Da mesma forma, a instabilidade política ou guerras provocavam desequilíbrio nas ofertas.

Desta forma, surgiu a necessidade de ter um padrão para os contratos fazendo uma ligação entre a liquidez dos negócios e a formação correta dos preços. A partir desse momento, surgiram então os Contratos a Termo que posteriormente se transformaram nos atuais Contratos Futuros.

3.4 Contrato a Termo

Para tentar lidar com as outras causas de incertezas quanto ao preço dos produtos, os agricultores e os comerciantes começaram a fazer alguns acordos chamados contratos a termo ou vendas a prazo em dinheiro. O contrato a termo é uma negociação em particular ou privada feita no presente que estabelece o preço de uma mercadoria a ser entregue em um tempo futuro. Essa proposta alegrou os compradores e vendedores, pois estes poderiam fixar o preço de venda das mercadorias com certa antecedência, e diminuir dessa forma a preocupação com flutuações que os preços viessem a sofrer.

Os contratos a termo representaram um grande avanço, porém não tirava todo o risco de inadimplência entre as partes envolvidas na negociação. Por exemplo, se os comerciantes já tivessem estabelecido o preço da mercadoria a ser entregue no futuro e se encontrassem uma proposta de venda melhor, estes poderiam mudar seus acordos. Com isso, se os preços aumentassem drasticamente antes da data de entrega estabelecida pelo contrato, os

comerciantes poderiam vender para outra pessoa a um preço muito mais elevado. Para resolver esse problema, foi exigido nas transações entre os comerciantes um depósito em dinheiro em uma conta de custódia, que serviria como segurança caso houvesse omissão no contrato por alguém das partes. Deste modo, a outra parte iria receber o dinheiro a título de reembolso por qualquer inconveniente ou perda financeira. Isso ajudou a garantir que ambos os lados cumprissem de fato o trato firmado. Os contratos a termo representaram uma grande melhora na negociação das mercadorias, porém não fossem a solução plausível para todos os problemas. Logo os comerciantes tiveram que buscar outra forma de resolver essas dificuldades.

3.5 Contratos Futuros

Os contratos a prazo evoluíram para os contratos futuros de hoje. Uma grande vantagem dos contratos padronizados consiste na sua facilidade de negociação. Como resultado, o contrato normalmente mudava de mãos muitas vezes antes de suas datas de entrega especificadas ser efetuada. Como resultado direto, a quantidade de compradores de contratos futuros aumentou enormemente. A capacidade de eliminar uma “posição”¹³ em um contrato de compra ou venda antes da data de entrega, chamado de “compensação”¹⁴, é uma característica chave da negociação de futuros. Na verdade, apenas cerca de 3% de todos os contratos de futuros atualmente resulta na entrega física do produto, conforme [8], porque a maioria das pessoas limpa ou elimina as suas posições antes do contrato expirar.

3.6 No Brasil

A experiência no Brasil com mercados futuros começou no século XX, em 1917, quando foi criada a primeira bolsa de mercadorias agrícolas, a Bolsa de Mercadorias de São Paulo (BMSP). No ano de 1979, as bolsas de valores do Rio de Janeiro e de São Paulo levaram à tona o conceito de negociação a futuro, e criaram o Mercado Futuro de ações individuais. Em seguida, como resultado de investimentos por parte da Bolsa de Valores do Rio de Janeiro foi constituída, no ano de 1983, a Bolsa Brasileira de Futuros (BBF). A BBF lançou seu primeiro contrato, chamado o futuro de ouro, no final de 1984. O volume de negociações atingiu seu

¹³Posição é o saldo líquido dos contratos negociados por um mesmo contratante para um mesmo vencimento através de operações no mercado futuro.

¹⁴Compensação é o preço de liquidação financeira do dia.

auge em 1986 com o contrato de NTN-C¹⁵ futuro. Entretanto, devido uma série de fatores levou à queda das negociações no Mercado Futuro de Ações no Brasil, como, por exemplo, as dívidas externas e internas do país. As atividades do Mercado Futuro de ações foram encerradas em meados de 1986 em São Paulo, e no início de 1987 no Rio de Janeiro. No final da década de 90 e início dos anos 2000, a movimentação de importantes bolsas de valores internacionais direcionou para o ressurgimento desse mercado.

3.7 Fundamentos de Finanças

É preciso introduzir alguns conceitos que são fundamentais para o entendimento dos mercados.

Definição 3.7.1: Um *ativo* ou bem é algo capaz de produzir fluxo monetário para o proprietário. É qualquer bem com valor comercial ou valor de troca pertencente a uma sociedade, instituição ou pessoa física. Exemplos: imóveis, dinheiro aplicado, ações, joias, etc.

Definição 3.7.2: *Valor mobiliário* é um instrumento que indica participação em uma companhia (ações), relacionamento de um credor com uma empresa ou entidade governamental (obrigações), ou direitos de propriedades representadas por instrumentos como opção.

Definição 3.7.3: *Ação* é o valor mobiliário emitido pelas companhias e representativo de parcela do capital. É o documento que indica ser o seu possuidor o proprietário de certa fração de determinada empresa. As ações representam a menor fração do capital social¹⁶ destas companhias, ou seja, é o resultado da divisão do capital social em partes iguais. Quando emitidas por companhias abertas ou assemelhadas, são negociadas em bolsa de valores ou no chamado mercado de balcão. O investidor torna-se, portanto, sócio da empresa da qual adquiriu ações e os poderes a ele atribuídos são limitados pelo tipo de ação que comprou e também pela quantidade de ações que possui.

Definição 3.7.4: *Mercadorias* são produtos como cereais, metais e alimentos negociados em uma bolsa de mercadorias ou no mercado à vista.

¹⁵Notas do Tesouro Nacional, série C – NTN-C.

¹⁶Capital Social é financeiramente a parcela do patrimônio líquido de uma empresa ou entidade oriunda de investimento na forma de ações ou quotas efetuado na companhia pelos proprietários ou acionistas.

Definição 3.7.5: *Dividendo* é a parcela do lucro da empresa que é distribuída aos acionistas, de acordo com a quantidade de ações possuídas. Normalmente, é resultado dos lucros obtidos por uma empresa.

Definição 3.7.6: *Rentabilidade ou retorno* é a medida de ganho financeiro nominal sobre o total do investimento, expressa em termos percentuais. Exemplo: um investimento inicial de R\$ 90,00, que hoje vale R\$ 97,00, gerou um ganho financeiro nominal de R\$ 7,00 e uma rentabilidade de 7,78%.

Definição 3.7.7: *Risco* é o grau de incerteza da rentabilidade de um investimento. Exemplo: afirmar que um investimento é de alto risco significa que se tem pouca chance de prever, com precisão, a rentabilidade deste investimento. Em contrapartida, esse investimento oferece possibilidade de retorno superior a um investimento conservador. No jargão financeiro, a palavra risco está sempre associada à probabilidade de ganhos ou perdas acima ou abaixo da média de mercado. O investidor deve estar atento a essa diferença, porque na linguagem cotidiana a palavra risco muitas vezes é usada para indicar a possibilidade de perda (diminuição) ou manutenção do estado atual, excluindo a possibilidade de ganho (retorno ou crescimento).

Definição 3.7.8: *Obrigações ou títulos* é o reconhecimento formal, por escrito, de uma dívida, pelo qual uma das partes promete pagar certa importância, em determinada data futura, acrescido de juros, em datas pré-fixadas, até o vencimento.

Definição 3.7.9: *Ativo financeiro* é qualquer título representativo de parte patrimonial ou dívida. Exemplos: títulos da dívida pública, contratos derivativos, ações, etc.

Definição 3.7.10: *Derivativos* são ativos financeiros cujos valores e características de negociação estão amarrados aos ativos que lhes servem de referência (chamados ativos base). A palavra derivativo vem do fato que o preço do ativo é derivado de outro ativo. Exemplos: opção da Petrobrás¹⁷, o preço desta opção é derivativo do ativo base ação da Petrobrás.

¹⁷Petróleo Brasileiro S.A. ou simplesmente Petrobrás é uma empresa de capital aberto, sociedade anônima, cujo acionista majoritário é o Governo do Brasil (União).

Definição 3.7.11: *Tendência*, é representada pela letra μ , é a taxa de retorno esperada para um ativo com relação a uma média de probabilidade.

Definição 3.7.12: *Volatilidade*, é representada pela letra σ , é um indicador que mede o risco de um determinado investimento. Quanto maior a volatilidade, maior o risco para o investidor, comparativamente aos demais fundos do segmento em questão. O cálculo deste indicador considera a dispersão para mais ou para menos da rentabilidade diária em relação à média da rentabilidade em determinado período (desvio padrão). Mede, também, o grau médio de variação das cotações de um título ou fundo de investimento em um determinado período de tempo. Alta volatilidade significa que o valor da cotação apresenta forte variação.

Definição 3.7.13: *Arbitragem* é a compra de um valor mobiliário e sua venda simultânea para a obtenção de lucro sem risco ou a realização de lucro garantido sem incerteza, com uma ou mais transações no mercado. Arbitragem é a obtenção de lucros com diferenças de preço quando o mesmo título, moeda ou mercadoria são negociados em dois ou mais mercados. Exemplo: suponha que dois bancos *A* e *B* estabeleçam a taxa de juros ao ano no valor de 8% e 10% respectivamente. Um arbitrador¹⁸ deve tomar o máximo que puder de empréstimo do banco *A* e depositar todo esse valor no banco *B*, uma vez que o ganho de 2% é certo.

Definição 3.7.14: *Mercado perfeito* é um mercado sem custos de transação e leilões, no qual todos os acordos são cumpridos. Há possibilidade de comprar ou vender qualquer montante de cada valor mobiliário. As transações ocorrem continuamente e há a possibilidade de venda ilimitada e ausência de impostos.

Definição 3.7.15: *Portfólio* é um conjunto de títulos e valores mantido por um fundo mútuo ou por um investidor. É uma carteira de títulos, isto é, um conjunto de títulos de rendas fixas e variáveis, de propriedade de pessoas físicas ou jurídicas.

Definição 3.7.16: *Hedge* é a operação que possibilita a realização de seguro contra oscilações de preços.

¹⁸O arbitrador é um participante que tem como objetivo o lucro, mas ele não assume nenhum risco.

Definição 3.7.17: *Custos de transação* são custos da compra e venda de um valor mobiliário, que consistem principalmente na comissão de corretagem, margem do investidor ou de uma taxa (como exemplo, a taxa cobrada por um banco ou por uma corretora para negociar títulos do governo), mas também incluiu tributos diretos, tais como comissões, bem como quaisquer impostos de transferência pelo governo e outros impostos.

3.8 Opções

As opções são fundamentos para o entendimento dos derivativos, isto é, são instrumentos financeiros negociáveis no mercado, em bolsas de valores, cujos valores dependem, ou derivam dos valores de outros ativos.

Definição 3.8.1: *Opção de compra* é um derivativo que proporciona a seu proprietário o direito, mas não a obrigação, de comprar determinado ativo a um preço fixo em certa data, ou antes, dela.

Definição 3.8.2: *Opção de venda* é um derivativo que proporciona a seu proprietário o direito, mas não a obrigação, de vender determinado ativo a um preço fixo em certa data, ou antes, dela.

Definição 3.8.3: *Titular* é o comprador de uma opção, de compra ou de venda.

Definição 3.8.4: *Lançador* é o vendedor de uma opção, de compra ou de venda.

Definição 3.8.5: *Prêmio* da opção é o preço pelo qual a opção é negociada entre as partes.

Definição 3.8.6: *Ativo objeto* ou *ativo subjacente* é o ativo sobre o qual a opção está sendo negociada. Esse ativo pode representar vários ativos: taxas de juros, taxas de câmbio, índices de bolsas de valores, e ações.

Definição 3.8.7: *Preço de exercício* é o preço fixado no contrato da opção, sobre o qual o ativo será comprado ou vendido.

Definição 3.8.8: *Maturidade* é a data em que a opção expira ou vence.

Definição 3.8.9: *Opção europeia* é a opção na qual o titular de uma opção só pode exercê-la na data de vencimento.

Definição 3.8.10: *Volatilidade implícita* é a volatilidade de uma opção considerando dados os demais parâmetros do modelo de precificação e seu preço de mercado.

Considere o seguinte exemplo, sobre opções do tipo compra e venda. Suponha que um negociante queira comprar um contrato de opção de compra europeia de 100 ações da Petrobrás, cujo preço de exercício é de R\$ 100 por ação e a data de maturidade é dois meses. Então, suponha que o preço por ação seja de R\$ 5, isto é, o comprador precisa pagar um prêmio de R\$ 5 por ação. Considere ainda que o preço corrente da ação seja de R\$ 98. Como a opção é europeia, o comprador poderá exercer a opção somente na data de maturidade. Se na data de maturidade o preço da ação for menor que R\$ 100 claramente o comprador não exercerá a opção, pois não há razão em comprar uma opção por R\$ 100, sendo o valor de mercado menor. Nestas circunstâncias, o comprador perde todo o investimento inicial de R\$ 500. Por outro lado, se na data de maturidade o preço da ação for maior que R\$ 100, o comprador exercerá a opção. Por exemplo, se o preço da ação for R\$ 115 na maturidade, então exercendo a opção o comprador irá comprar 100 ações por R\$ 100 cada. Se a ação for vendida imediatamente, o comprador terá um ganho de R\$ 15 por ação, ou seja, R\$ 1500,00, ignorando os custos. Quando o custo inicial da ação é levado em conta, o lucro líquido para o comprador é de R\$ 10 por ação, ou seja, R\$ 1000,00. Considere, agora, a situação em que o preço da ação seja de R\$ 103 na maturidade. O comprador também exercerá a opção, mesmo levando em conta que ele irá perder R\$ 200. Pois antes perder R\$ 200 do que R\$ 500 se a opção não for exercida.

O oposto da opção de compra é a opção de venda, que assegura ao comprador o direito de vender um ativo por um preço estabelecido até a data de vencimento. Os adquirentes de opções de venda apostam na baixa do preço do ativo. Considere um negociante que queira comprar um contrato de opção de venda europeia em 100 ações da Vale¹⁹ cujo preço de exercício é R\$ 70, isto é, ele compra o direito de vender 100 ações da Vale por R\$ 70 cada. Suponha que o preço corrente da ação seja de R\$ 66, a data de maturidade ocorra em três meses e o preço da opção seja de R\$ 7 por ação. Como a opção é europeia, o comprador poderá exercer

¹⁹A Vale é uma das maiores mineradoras do mundo. Brasileira, criada para a exploração das minas de ferro na região de Itabira, no estado de Minas Gerais em 1942, no governo de Getúlio Vargas.

a opção somente na data de maturidade. Se na data de maturidade o preço da ação for menor que R\$ 70, o comprador exercerá a opção. Por exemplo, se o preço da ação for de R\$ 50 na maturidade, exercendo a opção, o comprador irá comprar 100 ações por R\$ 50 cada e, sob os termos da opção de venda, venderá as mesmas ações por R\$ 70, realizando um ganho de R\$ 20 por ação, ou seja, R\$ 2000,00, ignorando os custos. Quando o custo inicial da ação é levado em conta, o lucro líquido para o comprador é de R\$ 13 por ação, ou seja, R\$ 1300,00. Caso o preço da ação seja maior que R\$ 70 na maturidade, o comprador não exercerá a opção, pois a opção não terá valor e o comprador perderá R\$ 7 por ação, ou seja, R\$ 700.

A questão problema deste trabalho é como saber que preço se pagar pelo contrato de opção. O modelo de Black – Scholes lida especificamente com opções do tipo europeia como já foi citado, mas existem outros tipos de opções como,

- *Opção Americana* é a opção na qual o titular de uma opção pode exercê-la a qualquer momento até a data de vencimento.
- *Opção Barreira* é quando a opção pode surgir ou perder o valor consoante, e o ativo subjacente atinja algum valor pré-fixado antes da expiração.
- *Opção Asiática*, o preço dessas opções depende de algum tipo de média (aritmética, geométrica, por exemplo).
- *Opção Lookback*, o preço dessas opções depende do preço máximo ou mínimo do ativo subjacente.

As utilizações dessas opções dependem muito do que está sendo comercializado e de qual país está sendo feito a transação. No Brasil, são usadas opções do tipo europeias em seus mercados, porém na maioria das transações a opção é de venda, o que ilustra uma maior vantagem nesse cenário.

3.9 Apreçamento de uma Opção de Compra Europeia

Suponha que uma empresa como, por exemplo, a OGXP3²⁰ tenha que negociar um ativo de risco, como o petróleo. A empresa sabe, por exemplo, que em cinco meses serão necessários milhares de barris de petróleo bruto para a sua produção. Porém, o preço do petróleo pode flutuar desordenadamente, ou seja, podem ocorrer preços altos ou baixos em um determinado tempo. Então, comprando opções de compra europeia, com preço de exercício E , a empresa sabe a quantia total de dinheiro que será necessário em cinco meses para comprar os milhares de barris do petróleo. Considere o contrato de opção como uma forma de seguro contra o aumento no preço do petróleo devido as oscilações. Sendo T a data de maturidade, é preciso determinar para T e E dados, o preço ideal desse seguro. Ao analisar este exemplo, observa-se um problema, custa dinheiro estocar petróleo. Assim, ao precificar derivativos baseados em ativos que podem ser mantidos sem custos extras, como ações das empresas. Então, suponha que não existam benefícios extras para manter essas ações, ou seja, nenhum dividendo é pago.

Então, a empresa entra adquire um contrato que dê a ela o direito, mas não a obrigação, de comprar uma unidade do estoque por um preço E após o período T . Quanto a empresa deveria pagar pelo contrato? Perguntas como essa motivam o estudo do modelo de Black – Scholes.

É preciso saber o valor do contrato na data de maturidade. No instante T quando a opção chegar a maturidade, o valor de S_T será o preço da ação subjacente na maturidade. Caso $S_T > E$, então a opção será exercida, neste caso a opção é dita estar no preço. Uma opção que vale S_T pode ser comprada pelo preço de exercício E , assim o valor da opção para a empresa será, $(S_T - E)$. Se caso, $S_T < E$, então será mais barato comprar ações no mercado aberto e com isso a opção não será exercida. A opção vale menos, e é possível dizer que ela está fora do preço. Se $S_T = E$, a opção é dita estar no preço. O valor de uma opção de compra europeia, em seu momento de maturidade, é dado por $(S_T - E)_+ = \max\{(S_T - E), 0\}$. Com base nesses conceitos é de extrema importância para um investidor saber qual o preço justo a se pagar pelo prêmio de uma opção, de acordo com [6], [23] e [24].

Ao abordar qual valor do prêmio deve-se pagar por uma opção, é preciso recorrer ao modelo de Black – Scholes, mas para o seu entendimento é necessário ter um conhecimento prévio a respeito da teoria de equações diferenciais e equações diferenciais parciais

²⁰Óleo e Gás Participações S.A. (OGXP3) é uma empresa do grupo Eike Batista que atua nas áreas de exploração e produção de petróleo e gás natural.

4 MODELO DE BLACK – SCHOLES

Em 1973 os economistas Fischer Sheffey Black e Myron Samuel Scholes apresentaram no artigo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” a fórmula de Black – Scholes, para descrever o comportamento de opções europeias.

4.1 Breve História

Tudo começou com os trabalhos de Bachelier (1900) usando novos modelos matemáticos em finanças. Na época, Black era um físico matemático, recentemente doutorado por Harvard que largou a física e estava trabalhando na Arthur D. Little²¹, uma empresa de consultoria em gerenciamento situada em Boston²² e Scholes, um professor emérito de Finanças da Universidade de Stanford, que se uniram para descobrir qual valor colocar nos derivativos financeiros, como os de opções. A princípio Black e Scholes tiveram dificuldades no desenvolvimento do modelo, com isto precisaram da ajuda de Robert Carhart Merton, economista da universidade de Harvard que terminou o desenvolvimento do modelo que ficou conhecido como modelo de Black – Scholes. Os três conquistaram o prêmio Nobel de Economia em 1997, porém somente Scholes e Merton receberam o prêmio, pois Black faleceu em 1995.

O trabalho com as opções, por exemplo, consiste em adquirir uma opção de comprar ações, sob um preço acordado até uma data futura determinada. Se o valor da ação ultrapassa o valor acordado dentro do período, o comprador da opção, compra a ação, podendo, se quiser, mas sem obrigação, vender imediatamente a ação e realizar o lucro. Se o valor da ação não ultrapassar o preço do acordo, não há a necessidade de comprar a ação, perdendo somente o dinheiro pago pela compra da opção. O que faz o mercado de opções ser interessante é que o comprador sabe antecipadamente qual sua perda máxima: que será o custo da opção. Já a capacidade de ganho é teoricamente ilimitada: se a ação sobe fortemente durante o período, o comprador pode aguardar o momento certo para maximizar seus lucros. A pergunta é: como definir um preço justo para a opção de uma ação em particular? Os três jovens pesquisadores na época já citados buscaram achar uma resposta usando a Matemática, exatamente da forma como um físico ou um engenheiro aborda um problema.

²¹É uma empresa de consultoria dos Estados Unidos fundada em 1886 por Arthur Dehon Little.

²²Boston é a capital e também a cidade mais populosa do estado de Massachusetts nos Estados Unidos.

Desde o início do capitalismo existe uma regra de ouro: para um investidor ganhar dinheiro tem que correr riscos. Então, veio um dos projetos científicos mais improváveis do século XX, na tentativa de encontrar uma forma matemática, para quebrar essa regra. Encontrar uma fórmula que permitisse tornar qualquer um, inimaginavelmente rico, sem tomar qualquer risco absoluto, traria organização aos mercados financeiros do mundo todo, e desafiaria o papel de alguns especialistas: os traders²³. Os traders confiam em suas intuições para tomar suas decisões. Mas, em pouco tempo depois do surgimento da fórmula de Black – Scholes, eles acabaram incorporando a fórmula em calculadoras sem se interessar pelos rigorosos cálculos matemáticos.

Então os acadêmicos decidiram que era hora de começar a ganhar dinheiro com a fórmula desenvolvida. Merton e Scholes arrecadaram fundos e criaram a LTCM²⁴. Eles pretendiam investir quantidades inéditas de dinheiro no mercado e a reputação deles de maiores mentes tornou fácil à arrecadação de dinheiro. Em poucos meses haviam arrecadado cerca de US\$ 3 bilhões, e estavam prontos para investir em todo o globo. Extremamente confiante, a LTCM colocou vastas somas de dinheiro nos mercados. Em seguida, Merton e Scholes observaram que os investimentos estavam realmente funcionando. A LTCM cresceu rápido, foi superior a qualquer outra empresa de investimentos. Assim, a empresa lucrou muito em três anos verdadeiramente fabulosos. No primeiro ano o investimento rendeu 20%, e os parceiros ganharam boas comissões. No segundo ano tiveram retorno de 43%, dando uma reviravolta no mercado. Já no terceiro ano, foram mais de 41%, era como se a LTCM tivesse tomado o dinheiro do mundo todo de uma forma matemática. Foi como se o mundo e o mercado se comportassem exatamente como Merton e Scholes colocaram no papel na forma de variáveis.

Foram anos maravilhosos, porém lentamente de uma área totalmente inesperada, que provavelmente muitos nem sequer tenham ouvido falar e certamente em que não haviam investido, uma mudança no mercado começou a se tornar aparente. No verão de 1997, os preços dos imóveis em toda a Tailândia começaram a entrar em colapso, isso provocou um pânico que varreu a Ásia, bancos faliram do Japão a Indonésia. Em seguida, as pessoas saíram às ruas, esses fatos eram tão improváveis que nunca haviam sido incluídas em qualquer modelo matemático.

²³Trader é todo e qualquer indivíduo que se engaja na transferência de ativos financeiros, para alguma instituição ou para si próprio.

²⁴Long Term Capital Management foi um fundo de hedge, empresa de gestão com sede em Greenwich, Connecticut, que utilizou estratégias de negociação de retorno absoluto, combinadas com alta do mercado. LTCM foi fundada em 1994 por John W. Meriwether, o ex-vice-presidente e chefe do vínculo de negociação no Salomon Brothers. Os membros do conselho de administração da LTCM eram Myron S. Scholes e Robert C. Merton.

O mercado parecia um céu desabando, assim houve reação imediata, o mercado quebrou, recuperou, quebrou, não parava de oscilar. Os modelos de negociação utilizados começaram a dar resultados estranhos, mas o modelo matemático do LTCM concluiu que tudo voltaria ao normal em breve, e que não havia nenhum motivo para pânico. Com o medo que o mercado trouxe, as opções custavam cada vez mais. O LTCM começou a comprar desenfreadamente as opções, começaram a assumir dívidas de US\$ 100 bilhões de dólares. Eles estavam arcando com os custos extras desde o endividamento, mesmo assim poderiam continuar com o hedge por algum tempo se não acontecesse uma coisa totalmente improvável.

Em agosto de 1998, aconteceu algo que ninguém havia considerado possível, um grande país do mundo, a Rússia, de repente, e sem explicação, recusou-se a pagar todas as suas dívidas internacionais. Agora todos os cálculos do modelo de Black - Scholes estavam finalmente e irremediavelmente, fora dos eixos, não só Black - Scholes, mas todos os modelos de precificação de opções, pois eles foram baseados em um comportamento normal dos mercados. Com isso, nenhum modelo foi capaz de ajustar-se e isso levou a LTCM a perder mais de US\$ 100 milhões ao dia. Até que no quarto dia após a moratória da Rússia, perderam US\$ 500 milhões de dólares em um único dia. A LTCM estava falida e levaria consigo o valor total das posições que detinham em todo o globo, cerca de um trilhão de dólares, o volume equivalente a um ano de negócios do governo americano, que estava prestes a ser exterminado.

Nesta crise, as mais altas autoridades do mundo se reuniram e viram que se a LTCM falisse de vez os mercados poderiam simplesmente parar de funcionar, isso sim seria um grande problema. A fim de evitar um colapso econômico global, o banco central americano, não teve outra escolha senão organizar um resgate da LTCM. Para os acadêmicos, as condições eram humilhantes, Merton e Scholes perderam milhões. Então, as recriminações públicas começaram, todos esperavam que os dois explicassem o que de fato estava acontecendo. Se os vencedores do prêmio Nobel não entediam completamente o que estavam fazendo, e os riscos envolvidos, quem mais poderia entender essas atividades? A bonita fórmula de Black - Scholes continua a ser usada todos os dias, e mesmo ainda, tem muito que ser estudado e aprendido sobre o mercado de opções.

Para a precificação de opções não se usa somente o modelo de Black - Scholes, existem outros modelos e métodos capazes de precificar opções.

4.2 Hipóteses do Modelo

Black e Scholes assumiram uma série de condições ideais de mercado como pré-requisito para o funcionamento correto do modelo. As hipóteses estão listadas abaixo independentes da ordem.

- H1:** O preço do ativo segue uma trajetória aleatória em tempo contínuo;
- H2:** A distribuição de probabilidades dos preços dos ativos é log-normal;
- H3:** A taxa de variância do retorno do ativo é constante;
- H4:** A taxa de juros é conhecida e constante durante o período considerado para a precificação;
- H5:** A opção é do tipo Europeia;
- H6:** O ativo não paga dividendos durante o período de maturidade da opção;
- H7:** Não há custos de transação envolvidos nas operações de compra e venda de ativos ou opções financeiras;
- H8:** É possível investir qualquer fração de ativos ou derivados a uma taxa de juro sem risco;
- H9:** Ausência de arbitragem.

Essas hipóteses consistem em fazer com que o valor da opção dependa apenas de duas variáveis: do preço do ativo subjacente e do tempo, conforme [6]. Os demais parâmetros, volatilidade, juros e preço de exercício são dados como constantes.

4.3 Medidas de Sensibilidade

As medidas de sensibilidade ajudam a mostrar as influências das variáveis que afetam os prêmios das opções. Essas medidas são representadas por letras gregas que se igualam às derivadas parciais dos prêmios das opções com respeito a outras variáveis. Essas relações são determinadas pelo modelo de precificação de Black – Scholes.

Tabela 1 (adaptado): Medidas de sensibilidade.

NOMENCLATURA	LETRA GREGA	DERIVADA
Delta	Δ	$\frac{\partial V}{\partial S}(t, S)$
Gama	Γ	$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S)$
Vega	κ	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}(t, S; \sigma)$
Theta	Θ	$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S)$
Rhô	ρ	$\frac{\partial V}{\partial r}(t, S; r)$

Fonte: Salomão (2011, p.26).

- **Delta:** O delta mede o quanto o valor da opção varia quando há uma mudança no preço do ativo subjacente. É a derivada parcial do prêmio da opção com respeito ao preço do ativo. O valor do delta representa a possibilidade de uma opção ser exercida.
- **Gama:** O gama é a derivada segunda parcial do prêmio da opção com respeito ao preço do ativo subjacente. Representa a variação do delta em relação à variação do preço do ativo.
- **Vega:** O vega é a derivada parcial do prêmio da opção com respeito à volatilidade do ativo subjacente.
- **Theta:** O theta é a derivada parcial do prêmio da opção com respeito ao tempo.
- **Rhô:** O rhô é a derivada parcial do prêmio da opção com respeito à taxa de juros livre de risco.

4.4 Construção do Modelo de Black – Scholes

Ao construir o modelo de Black – Scholes, observa-se no que acontece com o valor de um ativo financeiro ao longo do tempo sujeito a eventos aleatórios para título de análise.

Considere o exemplo a seguir: suponha que um ativo A vale R\$ 10,00 e um ativo B vale R\$ 100,00 e que ambos cresçam R\$ 1,00 por ano. Ao fim de um ano, o ativo A valerá R\$ 11,00 obtendo um aumento de 10%, e B valerá R\$ 101,00 obtendo um aumento de 1%. Portanto, comparativamente, a longo prazo, será mais vantajoso comprar 10 ativos do tipo A

do que 1 ativo do tipo B. Então, quando se trata de modelar o valor de um ativo o foco está no retorno esperado, que é a variação relativa do valor do ativo.

Considere que o valor de um ativo financeiro no instante t é dado por $S(t)$. Ao saber o que acontece com o preço do ativo em um instante seguinte, que é designado por $t + \Delta t$, e estudar a forma como $S(t + \Delta t)$ se relaciona com $S(t)$. Assim, esta relação pode ser estudada de forma relativa, considere o quociente

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)}.$$

Por exemplo, uma variação de um real no valor de uma ação que vale cinco reais é mais significativa do que uma variação de um real numa ação cotada a vinte reais.

Então, o retorno relativo ao ativo financeiro em certo período de tempo é dado por:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t.$$

em que μ pode ser interpretado como uma taxa de juros e Δt sendo a variação do tempo em relação ao valor do ativo financeiro. Fazendo,

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu S(t).$$

Considere o limite quando Δt tende para zero no membro do lado esquerdo desta equação:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu S(t).$$

E sendo S uma função em relação a uma variável t , pela definição de derivada²⁵ tem-se,

²⁵Seja uma função f definida em um intervalo aberto contendo x_0 , então a derivada de f em x_0 , denotada por $f'(x_0)$, é dada por: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, se este limite existir, Δt representa uma pequena variação em x , próximo de x_0 , ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x$, assim $\Delta x = x - x_0$, a derivada de f em x_0 pode também ser expressa por $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu S(t).$$

Ao escrever em sua forma diferencial, segue,

$$\frac{dS}{dt}(t) = \mu S(t). \quad (4.1)$$

o que resulta na equação diferencial ordinária linear de primeira ordem.

Resolver (4.1), dado a condição inicial $S(t_0) = S_0$, então,

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{S(t)} &= \int \mu dt \\ \ln|S(t)| &= \mu t + c \\ e^{\ln|S(t)|} &= e^{\mu t + c} \\ S(t) &= e^{\mu t + c}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Fazendo $t = t_0$,

$$\begin{aligned} S(t_0) &= e^{\mu t_0 + c} \\ S_0 &= e^{\mu t_0 + c}. \end{aligned}$$

Assim, $\ln|S_0| = \ln|e^{\mu t_0 + c}|$, então

$$\begin{aligned} \ln|S_0| &= \mu t_0 + c \\ c &= \ln|S_0| - \mu t_0. \end{aligned}$$

Substituindo c em (4.2),

$$S(t) = e^{(\mu t + \ln|S_0| - \mu t_0)} = \frac{e^{\mu t} e^{\ln|S_0|}}{e^{\mu t_0}}$$

$$S(t) = \frac{e^{\mu t} S_0}{e^{\mu t_0}}$$

$$S(t) = e^{(\mu t - \mu t_0)} S_0$$

tem-se,

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}. \quad (4.3)$$

Pode-se definir a solução da equação diferencial linear de primeira ordem, onde o valor de μ seja constante ao longo do tempo, pela condição inicial de $S(t_0) = S_0$, dada por (4.3).

Teorema 4.4.1 (Teorema Fundamental do Cálculo): Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$. Se a função $F(x)$ é definida em $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^b f(t) dt,$$

então, $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$. Uma função com tal propriedade é chamada de primitiva ou antiderivada de f . Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [44].

Pelo teorema (4.4.1), a equação diferencial (4.1) pode ser escrita na forma de uma equação integral

$$S(t) - S_0 = \int_{t_0}^t \mu S(u) du.$$

Neste caso, o modelo em questão é do tipo determinístico para o comportamento do ativo financeiro. Porém, nem sempre é possível ficar livre de influências de fatores externos e inesperados no comportamento do preço de um ativo financeiro. Então, o melhor é trabalhar com processos que possam expressar uma componente aleatória, para tornar o modelo de retorno ainda mais realístico. Segue,

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta X(t)$$

em que $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ é uma variação ao longo de um período. A letra grega σ representa a volatilidade e é conhecido como desvio padrão do retorno. No modelo de Black – Scholes a volatilidade é considerada constante, (ou seja, não depende de t ou de $S(t)$). Esse comportamento aleatório é introduzido através do processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$. Os incrementos $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ devem satisfazer algumas características. Os incrementos devem ser independentes, ou seja, as variáveis aleatórias

$$X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$$

com $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$ são independentes para todos os valores $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$. Esses incrementos também devem ser estacionários²⁶, ou seja, o processo $X(t)$ não é afetado por uma translação ao longo do tempo.

O único processo estocástico que satisfaz essas características é o Movimento Browniano, que por sua vez segue uma distribuição normal. Sendo, $X(t + \Delta t) - X(t) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onde $E(\Delta X(t)) = 0$ e $V(\Delta X(t)) = \Delta t$. Se $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, então $\Delta t = t$ e $X(t + \Delta t) - X(0) = X(t) - X_0$, $X(t) \sim \mathcal{N}(t_0, \sqrt{t})$, tem-se uma função densidade dada por

$$y_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-1}{2t}(x - x_0)^2\right)}.$$

Como $S(t)$ não é uma variável aleatória, os incrementos fica dessa forma $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$, então $\Delta S(t) = \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t)$. Como $E(\Delta X(t)) = 0$, a média de $\Delta S(t)$ é dada por

$$E(\Delta S(t)) = E(\mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t)) = \mu S(t)\Delta t.$$

Também, $\frac{E(\Delta S(t))}{S(t)} = \mu \Delta t$, o que indica que o parâmetro μ é proporcional à esperança do retorno $\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)}$. Pode-se calcular a variância de $\Delta S(t)$ facilmente

²⁶Um processo estocástico é dito ter incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo de tempo dependa somente do comprimento do intervalo de tempo, isto é, o número de eventos que tenha ocorrido até o tempo t que é X_t independe do número de eventos que ocorrem entre os tempos de t e $t + s$, isto é, $X_{t+s} - X_t$.

$$\begin{aligned}
V(\Delta S(t)) &= E(\Delta S(t)^2) - E(\Delta S(t))^2 \\
&= E([\mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t)]^2) - [\mu S(t)\Delta t]^2 \\
&= \sigma^2 S(t)^2 \Delta t.
\end{aligned}$$

O desvio padrão do retorno de $\Delta S(t)$ é igual a $\sigma S(t)\sqrt{\Delta t}$. Neste caso a volatilidade é proporcional ao desvio padrão $\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}$.

Ao lidar com fenômenos imprevisíveis, a variação do valor de um ativo financeiro como um processo estocástico é dado pela fórmula

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t).$$

Neste caso, $[t_0, t] \in T$, dada uma partição do intervalo $[t_0, t]$ em subintervalos menores, segue que $t_0 < t_2 < \dots < t_k = t$. Pode-se somar membro a membro, na fórmula

$$S(t_j + \Delta t) = S(t_j) + \mu S(t_j)\Delta t + \sigma S(t_j)\Delta X(t_j),$$

para $j = 0, 1, \dots, k-1$ e $t = t_k$. Dada a condição inicial $S(t_0) = S_0 \in \mathbb{R}$, segue

$$S(t) = S(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu S(t_j) \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma S(t_j) \Delta X(t_j). \quad (4.4)$$

Fazendo Δt_j tender para zero, e ao fazer a passagem do limite na equação (4.4), não há problemas em usar a integração de Riemann no caso determinístico, como pode ser observado em [44]. Porém, o caso estocástico pode ser entendido como uma integral de Itô estudada no apêndice B. Quando não houver confusão pode ser utilizada a seguinte notação S_t no decorrer deste trabalho, sendo $S(t, \omega) = S(t) = S_t(\omega) = S_t = S$. Assim, o limite quando $\Delta t_j \rightarrow 0$ na equação (4.4), fica da seguinte maneira

$$\begin{cases} S_t = S_0 + \int_{t_0}^t \mu S_t dt + \int_{t_0}^t \sigma S_t dX_t \\ S(t_0) = S_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.5)$$

A primeira integral $\int_{t_0}^t \mu S_t dt$ é interpretada como uma integral de Riemann. Já a segunda integral é considerada uma integral de Itô.

A equação estocástica (4.5) pode ser escrita na sua forma diferencial sabendo-se que o processo $X_t = B_t$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (4.6)$$

Antes de continuar, deve-se rever o desenvolvimento de uma função f em série de Taylor²⁷ em torno de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R(\Delta x),$$

onde $R(\Delta x)$ refere-se aos termos subsequentes e $\Delta x = x - x_0$. Esse é o desenvolvimento da série de Taylor para uma variável. Para duas variáveis a expansão em série de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) é da seguinte forma,

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Delta y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\Delta x)(\Delta y) + R(\Delta x, \Delta y). \end{aligned}$$

Do cálculo estocástico, o chamado Lema de Itô conhecido também como fórmula de Itô, que permite trabalhar diferenciando variáveis em problemas que envolvam os termos estocásticos. Então, se S_t é um processo estocástico, pode-se escrever uma função $f(S_t)$. O lema de Itô permitirá o cálculo do diferencial $df(S_t)$, ao observar o que acontece com f_t quando ocorrem perturbações na variável S_t . Esse Lema é análogo à regra da cadeia do cálculo comum que é uma fórmula para a derivada composta de duas funções. Porém, essa regra da cadeia para o cálculo estocástico é mais bem compreendida a partir da expansão com séries de Taylor. Basicamente, Itô descobriu que a trajetória do evento S_t pode afetar outros processos que dependem de S_t . Assim, ao manipular esses outros processos, ele conseguiria eliminar essas dependências do processo S_t , conforme [36]. Será agora enunciado o Lema de Itô.

²⁷Brook Taylor (1685-1731), foi um matemático inglês que contribui muito no campo da matemática, mas seu nome está ligado com o estudo das séries.

Lema 4.4.2 (Fórmula de Itô): Seja $\{S_t\}_{t \geq t_0}$ um processo de Itô, com $f(t, S_t)$ sendo uma função duas vezes continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Nestas condições, o processo estocástico $\{R_t\}_{t \geq t_0}$ definido por $R_t = f(t, S_t)$ é um processo de Itô e a equação integral estocástica a ele associada pode ser escrita, em versão diferencial, na forma

$$dR_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t) (dS_t)^2. \quad (4.7)$$

Uma demonstração desse lema pode ser encontrada em [32] e [33]. Para $f(t_0, x_0) = 0$, então

$$\begin{aligned} dR_t = 0 + \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, S_t) (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t) (dS_t)^2 \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t}(t, S_t) dS_t dt + R(\Delta t, \Delta S_t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Desconsidere R na expansão de Taylor, onde não irá interferir nos cálculos. Para satisfazer o Lema de Itô, basta considerar o desenvolvimento da expansão em série de Taylor até a primeira ordem em t e até a segunda ordem em S .

O termo $(dS_t)^2$ é formalmente calculado através da tabela de multiplicação apresentada logo abaixo. Os detalhes da construção dessa tabela não serão mostrados aqui, mas podem ser visto em [12].

Tabela 2 (adaptado): Regras de multiplicação.

x	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Fonte: Misturini (2010, p.56)

Substituir a equação (4.6) na equação (4.7), segue

$$dR_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t) (dS_t)^2$$

$$dR_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)\mu S_t dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)\sigma S_t dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t)(dS_t)^2. \quad (4.9)$$

O termo $(dS_t)^2$ pode ser melhor calculado utilizando as regras algébricas da tabela 2. Desenvolver na equação (4.6) segue,

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 &= [\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t]^2 \\ &= [\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t][\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t] \\ &= \mu^2(dt)^2 S_t^2 + \mu\sigma(dt)(dB_t)S_t^2 + \sigma^2(dB_t)^2 S_t^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 dt. \end{aligned}$$

Substituir o resultado acima na equação (4.9) segue,

$$\begin{aligned} dR_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)\mu S_t dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)\sigma S_t dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$dR_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)\sigma S_t dB_t. \quad (4.11)$$

Para chegar ao modelo de Black – Scholes como na equação (1.1) é preciso eliminar o risco que pode ocorrer em dB_t , pois é um processo que varia ilimitadamente. Suponha que o preço de uma opção europeia seja representável por uma função $V(t, S)$ duas vezes continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Por enquanto, o cálculo do preço da opção europeia não se define como sendo de compra ou de venda.

Para se construir o hedge no modelo de Black – Scholes, considere uma carteira ou portfólio constituído por uma posição curta numa opção e por uma posição longa de uma determinada quantidade Δ de ativos subjacentes. É teoricamente possível eliminar o risco, de maneira que em possíveis alterações no preço do ativo sejam compensadas por alterações no valor da opção. Isso pode ser feito para curtos períodos de tempo, pois conforme o tempo for passando e o preço, por exemplo, da ação for mudando, o hedge deve ser ajustado. De acordo com a hipótese H8, é possível criar um portfólio a uma taxa de juros livre de riscos. Com isso,

é adquirida a ausência de arbitragem que é a hipótese H9. Para melhor entendimento da operação de hedge, segue um exemplo com base em [28].

Exemplo 4.4.3: Um produtor de soja tem um custo de R\$ 30 para produzir uma saca de soja com um determinado peso P . Entretanto, o produtor receia que o preço da saca caia por motivos aleatórios que podem acontecer no mercado. Assim, ele observa que a cotação da saca de soja na BM&F em março de 2014, um mês antes de sua colheita está sendo negociada a R\$ 40. O produtor realiza um contrato futuro na BM&F, cujo vencimento do contrato esteja próximo da entrega da soja aos seus clientes.

Se em outubro de 2014, próximo a data de entrega das sacas de soja a cotação das sacas na BM&F for de R\$ 50, o produtor paga um ajuste de R\$ 10 por saca para a BM&F e vende sua soja no mercado por R\$ 50. Ou seja, ele garantiu os R\$ 40 por saca, e o que ele perdeu na BM&F foi compensado no mercado devido à alta do preço das sacas de soja, assim houve a operação de proteção por parte do produtor.

Agora considere o caso em que no mês de outubro próximo a data de entrega a cotação da saca de soja esteja R\$ 30. O produtor recebe um crédito de R\$ 10 por saca na BM&F, mas perde R\$ 10 no mercado para seus clientes. O produtor recebeu um ajuste de R\$ 10, mas acaba vendendo sua soja por R\$ 30 a saca. O ganho obtido na BM&F compensou a perda com a queda do preço da saca de soja no mercado para seus clientes, mesmo assim houve uma operação de proteção.

Então o valor do portfólio é dado por,

$$\Pi(t, S) = \Delta S - V(t, S). \quad (4.12)$$

Considere que este portfólio tenha o mesmo risco que um ativo livre de risco, e também que seu retorno seja o mesmo de um ativo livre de risco, onde S representa o valor do ativo e V o valor do contrato de opção ainda não estipulado pra venda ou compra. De fato, pois se o retorno do ativo livre de risco fosse maior não teria sentido alguém formar tal portfólio, sendo o retorno do portfólio maior, não existiria sentido em alguém investir no ativo de risco. É possível então eliminar o risco do modelo, por exemplo, tendo uma posição comprada de uma unidade do ativo subjacente e uma posição vendida de uma unidade de opções.

A carteira ou portfólio acima toma esta composição, pelo fato que o Δ torna o valor dessa carteira insensível a pequenas variações no valor do ativo subjacente. Então suponha que um investidor deseja precaver-se contra possíveis movimentos aleatórios no valor do ativo

subjacente. Considere a carteira (4.12). O valor dessa carteira com uma aleatoriedade no valor do ativo é

$$\Pi(t, S + \gamma S) = \Delta(S + \gamma S) - V(t, S + \gamma S).$$

Ao fazer uma expansão em série de Taylor em $V(t, S)$ no ponto (t, S) e um deslocamento em $(0, \gamma S)$ em $V(t, S + \gamma S)$,

$$\begin{aligned} V(t, S) &= V(t, S) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, S)(t - t) + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(S + \gamma S - S) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(t, S)(t - t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S)(S + \gamma S - S)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S}(t, S)(t - t)(S + \gamma S - S) + R(t - t, S \\ &\quad + \gamma S - S). \end{aligned}$$

Desprezando os termos de segunda ordem,

$$\Pi(t, S + \gamma S) = \Delta(S + \gamma S) - V(t, S) - \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(\gamma S).$$

Como $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)$,

$$\begin{aligned} \Pi(t, S + \gamma S) &= \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(S + \gamma S) - V(t, S) - \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(\gamma S) \\ \Pi(t, S + \gamma S) &= \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(S) + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(\gamma S) - V(t, S) - \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(\gamma S) \end{aligned}$$

$$\Pi(t, S + \gamma S) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)(S) - V(t, S).$$

Pode-se concluir então que

$$\Pi(t, S + \gamma S) = \Pi(t, S)$$

o que dá um hedge na carteira, tornando o valor desta carteira quase inalterado a pequenas variações no valor do ativo subjacente.

Na seção 4.3 que o Δ é definido como a taxa de variação do preço da opção com relação ao preço do ativo subjacente. Considere o exemplo seguinte baseado em [28].

Exemplo 4.4.4: Se a variação do Δ for de 0,7, significa que para cada R\$ 1,00 que o preço da ação varie para mais ou para menos, o preço da opção deve variar R\$ 0,70. Suponha que um lançador venda 4000 opções de compra, por exemplo, sua posição pode ser protegida pela compra de $0,7 \times 4000 = 2800$ ações. O lucro ou perda na posição em opções tenderá a ser compensado pela perda ou lucro na posição nas ações. Nesta operação, uma variação de R\$ 1,00 no preço da ação para mais, traria um lucro de R\$ 2800, que seria compensado com um prejuízo de $0,7 \times 4000 = 2800$ ações com as opções lançadas.

A função Π satisfaz o lema (4.4.2), então existe um processo estocástico de Itô $\{\Pi_t\}_{t \geq 0}$ que satisfaz a equação diferencial (4.11), segue

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) + \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_t)\mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}(t, S)\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_t)\sigma S dB_t. \quad (4.13)$$

Recorrendo (4.12), e substituindo (4.6) e (4.11) em (4.12) de acordo com o lema (4.4.2), daí

$$d\Pi_t = \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)\mu S_t + \Delta \mu S - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S)\sigma^2 S^2 \right) dt - \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)\sigma S dB_t + \Delta \sigma S dB_t. \quad (4.14)$$

Sabe-se que $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)$, segue

$$d\Pi_t = -\frac{\partial V}{\partial t}(t, S)dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S)\sigma^2 S^2 dt.$$

Note que o termo dB_t desapareceu, dessa forma o risco foi eliminado. Da equação diferencial estocástica (4.13), surge uma equação diferencial parcial, segue

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = -\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S)\sigma^2 S^2. \quad (4.15)$$

A carteira não possui arbitragem e possui um retorno igual um investimento livre de risco. Então suponha uma taxa de juros r com capitalização contínua livre de riscos,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = r\Pi(t, S).$$

De (4.12) e (4.15), com $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)$, segue

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) \sigma^2 S^2 = r \left(\frac{\partial V}{\partial S}(t, S) S - V(t, S) \right)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) \sigma^2 S^2 = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) S r - V(t, S) r$$

logo,

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + r S \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - r V(t, S) = 0 \quad (4.16)$$

Que modela o preço V de uma opção europeia, em função do tempo t e do valor S do ativo, onde r é a taxa de juros e σ^2 é a variância.

4.5 Resolução Analítica do Modelo de Black – Scholes

Primeiro resolve-se o modelo de Black – Scholes para uma opção de compra, já para a opção de venda os procedimentos são análogos.

Para resolver o modelo analiticamente é preciso estudar algumas condições, mas antes, ao olhar para as opções europeias do tipo compra, pode-se mudar a equação (4.16) para a notação $V(t, S) = C(t, S)$, pois C simboliza a ideia de compra e V a de venda, segue

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) + r S \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) - r C(t, S) = 0 \quad (4.17)$$

A condição final que se espera é dada por $C(T, S) = \max \{S - E, 0\}$, ou seja, espera-se que ao final do período de maturidade da opção o valor S do ativo seja maior que seu preço de exercício E , caso o contrário o valor da opção a ser pago é zero. Nas condições de fronteira, caso o valor do ativo S seja muito pequeno $S \rightarrow 0^+$ surge a condição $\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0$. Se o preço do ativo S for muito grande $S \rightarrow +\infty$ surge a condição $\lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}$ com $t \geq 0$, pois $Ee^{-r(T-t)}$ representa o preço de exercício ajustado no final da maturidade da opção.

O modelo de Black – Scholes conforme [25], foi resolvido analiticamente como uma equação de difusão²⁸ do calor, assim sua solução é semelhante à solução da Equação do Calor, que pode ser resolvida usando métodos usuais. Primeiro, verifica-se que a equação (4.17) é do tipo parabólica, então seu discriminante é $\Delta = 0$, pois $B = 0$, $A = 0$ e $C = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2$. Seja a seguinte mudança de variável $t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\tau \Rightarrow \tau = -\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2}$, $S = Ee^x$, $C(t, S) = Ev(\tau, x)$ e $x = \log\left(\frac{S}{E}\right)$, pois o ativo subjacente S segue uma distribuição log-normal, uma demonstração dessa afirmação pode ser encontrada em [41]. Daí,

$$\frac{\partial C}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dS}$$

onde, $\frac{dx}{dS} = \frac{1}{S}$, então

$$\frac{\partial C}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S}. \quad (4.18)$$

Derivando parcialmente C pela segunda vez em relação a S , segue

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{E}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{1}{S}. \quad (4.19)$$

Derivar C em relação a t segue,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt}$$

²⁸É uma transferência de calor, é um fenômeno de transferência térmica causado por uma diferença de temperatura.

onde, $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\sigma^2}{2}$, segue

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{\sigma^2}{2}. \quad (4.20)$$

Substituir $C(t, S) = Ev(\tau, x)$ e (4.18), (4.19) e (4.20) em (4.17),

$$-E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{E}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{1}{S} \right) + rS \left(E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} \right) - rEv(\tau, x) = 0$$

$$-E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{E}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{E}{S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{1}{S} + rSE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} - rEv(\tau, x) = 0$$

$$-E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rE \frac{\partial v}{\partial x} - rEv(\tau, x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial v}{\partial x} = -E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rE \frac{\partial v}{\partial x} - rEv(\tau, x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2}{\sigma^2 E} E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{2}{\sigma^2 E} \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2 E} rE \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{\sigma^2 E} rEv(\tau, x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2} r \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{\sigma^2} rv(\tau, x) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2} r \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{\sigma^2} rv(\tau, x) = 0$$

tomar $c = \frac{2r}{\sigma^2}$, segue

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial v}{\partial x} - cv(\tau, x). \quad (4.21)$$

A condição final vista acima passa a ser uma condição inicial com $\tau = 0$, onde $t = T$, segue a forma $v(0, x) = \max\{e^x - 1, 0\}$. E as condições de fronteira não se modificam quando $x \rightarrow \pm\infty$, e tomam a forma $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(\tau, x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - v(\tau, x) = e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau}$, com $\tau \geq 0$.

Para obter a equação de difusão correspondente a equação (4.17), considere a seguinte mudança de variável,

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x). \quad (4.22)$$

Esses parâmetros α e β , são escolhidos de forma a anular determinados termos na equação (4.21). Derivar $v(\tau, x)$ e substituir em (4.21), segue

$$\begin{aligned} \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + \frac{\partial u}{\partial \tau} e^{\alpha x + \beta \tau} &= - \left(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} \right) + \alpha \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} \alpha \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{\alpha x + \beta \tau} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + c \left(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\ &- cu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) &= - \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u - \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} + \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + \frac{\partial u}{\partial x} \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{\alpha x + \beta \tau} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + c \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + c \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} \\ &- cu \end{aligned}$$

dividir ambos os lados por $e^{\alpha x + \beta \tau}$, segue

$$\begin{aligned} \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} &= - \alpha u - \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u + \frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + c \alpha u + c \frac{\partial u}{\partial x} - cu \\ \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \alpha u + c \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u - \frac{\partial u}{\partial x} - cu. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}(\tau, x)$ anula-se se escolher α e β a satisfazer $\alpha = \frac{1-c}{2}$ e $\beta = \alpha^2 + (c-1)\alpha - c$, substituir α em β , segue

$$\beta = \left(\frac{1-c}{2} \right)^2 + (c-1) \left(\frac{1-c}{2} \right) - c$$

$$\beta = \frac{(1-c)^2}{4} + \frac{c-c^2-1+c}{2} - c$$

$$\beta = \frac{(1-c)^2}{4} + \frac{(-c^2+2c-1)}{2} - c$$

$$\beta = \frac{1-2c+c^2}{4} + \frac{(-c^2+2c-1)}{2} - c$$

$$\beta = \frac{1-2c+c^2-2c^2+4c-2-4c}{4}$$

$$\beta = \frac{-c^2-2c-1}{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(c+1)^2.$$

Substituir os valores de α e β em (4.23),

$$-\frac{1}{4}(c+1)^2u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \left[-\frac{1}{2}(c-1)\right]^2 u + 2$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(c+1)^2u + \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \left[-\frac{1}{2}(c-1)\right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left[-\frac{1}{2}(c-1)\right] u \\ &\quad + c \frac{\partial u}{\partial x} - \left[-\frac{1}{2}(c-1)\right] u - \frac{\partial u}{\partial x} - cu \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}(c+1)^2u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(-\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\right)^2 u + 2\left(-\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x} - cu$$

$$-\frac{1}{4}(c^2+2c+1)u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{2}{4}c + \frac{1}{4}\right)u - \frac{\partial u}{\partial x}c + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c^2}{2}u$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{cu}{2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{cu}{2} - \frac{u}{2} - \frac{\partial u}{\partial x} - cu \\
& - \frac{1}{4}(c^2 + 2c + 1)u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{4}c^2u - \frac{2}{4}cu + \frac{1}{4}u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c^2}{2}u + cu - \frac{u}{2} - cu \\
& \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{4}c^2u + \frac{2}{4}cu + \frac{u}{4} + \frac{1}{4}c^2u - \frac{2}{4}cu + \frac{u}{4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c^2u}{2} - \frac{u}{2} \\
& \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

com $\tau \geq 0$ e $-\infty < x < +\infty$.

Substituir os valores de α e β em (4.22), segue

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x)$$

daí, tem-se uma condição inicial dada por $u(0, x) = \max\{e^{\frac{1}{2}(c+1)x} - e^{\frac{1}{2}(c-1)x}, 0\}$, e as condições de fronteira ficam da forma $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x) = e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau}$, para $\tau \geq 0$. É possível verificar que a equação (4.24) é do tipo parabólica e seu discriminante é $\Delta = 0$, pois $A = 1$, $B = 0$ e $C = 0$. Note que a equação (4.24) é idêntica a equação do calor.

O problema de valor inicial toma a forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \tau \geq 0 \text{ e } -\infty < x < +\infty \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

tem solução única desde que $u_0(x)$ seja uma função contínua exceto num número finito de pontos e desde que $u_0(x)$ não cresça muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$, ou seja, desde que exista uma constante $a > 0$ tal que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x)e^{-ax^2} = 0$.

A solução da equação (4.24) é dada pela integral de Poisson definida na equação (A.10). Segue, que $u(\tau, x) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(c+1)x} - e^{\frac{1}{2}(c-1)x}, 0\right\} = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(c-1)x}(e^x - 1), 0\right\}$. Na expressão de Poisson para $u(0, x)$, segue

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(c+1)s} - e^{\frac{1}{2}(c-1)s} \right) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds. \quad (4.25)$$

Reescrever a integral (4.25) de forma mais resumida, e fazer uma mudança de variável, $e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} = e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-s)^2}{2\tau}}$, chamar $y^2 = \frac{(x-s)^2}{2\tau}$ e passar a raiz quadrada de ambos os lados dessa igualdade, $\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{(x-s)^2}{2\tau}}$, sabe-se que $(x-s)^2 \geq 0$ e que $|x-s| = |s-x|$, então $y = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$. Se $s = 0$, então $y = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$, deste resultado basta substituir em (4.25), assim ao isolar s , segue que $s = x + y\sqrt{2\tau}$, que também pode ser substituído em (4.25). Tomar o $\frac{dy}{ds} = \sqrt{2\tau}$ implica que $dy = \sqrt{2\tau}ds$, substituir em (4.25). Feito a mudança de variável, segue

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \sqrt{2\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(c-1)(x+y\sqrt{2\tau})} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (4.26)$$

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}} \sqrt{2}\sqrt{\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(c-1)(x+y\sqrt{2\tau})} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

de $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ então,

$$u(\tau, x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{(i)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{(ii)}. \quad (4.27)$$

Inicialmente é preferível resolver a integral (i). Reescrever (i) e usar propriedades de potenciação, segue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2} dy. \quad (4.28)$$

Para resolver a integral (4.28), basta completar o quadrado da exponencial,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(c+1)(x+y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2 \\ & \frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{2}(c+1)y\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}y^2 \\ & \frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{2}cy\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

completar o quadrado do termo $(cy\sqrt{2\tau} + y\sqrt{2\tau} - y^2)\frac{1}{2}$, segue $y(c\sqrt{2\tau} + \sqrt{2\tau})$, e fazer $\frac{c\sqrt{2\tau} + \sqrt{2\tau}}{2}$, daí $\frac{1}{2}c\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{2\tau}$ elevar ao quadrado,

$$\left(\frac{1}{2}c\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{2\tau}\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 2\tau + 2 \frac{1}{2}c\sqrt{2\tau} \frac{1}{2}\sqrt{2\tau} + \frac{1}{4} 2\tau = \frac{1}{2}c^2\tau + c\tau + \frac{1}{2}\tau$$

multiplicar por $\frac{1}{2}$ tem-se, $\frac{1}{4}c^2\tau + \frac{1}{2}c\tau + \frac{1}{4}\tau = \frac{1}{4}(c+1)^2\tau$ adicionar esse termo encontrado em (4.28) de forma que não altere a expressão, segue

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} dy \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(c+1)x} e^{\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} dy \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}\right)^2} dy. \end{aligned}$$

Fazer uma nova mudança de variável, chamar $y - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} = z$, se y esta variando de $\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}, +\infty\right)$, então z vai variar de $\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}, +\infty\right)$. Assim, $\frac{dz}{dy} = 1$ o que implica $dz = dy$, portanto segue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (4.29)$$

Como o modelo de Black – Scholes possui distribuição normal, da definição no apêndice (B.1.16) e (B.1.18) considere a função de distribuição cumulativa de uma lei de probabilidade normal de média 0 e desvio padrão 1, dada por

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds. \quad (4.30)$$

Associando (4.29) a (4.30) de forma que (4.29) fique com a mesma estrutura de integração que (4.30). Então da distribuição normal,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \quad (4.31)$$

Fazer $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}$,

$$e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}_{N(d_1)}$$

da distribuição gaussiana a solução da integral (i) fica dessa forma

$$e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1).$$

Para resolver a integral (ii) o procedimento é análogo a resolução da integral (i), então

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2). \quad (4.32)$$

sendo $d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}$. Fazer as mudanças de variáveis em sentido inverso para determinar a solução analítica da equação de Black – Scholes (4.17) nas variáveis originais. Primeiro, escreve-se a solução como

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x) \quad (4.33)$$

substituir (4.32) em (4.33), segue

$$\begin{aligned} v(\tau, x) &= e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \left(e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2) \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau + \frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) \\ &\quad - e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau + \frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2) \\ &= e^x N(d_1) - e^{-c\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

sendo $c = \frac{2r}{\sigma^2}$, então

$$v(\tau, x) = e^x N(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau} N(d_2). \quad (4.34)$$

Sabe-se que $C(t, S) = Ev(\tau, x)$, então basta multiplicar E de ambos os lados em (4.34), também que $S = Ee^x$ e $\tau = (T-t)\frac{\sigma^2}{2}$, segue

$$Ev(\tau, x) = Ee^x N(d_1) - Ee^{-\frac{2r}{\sigma^2}(T-t)\frac{\sigma^2}{2}} N(d_2)$$

logo,

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (4.35)$$

Neste caso $N(d_1)$ é a probabilidade de a opção ser exercida na data de maturidade do contrato e $N(d_2)$ representa em probabilidade o número de opções que é necessário vender por cada unidade do ativo subjacente. Já $Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$ dá o valor presente do preço de exercício ao final da data de expiração da opção.

Substituir os valores de $x = \log\left(\frac{S}{E}\right)$, $c = \frac{2r}{\sigma^2}$ e $\tau = (T-t)\frac{\sigma^2}{2}$, em d_1 , daí

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)}{\sqrt{2(T-t)\frac{\sigma^2}{2}}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)\sqrt{2(T-t)\frac{\sigma^2}{2}} \\
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)\sigma\sqrt{(T-t)} \\
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \frac{r}{\sigma^2}\sigma\sqrt{(T-t)} + \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{2} \\
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \frac{r}{\sigma}\sqrt{(T-t)} + \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{2} \\
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{r}{\sigma}\sqrt{(T-t)}\sigma\sqrt{(T-t)} + \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}\sigma\sqrt{(T-t)}}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}. \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

Analogamente, d_2 será

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}. \quad (4.37)$$

Substituir (4.36) e (4.37) em (4.35), obtém-se a solução analítica do modelo de Black – Scholes, que toma a seguinte forma para o apreçamento de opções europeias do tipo compra,

$$C(t, S) = SN\left(\frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - Ee^{-r(T-t)}N\left(\frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right). \quad (4.38)$$

Para a opção de venda, a condição final dada por $V(T, S) = \max\{E - S, 0\}$, ou seja, espera-se que ao final do período de maturidade da opção o valor S do ativo seja menor que seu preço de exercício E , caso o contrário o valor da opção a ser pago é zero. Nas condições de fronteira, caso o valor do ativo S seja muito pequeno $S \rightarrow 0^+$ surge a condição $\lim_{S \rightarrow 0^+} S + V(t, S) = Ee^{-r(T-t)}$ com $t \geq 0$. Se o preço do ativo S for muito grande $S \rightarrow +\infty$ surge a condição $\lim_{S \rightarrow +\infty} V(t, S) = 0$. Os cálculos para o apreçamento de uma opção de venda são análogos a resolução para o apreçamento da opção de compra, portanto não há necessidade de repetição dos cálculos. Analiticamente, tem-se o valor de uma opção de venda dado por,

$$V(t, S) = Ee^{-r(T-t)}N\left(-\frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - SN\left(-\frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right). \quad (4.39)$$

4.6 Revisão dos Modelos de Precificação

Antes do modelo de Black – Scholes em 1973 e depois, já existia a preocupação em se estudar e melhorar as técnicas de precificação de opções. De acordo com [5], [6], [14], [22], [27], [28], [33] e [36], pode-se observar os vários modelos e adaptações que surgiram ao longo dos anos para se precificar opções.

- Louis Bachelier em 1900 desenvolveu uma teoria da especulação financeira descrevendo conceitos que se tornaram fundamentais no estudo dos mercados. Seu

modelo não foi bem aceito, pois possibilitava valores negativos para o ativo subjacente.

- Em 1931 Andrey Kolmogorov criou um modelo padrão que permitiu resolver equações na teoria das finanças, no entanto existem casos que apresentam dificuldades no processo de solução dessas equações.
- Sprenkle em 1961 adaptou a distribuição log-normal para o preço do ativo subjacente, eliminando problemas de valores negativos, mas a taxa média de crescimento e o grau de aversão ao risco era difícil de se estimar.
- James Boness no ano de 1964 introduziu uma taxa de juros em um modelo de precificação, em seu modelo ele ignorava o impacto dos níveis de risco no preço do ativo e da opção.
- Em 1965 Samuelson ligou as diferenças de características entre o risco do preço e da opção do ativo financeiro, sugerindo que o ativo seguisse um movimento crescente positivo, o que não ocorre normalmente nos mercados.
- Em 1969 Kassouf, Samuelson e Merton criaram um modelo em que as taxas de crescimento esperadas para o preço da opção e do ativo são determinadas através de combinações de uma distribuição de probabilidade como uma função, mas esse modelo não produz simulações de valores médios ao longo do tempo, dificultando a avaliação das opções.
- O ganhador do prêmio nobel, modelo de Black – Scholes em 1973, no qual este modelo depende apenas de parâmetros observáveis e supõe que os ativos objetos variam de forma contínua e aleatória, mas este modelo não se adapta, por exemplo, as opções americanas.
- O chamado Método de Monte Carlo de 1977 desenvolvido por Phelim Boyle que utiliza simulações numéricas para encontrar o valor da opção, este modelo apresenta uma desvantagem quando se trata da precisão dos resultados.
- Método de Diferenças Finitas de Eduardo Schwartz criado em 1977, aproxima derivadas parciais de uma equação diferencial pelas diferenças finitas correspondentes, podendo assim obter o valor da opção, a dificuldade desse modelo é retratada pela malha que representa os possíveis valores que o tempo e o preço do ativo podem assumir.
- Em 1979 Cox, Ross e Rubinstein criaram o chamado modelo Binomial, no qual as alterações no preço dos ativos financeiros são representados por árvores binomiais,

onde é possível ver os valores corrigidos até a data de maturidade da opção. Esse modelo pode apresentar dificuldades em sua programação quando se tratar de vários tipos de opções.

- Modelo de Ad-Hoc Black – Scholes de Dumas, Fleming e Whaley desenvolvido em 1998. Esse modelo utiliza uma lógica de precificação que se baseia em volatilidades estimadas por meio de uma análise das volatilidades implícitas das opções semelhantes negociadas nos mercados. Uma desvantagem desse modelo se trata no cálculo feito para encontrar uma medida variável de volatilidade.
- Modelo denominado Hn-Garch de Heston e Nandi criado em 2000. Nesse modelo, o parâmetro da volatilidade é calculado a partir do histórico do ativo subjacente sem precisar das volatilidades implícitas de opções semelhantes no mercado. A dificuldade desse modelo se encontra em calibrar os parâmetros de forma a refletir melhor o comportamento dos mercados.
- Bonotto em 2008 desenvolveu um método baseado no modelo de Black – Scholes para o tratamento da precificação de opções com ações impulsivas, mas não se aplicou tal método com dados reais.
- Modelos de Support Vector Regression para precificação de opções desenvolvido por Monica Beltrami em 2012. O modelo baseia-se na supervisão de dados estatísticos e determina uma função de precificação a partir do reconhecimento de padrões e tendências do mercado. O modelo apresenta bom desempenho em relação ao modelo de Black – Scholes, porém requer um custo computacional maior.
- Antônio e Geovani em 2014 desenvolveram um modelo exponencial para a precificação de opções. Constataram que a distribuição dos retornos diários dos ativos financeiros é melhor retratada pelo modelo exponencial. No entanto o modelo exponencial apresenta um retorno muito maior no valor da volatilidade em comparação com o modelo de Black – Scholes.

A todo momento estão surgindo novas pesquisas a respeito dos modelos de precificação. Dessa forma, fica evidente como citado acima os trabalhos mais relevantes e que contribuem diretamente no desenvolvimento das pesquisas de precificações.

Sempre se teve a preocupação de desenvolver um melhor modelo de precificação de opções que atendesse os mercados financeiros, e a todo momento surge melhoramentos a respeito dos modelos de precificação. Em todos os modelos é possível se encontrar falhas, mas

os modelos mais utilizados nas bolsas de valores são os de Black – Scholes e o modelo Binomial de acordo com [28]. No entanto, nem todos os modelos são utilizados nas bolsas de valores, mas contribuem para o desenvolvimento de estudos a respeito das precificações de opções.

Apesar dos modelos de Black – Scholes e Binomial apresentarem falhas, estes dois modelos são práticos e populares nos mercados. Com o desenvolvimento da tecnologia, fica claro que em dado momento pode-se surgir um modelo que melhor precifique uma opção, podendo assim, ser um substituto para os modelos de Black – Scholes e Binomial.

5 MODELO BINOMIAL

O Modelo Binomial foi desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein em 1979, como pode ser visto em [15]. Em 1976, Mark Edward Rubinstein grande economista e acadêmico financeiro e Stephen Alan Ross, professor de Economia Financeira na Sloan School of Management do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, fizeram novos estudos a partir do modelo de Black e Scholes para ativos objeto que seguiam outros tipos de processos estocásticos que não o chamado Movimento Browniano. Porém, ainda existia problemas na precificação de opções do tipo americana quando se usava o modelo de Ross e Rubinstein, dessa forma, John Carrington Cox, também professor de finanças na Sloan School of Management, desenvolveu junto com Ross e Rubinstein, o chamado Modelo Binomial, que ficou conhecido como modelo de Cox, Ross & Rubinstein.

Nesse modelo, os três acadêmicos citados utilizaram um processo discreto no tempo e porém, binomial no espaço, fazendo aproximar a um processo contínuo possibilitando calcular o preço de uma opção americana e também desenvolveram o modelo para opções do tipo europeia que um dos interesses de estudo desta dissertação. É possível se calcular a probabilidade da ocorrência dos movimentos serem ascendentes ou descendentes de acordo com [14]. Conhecendo como se comporta a distribuição de probabilidade dos preços dos ativos financeiros e levando em consideração uma operação livre de riscos, é possível se obter o prêmio das opções.

5.1 Hipóteses do Modelo

Assim como, Black, Scholes e Merton desenvolveram condições ideais para se obter o valor de uma opção de venda ou compra, Cox, Ross e Rubinstein propuseram hipóteses a serem seguidas no modelo Binomial. As hipóteses estão listadas abaixo independentes da ordem.

H1: O ativo-objeto, exemplo, uma ação, segue um processo binomial no decorrer do tempo;

H2: A taxa livre de riscos deverá ser constante;

H3: Os indivíduos podem emprestar e tomar quantias emprestadas à mesma taxa;

H4: Não existem impostos nem custos de transação, ou requerimentos de margem;

H5: E a venda a descoberto é permitida sem restrições, com total uso dos seus recursos.

5.2 Avaliação de Opções

O valor do ativo subjacente se comporta com duas alternativas, uma com movimento ascendente u e outra com movimento descendente d . Dado um valor inicial positivo para o ativo em questão, ao lidar com os retornos das ramificações da árvore binomial, pois o modelo binomial é também conhecido como Modelo de Árvores Binomiais e também chamado de Triângulo dos Preços Futuros, esses retornos variam de zero, no limite inferior, e podem se aproximar do infinito, quando o número de períodos aumenta. É preciso recorrer da distribuição binomial do estudo de estatística básica e verificar que esta vai se aproximar da distribuição logarítmica normal, distribuição na qual não envolve números negativos, de acordo com o aumento da medida que o número de ramificações da árvore se torna muito grande, ou seja, tendendo para o infinito.

O modelo binomial foi proposto para processos discretos, porém seu interesse neste trabalho é no estudo para processos contínuos. Considere uma distribuição de probabilidade binomial, é possível transforma-la em uma forma temporal contínua. Basta dividir o tempo T anos, em um número de intervalos maiores, n , até que esse $n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema do Limite Central²⁹, é possível verificar que a distribuição binomial pode se aproximar de uma distribuição normal, veja [14], pois, em cada período da árvore a distribuição de probabilidades é dada por uma distribuição binomial, assim a medida que o número de intervalos de tempo aumenta, mais ela se aproxima de uma distribuição normal.

Ao lidar com uma distribuição de probabilidade de modelo binomial, tem-se que encontrar a probabilidade p que determina um movimento ascendente e $1 - p$ um movimento descendente, de maneira que o retorno do ativo financeiro seja livre de riscos. Já para a opção do tipo compra, pode-se representar os valores dos ativos de subida e descida como sendo C_u e C_d . Os retornos no final da maturidade vão depender do valor do ativo negociado, dependendo da situação tratada, subida ou descida, e depende também do preço de exercício da opção. Existe duas situações distintas, uma em que $C_u = \max\{S_u - E, 0\}$ e a outra em que $C_d = \max\{S_d - E, 0\}$. Para o tipo venda, as seguintes condições, $V_u = \max\{E - S_u, 0\}$ e $V_d = \max\{E - S_d, 0\}$.

²⁹Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e com a mesma distribuição e que se admite ter variância finita: $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$. Pode ser feito $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Então a variável Z_n definida como: $Z_n = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ tem aproximadamente distribuição $N(0,1)$, quando n é suficientemente elevado. Isto é, se F_n for definida como a função de distribuição da variável aleatória Z_n , daí $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \varphi(z)$.

No modelo de Black – Scholes, o preço S do ativo financeiro era considerado uma função contínua ao longo do tempo. Ao analisar os mercados o preço S é obtido de forma discreta no tempo. Como S não é contínuo, mas sim discreto, esse parâmetro vai depender dos instantes de tempo selecionados, $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_n)$, referentes aos instantes $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Esse tipo de problema pode ser associado a uma probabilidade na qual o valor de S varia no tempo, então $p(S_i, S_{i+1})$ é a probabilidade do valor seguinte de $S(t_i)$ ser o possível valor $S(t_{i+1})$.

Considere o tempo de maturidade da opção T , dividindo $[0, T]$ em N subintervalos $\Delta t = \frac{T}{N}$ que pode ser escritos como, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, sendo $t_n = n\Delta t$. Como já foi mencionado, há duas possibilidades uma que o ativo sobe com valor $u > 1$, onde $S_{n+1} = uS_n$ e com probabilidade p , outra que o ativo desce com valor $d < 1$, onde $S_{n+1} = dS_n$ e com probabilidade $1 - p$.

5.3 Determinando p, u e d

Da hipótese do modelo, existe um retorno livre de riscos dada uma taxa de juros r , então no instante $n\Delta t$, dado pelo valor S_n , surge o possível valor do ativo no instante seguinte $(n + 1)\Delta t$, sendo $S_n e^{r\Delta t}$. Dada a esperança matemática de S_{n+1} entendida como uma variável aleatória de acordo com [15],

$$E[S_{n+1}] = S_n e^{r\Delta t} = pS_n u + (1 - p)S_n d$$

então, $e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d$. Isolando o valor de p , segue

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (5.1)$$

Do modelo browniano é possível tomar a seguinte variável aleatória $\log\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)$, com distribuição normal com variância igual a $\Delta t\sigma^2$, onde σ é o desvio padrão do ativo. Com isso, $S_n = S(n\Delta t)$, então $S_{n+1} = S((n + 1)\Delta t)$, obtém-se $\log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)$. A diferença entre $S_{n+1} - S_n$ é bem pequena, então pela fórmula de Taylor já mencionada anteriormente, e sem muitos detalhes, segue

$$\log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) = \log(S_{n+1}) - \log(S_n) \approx \frac{1}{S_n}(S_{n+1} - S_n)$$

$$\frac{1}{S_n}(S_{n+1} - S_n) = \frac{uS_n - S_n}{S_n} = u - 1$$

$$\frac{1}{S_n}(S_{n+1} - S_n) = \frac{dS_n - S_n}{S_n} = d - 1.$$

Onde $u - 1$ e $d - 1$, que possuem probabilidades p e $1 - p$ e variância $\sigma^2\Delta t$. A variância de uma variável aleatória pode ser calculada como, $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$, daí $pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2 = \sigma^2\Delta t$. De (5.1), segue,

$$-(e^{rdt} - d)(e^{rdt} - u) = \sigma^2\Delta t$$

$$e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2\Delta t. \quad (5.2)$$

Porém, em [15] foi proposta uma condição onde suponha-se que os valores de u e d são inversos, $u = \frac{1}{d}$. A equação (5.2) tem a forma,

$$e^{r\Delta t}\left(u + \frac{1}{u}\right) = 1 + \sigma^2\Delta t + e^{2r\Delta t}.$$

Daí, a equação $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ pode ser melhor explicada quando se aplica a série de Taylor, representada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

se tomar a soma dos primeiros termos aproximadamente, terá

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t$$

$$e^{2r\Delta t} = 1 + 2r\Delta t.$$

Desprezar os termos de ordem superior a equação (5.2) pode ser representada por

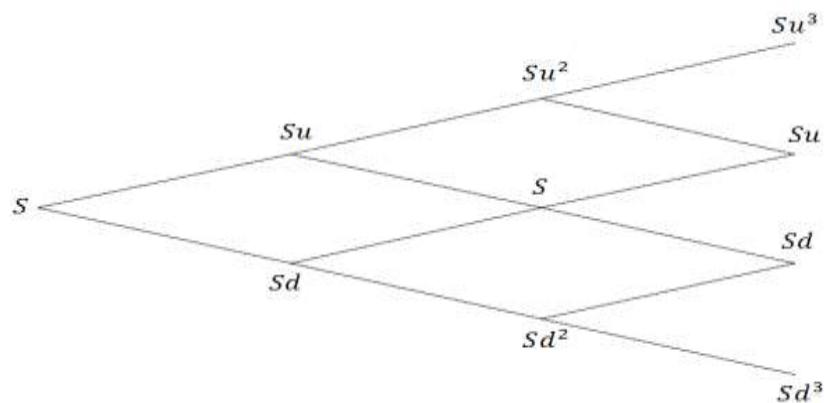
$$\begin{cases} p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \\ u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases} \quad (5.3)$$

De acordo com [14], pelo fato de u e d serem inversos na evolução dos preços dos ativos os movimentos de subida e descida se neutralizam, ou seja, $Su^2d = Su$.

5.4 Árvore do preço dos ativos

É possível corrigir o valor do ativo financeiro ao longo do tempo na árvore binomial através dos movimentos de subidas e descidas. De acordo com [15], é possível traçar um grafo que mostra as possíveis possibilidades de se chegar aos valores do ativo, observe a figura a baixo,

Figura 1 (adaptado): Preços futuros do ativo.



Fonte: (CATIGNANI, 2003, p.115)

Dessa forma, o resultado final do valor dos preços dos ativos corrigidos ao longo do tempo é dado nas últimas ramificações da árvore. É possível observar que em cada nó da árvore, o ativo é multiplicado por u ou multiplicado por d , neste caso ou valor do ativo sobe ou desce.

5.5 Árvore do preço das opções

As últimas ramificações da árvore possui o preço dos ativos corrigidos no final da maturidade T . Com esses valores encontra-se o valor da opção, do tipo compra ou do tipo venda. Esses valores serão calculados da direita para a esquerda, neste caso o interesse é apenas no valor das opções europeias, para se consultar sobre o valor de outras opções, como exemplo, as opções americanas calculadas através do modelo binomial pode se consultar [15].

Considere E , sendo o preço de exercício da opção e S_T o preço ajustado no mercado no final da maturidade. Para a opção de compra o valor é dado por $C = \max\{S_T - E, 0\}$ e de venda é dado por $V = \max\{E - S_T, 0\}$. Designar por P o valor da opção sem definir se é de compra ou de venda. Os retornos são livres de riscos, então o valor da opção esperado ao longo do período e estipulado no contrato em cada instante $(n + 1)\Delta t$ será o mesmo valor da opção P_n . Tomando um intervalo de tempo anterior $n\Delta t$, descontando a taxa de juros r no período Δt , segue

$$E[P_{n+1}] = e^{r\Delta t} P_n.$$

Então pode-se escrever dessa forma,

$$E[P_{n+1}] = pP_{n+1} + (1 - p)P_{n+1}$$

ainda,

$$e^{r\Delta t} P_n = pP_{n+1} + (1 - p)P_{n+1}$$

$$P_n = e^{-r\Delta t} [pP_{n+1} + (1 - p)P_{n+1}]. \quad (5.4)$$

Nas ramificações o valor de P_n , pode ser entendido como valores de subida P_u ou descida P_d , bem como o valor de P_{n+1} , que pode ser interpretado de acordo com os valores calculados da árvore, sendo ascendentes P_{uu} ou descendentes P_{ud} .

O valor da opção na data inicial zero, pode ser entendido como a média de todos os valores da opção até a data de vencimento baseado em suas probabilidades de ocorrências, e em seguida descontado pela taxa de juros livre de risco do modelo. T é o período de tempo até a expiração do contrato de opção, n o número de movimentos de subidas u , $T - n$ pode ser entendido como o número de movimentos da descida ainda no mesmo período. Considere que n , d , r e p são constantes até o fim da maturidade da opção, é possível encontrar a probabilidade de ocorrência do valor de um ativo ser obtido, através da distribuição binomial a seguir,

$$B(n|T, p) = \frac{T!}{(T - n)! n!} p^n (1 - p)^{T-n}.$$

Considere que a probabilidade de três movimentos de subida, onde, $T = 3$, $n = 3$, suponha também que a probabilidade de ocorrência seja $p = 0,70$,

$$B(3|3, 0,7) = \frac{3!}{(3 - 3)! 3!} 0,7^3 (1 - 0,7)^{3-3} = 0,343.$$

Generalizando para todos os movimentos de subida e descida, é possível criar a árvore dos valores dos ativos corrigidos e do valor das opções ao longo do tempo. Os valores dos ativos corrigidos se constroem da esquerda pra direita, enquanto os valores das opções de compra e venda se constroem da direita para a esquerda.

6 PRODUTORES RURAIS NOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

No Nordeste do estado de Minas Gerais, está localizado os vales do Jequitinhonha e Mucuri. De acordo com [29], essa região tem uma população de aproximadamente 1.100.000 habitantes. Essa região possui uma cultura, sociedade, economia e meio ambiente diversificados. A agricultura é predominante nos vales do Jequitinhonha e Mucuri, de acordo com [29], 37% da população dos vales reside na zona rural, porém moradores do meio urbano também estão inseridos em atividades agropecuárias aumentando assim, a porcentagem de moradores dos vales que movem a economia da região com atividades no meio rural.

A região dos vales foram ocupadas inicialmente por povos indígenas, depois com a chegada dos colonizadores esses povos indígenas foram sendo massacrados e expulsos de suas terras, conforme [2]. Também foi povoada por afrodescendentes, pois a região de Diamantina tinha uma grande presença de negros escravizados. Com o fim da escravidão, os afrodescendentes se espalharam pela região procurando meios de manter suas vidas e famílias através do trabalho na terra.

A partir do século XVIII o vale do Jequitinhonha surgiu como uma área de mineração da Coroa portuguesa, trazendo diversos exploradores pra essa região. Quando os recursos minerais se esgotaram, as famílias que moravam no Jequitinhonha se tornaram lavradoras, e outras foram para o vale do Mucuri em busca de novas oportunidades de trabalho e subsistência. Hoje o Jequitinhonha é composto por 75 municípios organizados nas microrregiões, Alto, Médio e Baixo Jequitinhonha.

O vale do Mucuri, sendo influenciado por Teófilo Benedito Otoni³⁰ que em 1847, junto com o Governo da Província de Minas Gerais, instalou a Companhia de Navegação e Comércio do Vale do Mucuri. Para expandir a região, Teófilo Otoni propôs a ocupação do vale por europeus, tendo destaque os germânicos, sendo considerados mais capacitados para o trabalho e desenvolvimento econômico do vale, veja [2]. Com o passar do tempo, o desenvolvimento agrário ficou facilitado devido aos avanços tecnológicos, mas restando ainda famílias que trabalham na terra como vaqueiros, produtores de café, e outras formas de agricultura. O vale do Mucuri é composto atualmente por 27 municípios.

Com o processo histórico que os vales possui e com a ocupação desenfreada pelos colonizadores, juntamente com a diversidade étnica, econômica, cultural e de vínculo com a

³⁰Nasceu na Vila do Príncipe em 27 de janeiro de 1807, e morreu no Rio de Janeiro em 17 de outubro de 1869, foi um jornalista, comerciante, político e empresário brasileiro.

agricultura familiar camponesa, incluindo famílias tradicionais originadas por indígenas, afrodescendentes e imigrantes de várias regiões do país, os vales se torna um local de muitas diversidades. As riquezas naturais da região, incluindo as pedras preciosas, rochas raras, faz com que o Jequitinhonha e Mucuri seja um alvo apenas de exploração, de acordo com [1].

Martirizado como o “Vale da pobreza”, o Jequitinhonha e Mucuri recebem ajuda de órgãos públicos e privados com o objetivo de desenvolver a região e sanar os problemas de desigualdades econômicas e sociais. Porém, maior parte dos investimentos em prol da sociedade, está voltado para a exploração das riquezas naturais dos vales, trazendo assim prejuízos ao meio ambiente. Investimentos como esses por parte de entidades governamentais e não governamentais, em empreendimentos minerários, trazem uma ameaça as famílias camponesas que são responsáveis por incentivar o crescimento econômico dos municípios dos vales. Exemplos dessa dinamização econômica, é encontrada nas feiras livres que ocorrem em todas as regiões dos vales.

6.1 Desenvolvimento Econômico Rural

Nos vales do Jequitinhonha e Mucuri é possível observar uma grande degradação do solos, desmatamentos, queimadas, secas dos rios e córregos. Os agricultores enfrentam dificuldades em produzir na terra, e as vezes utilizam de forma incorreta adubos e produtos químicos para a manutenção de seus plantios e lavouras. Mesmo com essas adversidades, a agricultura resiste e as famílias vivem do trabalho do campo.

O desenvolvimento econômico rural, acontece de forma lenta e trabalhosa por parte dos agricultores. A comercialização dos produtos produzidos na terra é realizada periféricamente, quase que exclusivamente local, veja [38]. Mesmo existindo diversas potencialidades capazes de incentivar o desenvolvimento da região através dos recursos naturais e das diversidades culturais, os vales possui uma economia voltada para o setor primário³¹, com isso é preciso uma melhor organização do comércio rural para que haja uma competitividade e expansão para outros mercados. Esse crescimento do mercado se faz necessário, pois a produção originada da agricultura é voltada para o próprio consumo e o excedente é vendido em feiras locais, ou comercializado com atravessadores.

³¹O setor primário é entendido como um o conjunto de atividades econômicas que extraem e transformam a matéria-prima, ou seja, transformam os recursos naturais em produtos primários. As atividades importantes neste setor incluem agricultura, a pesca, a pecuária e a mineração em geral.

Depois dos anos 80, as organizações sociais do meio rural fortaleceram as experiências de incentivo à produção, de desenvolvimento da política e cultura. Parando para pensar nos problemas causados devido ao tradicionalismo e costumes do uso da terra, surgiu a necessidade do homem do campo de participar de ações que ajudassem ao desenvolvimento rural, permitindo melhorar os programas e as demandas sociais ampliando os recursos disponíveis do governo para a região dos vales.

6.2 Programas Rurais

Em todo território nacional existem programas voltados para o meio rural, são alguns deles: Programa Arca das Letras, Programa Desenvolvimento Sustentável-DRS, Programa Desenvolvimento Sustentável da Agricultura, Programa de Apoio ao Desenvolvimento do Setor Agropecuário, Programa de Assistência Técnica e Desenvolvimento Rural na Agricultura Familiar, Programa de Educação Ambiental para Sociedades Sustentáveis, Programa Banco da Terra, Crédito Fundiário, e etc.

Existem programas do governo atuando nos vales do Jequitinhonha e Mucuri, como o Programa Banco da Terra, Crédito Fundiário, Minas sem Fome, entre outros, porém os programas não são suficientes para resolver todos os problemas da região, [1]. A região dos vales é vista com imagens sofridas, como um povo pobre e desamparado pelos governantes. Entre algumas famílias de baixa renda dos vales, a principal fonte de renda provém de políticas públicas, como por exemplo, o Bolsa Família³², outras fontes de renda seria aposentadorias, pensões, serviços voltados a agricultura ou não.

Dessa forma, os programas rurais não se apresentam como uma forma de resolver todos os problemas da região, mas sim como forma de amenizar parte dos problemas.

6.3 Associações

Pode-se entender por associação um conjunto de pessoas que possuem um objetivo comum. Nos vales existem algumas associações, como por exemplo, a ARMICOPA³³, uma sociedade civil sem fins lucrativos formada por outras associações de agricultores, de mesma natureza jurídica afiliada a ela. A ARMICOPA é situada no município de Teófilo Otoni

³²O Bolsa Família é um programa do governo de transferência direta de renda por parte do governo que beneficia famílias com renda mensal baixa por pessoa de até R\$120,00.

³³Associação Regional Mucuri de Cooperação de Pequenos Agricultores.

localizado no nordeste do Estado de Minas Gerais, correspondente ao vale do Mucuri, onde esta associação desempenha trabalhos voltados a agricultura.

As associações de produtores rurais é uma organização civil formada por famílias de produtores rurais. Essas associações tem por objetivo disseminar o desenvolvimento de ações que beneficiam a comunidade que as formam. A associação em conjunto, realiza compras de maquinas, equipamentos em geral, animais para o uso de todos, constroem galpões de uso de todos, realizam embalagem de produtos rurais, proporcionam o comércio, trabalham com artesanatos realizados pelas famílias dos agricultores, reivindicam apoio ao Governo, e etc.

Estas associações, cooperativas³⁴ e sindicatos³⁵, possuem uma constituição e funcionamentos diferenciados, mas são todas voltadas para a ajuda mútua da comunidade, veja [2]. As associações trazem algumas vantagens para os produtores rurais, facilitando a assistência técnica para a melhoria da produção, gerando mais produtividade; ajuda na utilização de bens que não são fáceis de se adquirir individualmente; com melhores resultados de produção, as associações incentivam o mercado interno nas regiões; proporciona oportunidades de emprego, ajudando a melhorar a renda das famílias de agricultores; incentiva também a permanência do homem no campo.

Criado a associação, é formada uma diretoria, composta por presidente, secretário, tesoureiro e suplentes. Então é realizada assembleias onde são tomadas as decisões importantes em prol das famílias dos agricultores rurais.

6.4 Recursos e Investimento para o Produtor Rural

Como já foi mencionado, o produtor rural recebe alguns incentivos por parte do governo através de programas rurais, tais recursos tende a proporcionar um melhor desenvolvimento da agricultura. Mesmo com ajuda do governo, e com o amparo das associações, cooperativas e sindicatos o produtor rural acaba retirando seus recursos de subsistência basicamente da terra, veja [2].

Quando se retrata a figura do produtor rural é abordado todos os níveis de produtores rurais, desde aqueles com uma simples horta perto de sua casa a grandes vendedores de produtos

³⁴Uma organização de tipo associativo que desenvolve ações nos campos social e econômico. É formado por uma sociedade de pessoas e não de capital visando lucro.

³⁵O sindicato é uma associação que reúne pessoas de um mesmo segmento econômico ou trabalhista visando lucro.

originados da terra. Nesta perspectiva encontra-se famílias agrícolas³⁶, famílias não agrícolas³⁷ e famílias pluriativas³⁸. Nem todos os membros de famílias de agricultores nos vales do Jequitinhonha e Mucuri, veja [2], estão inseridos diretamente na atividade do campo.

Os produtores rurais recorrem a investimentos oriundos, por exemplo, de programas do governo e utilizam esse dinheiro para dar desenvolvimento em suas atividades agrícolas. Então, com o apoio dos sindicatos, associações, cooperativas, ou outros, esses produtores obtém certo retorno financeiro com a venda de seus produtos, ou mesmo com o consumo próprio economizando assim de comprar em outros lugares. Dessa forma, o produtor rural consegue manter o ciclo de sua produção, pega dinheiro emprestado dos programas rurais, obtém seus produtos, paga o que deve e se mantém ativo em suas atividades no meio rural.

6.5 Outras Alternativas de Investimentos

Investir na atividade agrícola, faz com que o produtor rural confie no bom preço dos produtos para poder vender. Seus produtos oriundos do trabalho rural é como qualquer outro ativo financeiro, sofre riscos de variações nos preços. Essa variação de preços está ligado a diversos fatores, como exemplo, o clima. Em certos períodos do ano, pode ocorrer mudanças no clima, causando assim secas, geadas, alagamentos, entre outras causas, afetando de forma direta no preço dos produtos agrícolas.

Caso haja alguma interferência no ganho monetário em relação aos produtos agrícolas, ou seja, a perda total ou parcial das lavouras ou dos animais, como exemplo, a criação de aves, suínos, bovinos e outros, o produtor rural recorre algum de tipo de seguro rural³⁹. No entanto, nem todos os produtores possuem alguma forma de seguro, então não há recuperação do capital investido, tendo assim um prejuízo financeiro e material.

Dessa forma, é proposto aqui uma alternativa de investimento que possa amenizar possíveis perdas para o produtor rural, não somente amenizar como também ser uma fonte de investimento para desenvolver a produção no meio rural. A alternativa é voltada para o mercado financeiro, é preciso se deixar claro que o objetivo não é retirar o produtor rural do seu meio de trabalho, mas sim lhe proporcionar novas formas de se obter ganhos financeiros e incentivos a sua produção.

³⁶Todos os membros da família exercem atividades principais voltadas à agricultura pecuária.

³⁷Quando as atividades principais dos membros das famílias não são voltadas à ocupação agropecuária.

³⁸Quando pelo menos um trabalhador da família exerça uma ocupação não agrícola.

³⁹Protege o produtor contra perdas causadas por fenômenos da natureza e outras causas que levem a perda do valor de seus produtos, até o limite máximo de indenização contratado.

Como transcorrido ao longo da dissertação, o modelo de Black – Scholes e Binomial pode ser utilizado para precificar opções. O produtor rural pode utilizar desses modelos para gerir ganhos na bolsa de valores, assim como outras aplicações no mercado financeiro. Pode também, comprar ações de empresas e participar dos lucros da mesma. Parte dos ganhos obtidos com esses investimentos financeiros, podem retornar para o campo em momentos difíceis na produção, minimizando assim perdas maiores. Também, o produtor rural, pode retirar parte de seus ganhos obtidos nas vendas, por exemplo, nas feiras e aplicar mensalmente uma cota nos mercados financeiros, com isso é possível se ter uma outra fonte de renda em andamento. Vale ressaltar, que as associações, sindicatos e cooperativas não estimulam outras alternativas de investimento para o produtor rural, sendo necessário uma abordagem nessa temática voltada para beneficiar famílias que sofrem com falta de recursos próprio para gerir seus empreendimentos.

Utilizar contratos de opções de compra e venda, aplicados através dos modelos de Black – Scholes e Binomial, pode-se tornar uma alternativa viável para quem deseja tornar um pequeno empreendimento em um agronegócio de sucesso. Os vales do Jequitinhonha e Mucuri possuem recursos naturais capazes de levar pequenos produtores no campo a serem grandes produtores, basta se ter uma boa gestão dos recursos aplicado a produção. De acordo com [1] e [29], a região dos vales apresentam um baixo IDH⁴⁰, então uma proposta onde se faz uma aproximação do produtor do campo aos mercados financeiros pode ser vista com repúdio. A desvantagem que pode ocorrer, caso haja a prática de investimento financeiro pelo produtor, é a má gestão de seus recursos por falta de entendimento técnico. Na seção 7, é apresentado argumentos que podem facilitar esse entendimento de aplicação de recursos nos mercados. Num primeiro olhar, pode ser interpretado que se precisa ter vastas somas em dinheiro para poder aplicar qualquer investimento na bolsa de valores, este fato é desmistificado na seção 7 que leva a elaboração de uma cartilha voltada para o produtor rural e demais interessados em investir em uma nova alternativa de ganhos financeiros.

⁴⁰Índice de Desenvolvimento Humano, medida importante proposta pela ONU - Organização das Nações Unidas para avaliar a qualidade de vida e o desenvolvimento econômico de uma determinada população.

7 BOLSA DE VALORES: Alternativa de Investimento para os Produtores Rurais

Como ressaltado na introdução, a falta de conhecimento das pessoas físicas sobre investimentos na Bolsa de Valores, se deve a princípio a ausência de informações a respeito de como investir corretamente. No entanto, é viável que o produtor rural tenha conhecimento da bolsa de valores do estado de São Paulo, à BM&FBOVESPA, que é uma empresa que administra mercados organizados de Títulos, Valores Mobiliários, Contratos Futuros, Opções, Ações e Contratos Derivativos. Através dela, é possível se fazer grandes ou pequenos investimentos nos mercados financeiros.

Para se obter lucro, o produtor rural não precisa investir vastas somas de dinheiro, mas sim ter um conhecimento a respeito dos mercados e saber com que tipo de investimento está lidando. É necessário que se tenha uma boa corretora⁴¹ ao seu dispor, para que se tenha um controle do dinheiro, ou seja, para que o investimento não sofra grandes riscos de perdas. Dessa forma, o produtor não precisa saber tudo sobre os mercados, ser um especialista, mas sim ter um apoio técnico suficiente para poder investir corretamente.

Investindo, e tendo um conhecimento prévio dos mercados, a garantia dos lucros é certa. Como a região dos vales é carente de recursos financeiros, a longo prazo, para quem investe pequenas quantias, os retornos são significativos, porém o investidor deve fazer um acompanhamento junto com sua corretora. Nas chamadas altas e baixas dos mercados, ou seja, quando o preço de alguns derivativos abaixam ou sobem seus valores, o investidor terá que tomar sábias escolhas para que seu capital não sofra perdas junto à essas oscilações. A ideia não é aprender perdendo dinheiro, mas sim ganhando dinheiro, podendo ocorrer posteriormente uma melhoria no investimento do meio rural.

O homem do campo não precisa ser um expert em investir, basta encontrar uma corretora do seu interesse e abrir uma conta, ou seja, fechar um contrato com a corretora para que ela trabalhe de acordo com interesse de cada um. Acompanhar seus investimentos junto com a corretora e os mercados, proporcionará uma alternativa de ganhos significativos para quem deseja ter outra fonte de renda, assim o homem do campo com grandes ou pequenas produções rurais terá um amparo financeiro em momentos de baixas na produção, ou mesmo podendo aumentar sua produção em escala comercial.

⁴¹Corretora de valores é uma pessoa jurídica auxiliar que intermedia a compra e venda de títulos financeiros para seus clientes e faz vários tipos de investimentos na Bolsa de Valores.

Devido a essas dúvidas primárias que existem sobre investimentos, esta dissertação apresenta nos anexos em forma de cartilha um passo a passo, com algumas informações úteis para o produtor rural iniciar algum investimento nos mercados de ações, opções, fundos e etc., não somente o produtor, mas qualquer pessoa interessada em iniciar uma aplicação na bolsa de valores. Aplicações dos modelos de Black – Scholes e Binomial podem ser melhor entendidas realmente na prática por qualquer indivíduo disposto a investir. Nessa cartilha será esclarecido alguns termos técnicos utilizados nos mercados, apresentando de forma simples informações que ajudarão os produtores rurais dos vales do Jequitinhonha e Mucuri a entender como iniciar seus investimentos.

8 SIMULAÇÃO

Nessa simulação foi usada valores de ações de empresas como sendo o ativo subjacente à opção. Em primeiro momento, utilizou-se o cálculo analítico do modelo de Black – Scholes para calcular o valor de uma opção de compra e venda. Depois, utilizou-se o algoritmo do modelo Binomial para calcular o valor do prêmio de uma opção de compra e venda. E por último uma comparação do prêmio da opção calculado por Black – Scholes e Binomial em relação a variação da taxa de juros e da volatilidade.

8.1 Códigos das Ações

Existem basicamente dois tipos de ações, as ordinárias e as preferenciais, conforme [28]. As ações ordinárias são representadas pela sigla ON. Estas ações dão aos acionistas, aqueles que detêm a posse das ações, o direito de voto nas assembleias dentro da empresa e a participação não preferencial nos resultados das empresas. Já as ações preferenciais, são representadas pela sigla PN, e concedem prioridades aos acionistas. Nesse caso, os acionistas possuem direito nos dividendos e no reembolso do capital da empresa, porém não possuem o direito de voto nas assembleias. As ações preferenciais se subdividem em classes A, B, C e D. Neste caso as classes também são representadas por siglas sendo PNA, PNB, PNC e PND. Para maiores detalhes de cada classe é fundamental consultar a empresa, pois cada empresa em específico pode tratar essas classes de maneira diferenciada.

No mercado financeiro essas ações são negociadas na Bolsa de Valores. Ao fazer uma pesquisa do valor de uma ação de uma determinada empresa, encontra-se a ação correspondente em códigos. Os códigos possuem 4 letras maiúsculas que fornecem abreviadamente o nome da empresa, mas essa quantidade de letras pode variar conforme a empresa queira, e o número que representa o tipo da ação, conforme pode ser visto em [9].

- O número 1 representa o direito de subscrição⁴² de uma ação ordinária. Exemplo é o código PETR1, referente ao direito de subscrição da ação ordinária da Petrobrás PETR3;

⁴²É o direito de preferência do acionista para adquirir novas ações de uma companhia, numa dada porcentagem das que possui.

- O número 2 representa o direito de subscrição de uma ação preferencial. Exemplo é o código BBDC2, referente ao direito de subscrição da ação preferencial do Banco do Bradesco BBDC4;
- O número 3 representa as ações ordinárias de uma empresa. Exemplo é o código NATU3, referente à empresa Natura Cosméticos S.A.;
- O número 4 representa as ações preferenciais de uma empresa. Exemplo é o código BBDC4, referente às ações do Banco Bradesco;
- O número 5 representa as ações preferenciais de classe A de uma empresa. Exemplo é o código VALE5, referente à empresa da Vale;
- O número 6 representa as ações preferenciais classe B de uma empresa. Exemplo é o código CPLE6, referente à empresa Companhia Paranaense de Energia;
- O número 7 representa as ações preferenciais de classe C. Exemplo é o código TMAC7 da empresa Amazônia Cel.;
- O número 8 representa as ações preferenciais de classe D. Exemplo é o código BRGE8 da empresa Consórcio Alfa de Administração S.A.;
- O número 9 representa os recibos de subscrição⁴³ das ações ordinárias. Exemplo é o código BRBRGEACNPA9 da empresa Consórcio Alfa de Administração S.A.;
- O número 10 representa os recibos de subscrição das ações preferenciais. Não é comum encontrar ações usando esse número em seus códigos;
- O número 11 não representa nenhuma regra específica para a ação ser negociada. Este número representa os recibos de ações de empresas estrangeiras negociadas na bolsa brasileira. Também representam os ativos compostos por mais de um tipo de ação. Não é comum encontrar ações usando esse número em seus códigos.

8.2 Precificação das Opções via Modelo Black – Scholes

O interesse é em saber qual o melhor valor a se pagar por uma opção do tipo europeia de compra ou venda em uma transação. Suponha a seguinte situação no cálculo analítico desse valor usando as equações (4.38) e (4.39) e dados encontrados em [9], referente ao mês de abril de 2016.

Considere o preço corrente de uma ação ordinária PETR3 da Petrobrás, suponha-se seis meses antes do vencimento do contrato de uma opção. O preço da ação no mercado está em R\$

⁴³É um registro que comprova que o direito de subscrever ações foi exercido pelo seu titular.

10,53. O preço de exercício da opção é de R\$ 11,00. Já a taxa de juros livre de riscos vigente no mercado, referente à taxa Selic⁴⁴, é de 14,15% a.a. e a volatilidade da ação no mercado é de 81,17% a.a. E o tempo de 0,5 anos. Então, segue os seguintes parâmetros,

$$S = 10,53 \quad E = 11,00 \quad r = 0,1415 \quad \sigma = 0,8117 \quad T - t = 0,5$$

Primeiro é preciso calcular (4.36), (4.37) e $e^{-r(T-t)}E$, usando uma aproximação com quatro casas decimais:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{10,53}{11}\right) + \left(0,1415 + \frac{0,8117^2}{2}\right)(0,5)}{0,8117\sqrt{(0,5)}} = 0,3772$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{10,53}{11}\right) + \left(0,1415 - \frac{0,8117^2}{2}\right)(0,5)}{0,8117\sqrt{(0,5)}} = -0,1968$$

$$e^{-r(T-t)}E = e^{-0,1415(0,5)}11 = 10,2486.$$

Substituindo esses valores em (4.38) e (4.39), segue,

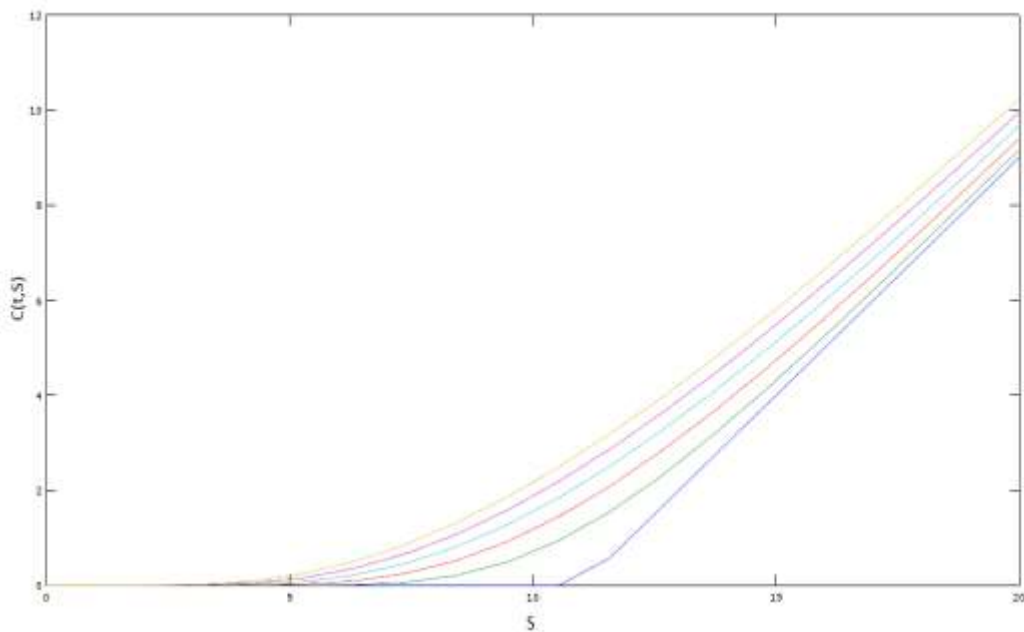
$$C(t, S) = 10,53N(0,3772) - 10,2486N(-0,1968)$$

$$V(t, S) = 10,2486N(0,1968) - 10,53N(-0,3772).$$

Para encontrar os valores de $N(d_1)$ e $N(d_2)$ pode-se consultar uma tabela com probabilidades acumuladas da função de distribuição normal padronizada, ou utilizar a função `distnormp` do *software* Excel (distribuição cumulativa normal padrão), portanto obtém-se:

$$\begin{cases} C(t, S) = 2,49 \\ V(t, S) = 2,21 \end{cases}$$

⁴⁴A taxa Selic é conhecida como taxa básica de juros da economia brasileira. É a menor taxa de juros da economia brasileira e serve de referência para a economia brasileira.

Gráfico 1: Valor da opção de compra em vários momentos.

Fonte: Autor.

Considere para fins de ilustração os valores e os parâmetros da ação ordinária PETR3 da Petrobrás, e para valores de S a variar entre $S_0 = 0$ e $S_t = 20$, obtém-se o gráfico 1, que representa os valores da opção $C(t, S)$ se aproximando da maturidade. Quando o valor do ativo aumenta o valor da opção de compra tende a aumentar, e quando a data de vencimento da opção está próxima da maturidade o valor da opção tende a cair.

Desta forma, considerando-se que o preço de exercício da opção no momento é de R\$ 11,00, para que o comprador da opção de compra não tenha lucro ou prejuízo, a ação deveria estar em R\$ 13,49 (R\$ 11 + R\$ 2,49), ou seja, a ação deveria subir R\$ 2,96 (R\$ 13,49 – R\$ 10,53). Se no mercado a ação estiver valendo R\$ 15,00 o comprador terá um lucro de (R\$ 15 – R\$ 13,49), ou seja, R\$ 1,51.

Analogamente, para que o comprador da opção de venda não tenha lucro nem prejuízo, o valor da ação no mercado deveria ser de R\$ 8,79 (R\$ 11 – R\$ 2,21), ou seja, ela deveria cair R\$ 1,74 (R\$ 10,53 – R\$ 8,79). Se no mercado a ação estiver valendo R\$ 7,00 o vendedor terá um lucro de [R\$ 11 – (R\$ 9,21 = R\$ 7 + R\$ 2,21)], ou seja, R\$ 1,79.

Existem planilhas no software Excel que realizam todos os cálculos das equações (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39), e algoritmos implementados em outros softwares.

8.3 Prêmio das Opções e as Variáveis do Modelo de Black - Scholes

Segundo o modelo de Black – Scholes, as variáveis que afetam os prêmios das opções são: o preço do ativo subjacente S , o preço de exercício E , a volatilidade anualizada do preço do ativo σ , o tempo até o vencimento da opção $T - t$, e a taxa de juros do mercado financeiro r . Cada variável desta, afeta de forma significativa o preço da opção de compra ou de venda. É importante analisar sobre o que acontece graficamente com o valor do prêmio em função dessas variáveis.

8.3.1 Prêmio da Opção e o Ativo Objeto

O valor da opção flutua diretamente proporcional ao valor do ativo objeto, conforme [25]. Olhando para o valor da opção de compra, quanto maior o valor do ativo objeto, maior será o preço da opção. O preço do ativo é de extrema importância para se definir o valor da opção.

Considere o ativo sendo a ação preferencial BBDC4 do Banco do Bradesco, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 29,60 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 64,51% a.a., com uma taxa de juros de 14,15% a.a. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção e um preço de exercício de R\$ 33,00. Fazer o valor do ativo variar de R\$ 1,00 para mais e para menos para observar o comportamento no gráfico. Observe a tabela a seguir com os valores de compra e venda, gerado com as equações (4.38) e (4.39).

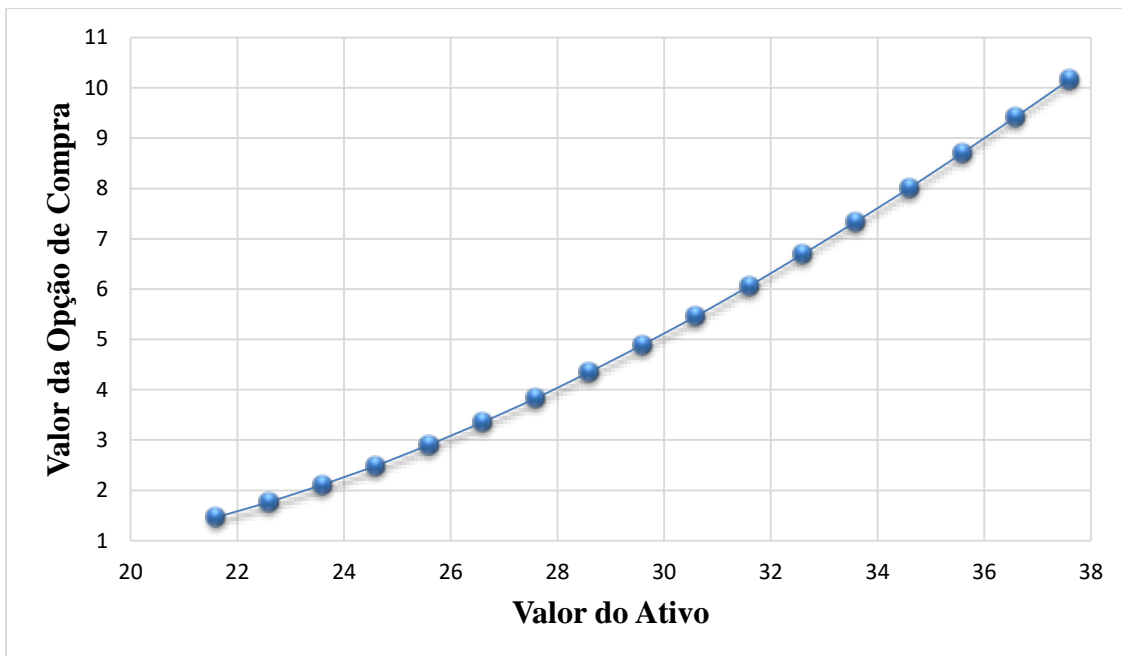
Tabela 3: Variações do preço do Ativo Objeto.

S	E	σ	r	$(T - t)$	C	V
R\$ 21,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,46	R\$ 10,60
R\$ 22,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,77	R\$ 9,91
R\$ 23,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,11	R\$ 9,26
R\$ 24,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,49	R\$ 8,64
R\$ 25,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,91	R\$ 8,05
R\$ 26,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,35	R\$ 7,50
R\$ 27,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,83	R\$ 6,98
R\$ 28,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,35	R\$ 6,49
R\$ 29,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,89	R\$ 6,04

R\$ 30,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 5,46	R\$ 5,61
R\$ 31,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 6,06	R\$ 5,21
R\$ 32,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 6,69	R\$ 4,83
R\$ 33,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 7,34	R\$ 4,48
R\$ 34,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 8,01	R\$ 4,16
R\$ 35,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 8,71	R\$ 3,86
R\$ 36,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 9,43	R\$ 3,58
R\$ 37,60	R\$ 33,00	64,51% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 10,17	R\$ 3,32

Fonte: Autor.

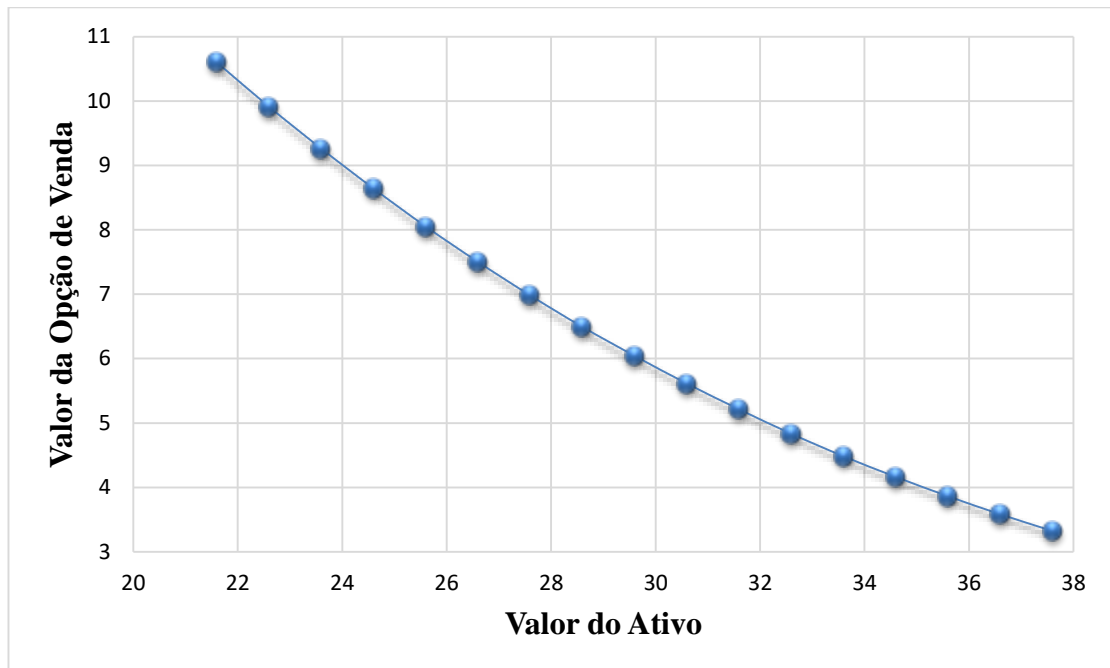
Gráfico 2: Variação da Opção de Compra em função da variação do Valor do Ativo.



Fonte: Autor.

Conforme o valor do ativo aumenta, o valor da opção de compra aumenta. Observe que se o valor do ativo for zero tem-se o valor da opção sendo zero. E caso o valor de mercado do ativo esteja muito alto o valor do contrato de opção a ser pago por ele também será muito alto.

Gráfico 3: Variação da Opção de Venda em função da variação do Valor do Ativo.



Fonte: Autor.

Conforme o valor do ativo aumente, o valor da opção de venda diminui, pois o investidor torce pela queda do preço do ativo no mercado. Se acontecer do valor do ativo ser muito grande, o valor da opção de venda será zero, pois para um investidor não é lucro comprar um ativo com um valor muito alto no mercado e vendê-lo por um valor menor de acordo com o contrato acordado.

8.3.2 Prêmio da Opção e o Preço de Exercício

Se um contrato de opção de compra ou venda for exercido na data de maturidade, o valor de exercício E é que se será o acordado. O preço de exercício afeta o valor do prêmio de uma opção numa relação inversamente proporcional, veja [28].

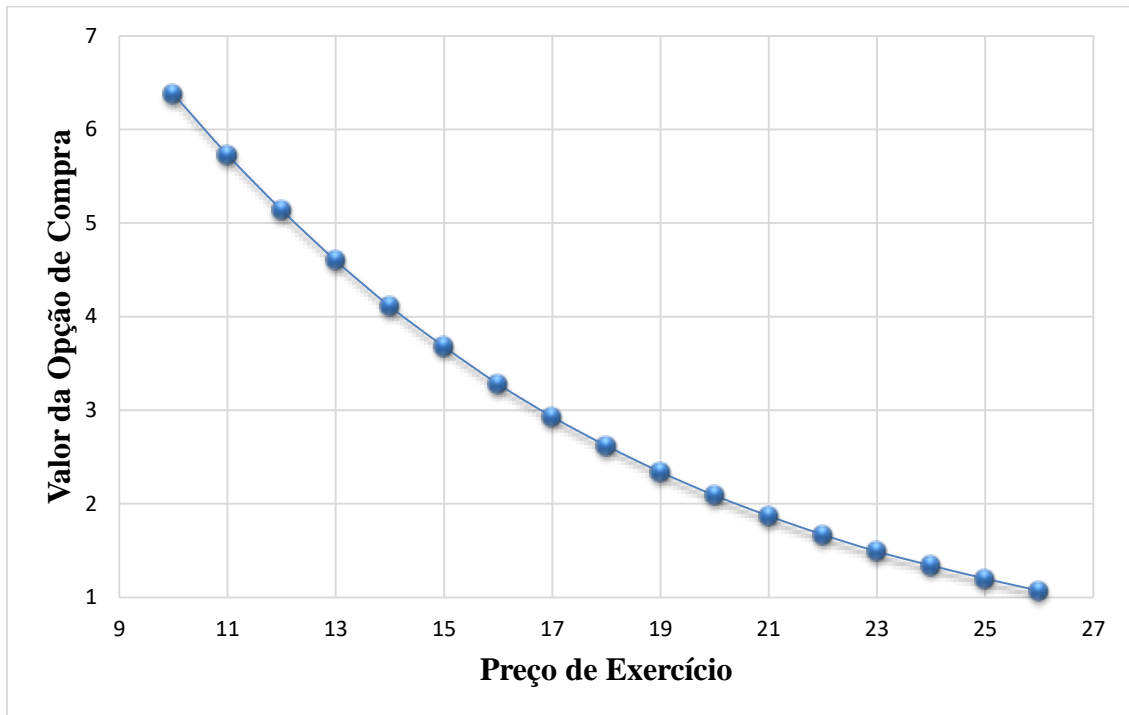
Considere o ativo sendo a ação preferencial de classe A, VALE5 da empresa Vale, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 15,03 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 77,23% a.a., com uma taxa de juros de 14,15% a.a. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção. Supondo um valor de exercício de R\$ 18,00 e que ele varie em um real pra mais e para menos. Observe a tabela a seguir com os valores de compra e venda, gerado com as equações (4.38) e (4.39).

Tabela 4: Variações do preço de Exercício.

<i>S</i>	<i>E</i>	σ	<i>r</i>	$(T - t)$	<i>C</i>	<i>V</i>
R\$ 15,03	R\$ 10,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 6,38	R\$ 0,66
R\$ 15,03	R\$ 11,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 5,73	R\$ 0,95
R\$ 15,03	R\$ 12,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 5,14	R\$ 1,29
R\$ 15,03	R\$ 13,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,60	R\$ 1,68
R\$ 15,03	R\$ 14,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,11	R\$ 2,13
R\$ 15,03	R\$ 15,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,68	R\$ 2,62
R\$ 15,03	R\$ 16,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,28	R\$ 3,16
R\$ 15,03	R\$ 17,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,93	R\$ 3,74
R\$ 15,03	R\$ 18,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,62	R\$ 4,36
R\$ 15,03	R\$ 19,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,34	R\$ 5,01
R\$ 15,03	R\$ 20,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,09	R\$ 5,69
R\$ 15,03	R\$ 21,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,87	R\$ 6,40
R\$ 15,03	R\$ 22,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,67	R\$ 7,14
R\$ 15,03	R\$ 23,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,49	R\$ 7,89
R\$ 15,03	R\$ 24,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,34	R\$ 8,67
R\$ 15,03	R\$ 25,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,20	R\$ 9,46
R\$ 15,03	R\$ 26,00	77,23% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 1,07	R\$ 10,27

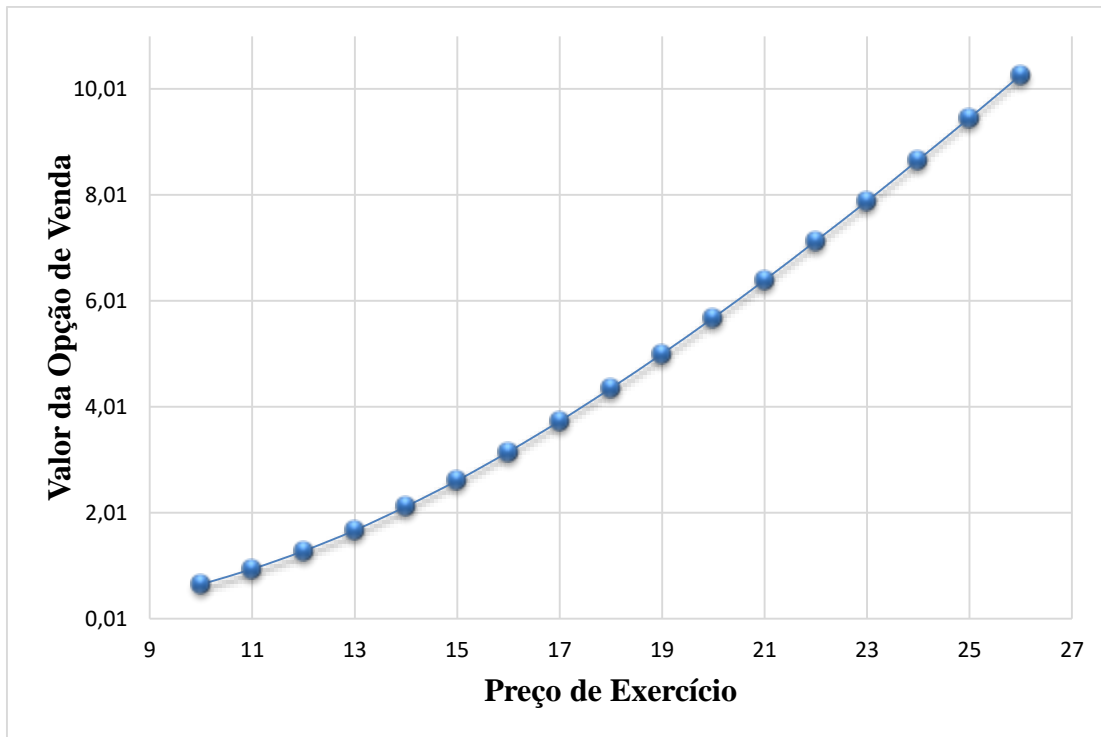
Fonte: Autor.

Gráfico 4: Variação da Opção de Compra em função da variação do Preço de Exercício.



Fonte: Autor.

Observe o gráfico acima, quando o valor do preço de exercício for maior que R\$ 15,00, o investidor não possuirá ganhos. Se o preço de exercício for muito alto a opção não será exercida.

Gráfico 5: Variação da Opção de Venda em função da variação do Preço de Exercício.

Fonte: Autor.

No mercado quanto maior o preço de exercício melhor será para o investidor, assim o preço da opção de venda tende a aumentar. Caso o preço de exercício seja muito pequeno, o valor da opção de venda não terá valor.

8.3.3 Prêmio da Opção e o Tempo

O tempo de vencimento do contrato da opção é entendido como a data até o comprador ou vendedor poder exercer seu direito de acordo com o preço de exercício. Então, quanto mais distante no tempo estiver à data de exercício da opção, maior será o valor do prêmio, como pode ser visto em [28]. O tempo é importante para se avaliar o valor de uma opção, pois conforme o tempo passa, o valor da opção tende a diminuir.

Considere o ativo sendo a ação preferencial de classe B, CPLE6 da Companhia Paranaense de Energia, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 27,68 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 71,66% a.a., com uma taxa de juros de 14,15% a.a. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção e que ele varie 0,1 anos para mais e para menos.

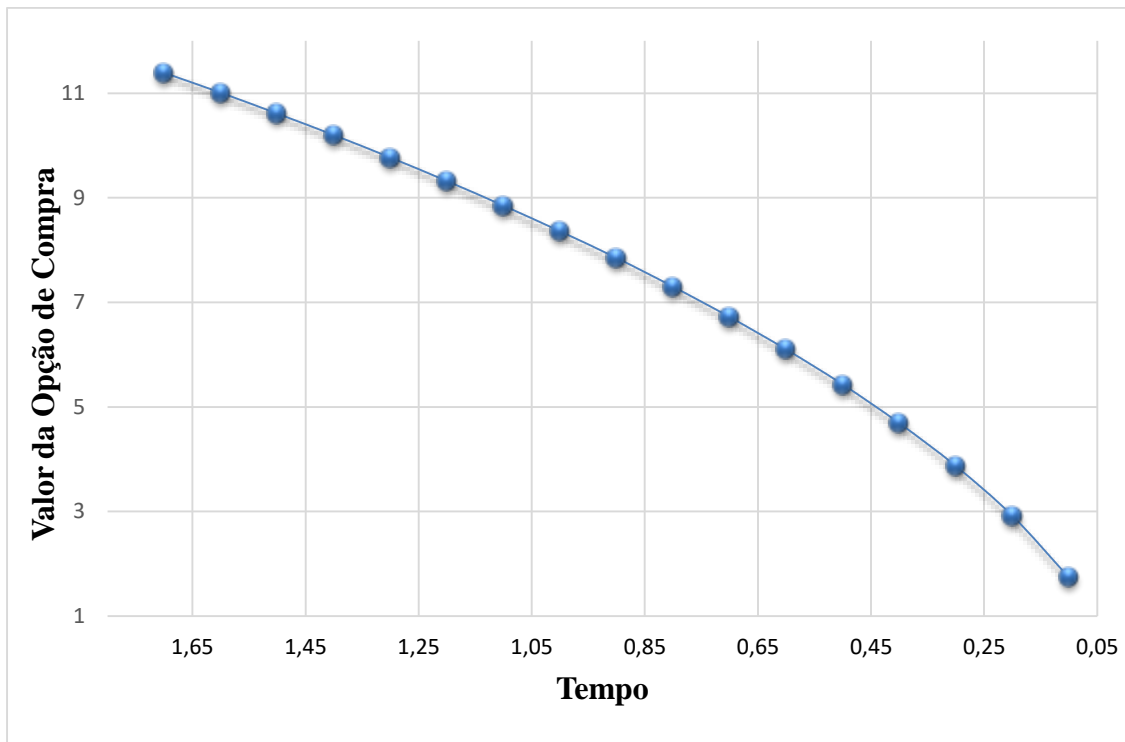
Supondo um valor de exercício de R\$ 30,00. Observe a tabela a seguir com os valores de compra e venda, gerado com as equações (4.38) e (4.39).

Tabela 5: Variações no Tempo.

S	E	σ	r	$(T - t)$	C	V
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,1 anos	R\$ 1,74	R\$ 3,64
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,2 anos	R\$ 2,92	R\$ 4,41
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,3 anos	R\$ 3,87	R\$ 4,95
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,4 anos	R\$ 4,69	R\$ 5,36
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 5,43	R\$ 5,70
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,6 anos	R\$ 6,10	R\$ 5,98
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,7 anos	R\$ 6,72	R\$ 6,21
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,8 anos	R\$ 7,30	R\$ 6,41
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	0,9 anos	R\$ 7,85	R\$ 6,58
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1 ano	R\$ 8,36	R\$ 6,72
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,1 anos	R\$ 8,85	R\$ 6,85
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,2 anos	R\$ 9,32	R\$ 6,96
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,3 anos	R\$ 9,77	R\$ 7,05
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,4 anos	R\$ 10,20	R\$ 7,13
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,5 anos	R\$ 10,61	R\$ 7,19
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,6 anos	R\$ 11,01	R\$ 7,25
R\$ 27,68	R\$ 30,00	71,66% a.a.	14,15% a.a.	1,7 anos	R\$ 11,39	R\$ 7,30

Fonte: Autor.

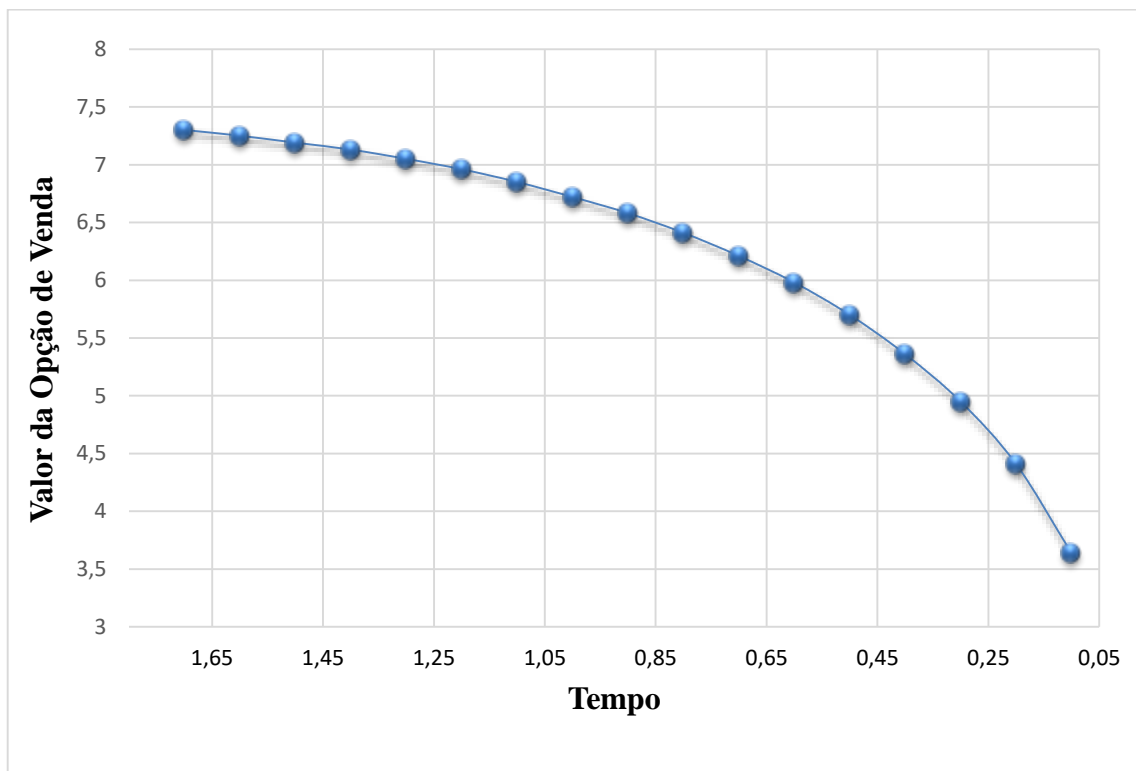
Gráfico 6: Variação da Opção de Compra em função da variação do Tempo.



Fonte: Autor.

No gráfico 6, de maneira que o tempo aumenta o valor da opção de compra também aumenta. Quando a data de vencimento da opção está próxima da maturidade o valor da opção tende a cair.

Gráfico 7: Variação da Opção de Venda em função da variação do Tempo.



Fonte: Autor.

Com a opção de venda não é diferente, quanto mais longe está da data de maturidade mais caro é a opção de venda. Assim, quando o tempo passa o valor da opção de venda diminui de forma depreciativa.

Ao observar de acordo com a tabela 5, que as opções que estão com o valor de exercício acima do preço de mercado da ação, interessam somente o investidor em um contrato de opção de venda. Porém, para um contrato de opção de compra, observa-se que ao aproximar da data de vencimento, é pouco provável que as ações da empresa tenham um aumento significativo de um dia para o outro, fazendo com que a opção não seja exercida.

8.3.4 Prêmio da Opção e a Volatilidade

A volatilidade influencia na mudança dos preços dos ativos, e cada ativo possui sua volatilidade no mercado. Dos fatores que influenciam o valor da opção a volatilidade é o mais difícil de medir.

É interessante compreender que os preços das opções podem aumentar com a volatilidade, e isso é devido ao aumento da volatilidade no preço do ativo. Com isto, o valor do ativo pode ultrapassar o valor de exercício da opção de uma opção de compra. Os valores das opções de venda podem subir devido à volatilidade dos ativos objetos. Assim, se ocorrer de uma queda do preço dos ativos, quando houver a diferença entre o preço de exercício e o valor do ativo, com isso o valor da opção de vende será mais elevado.

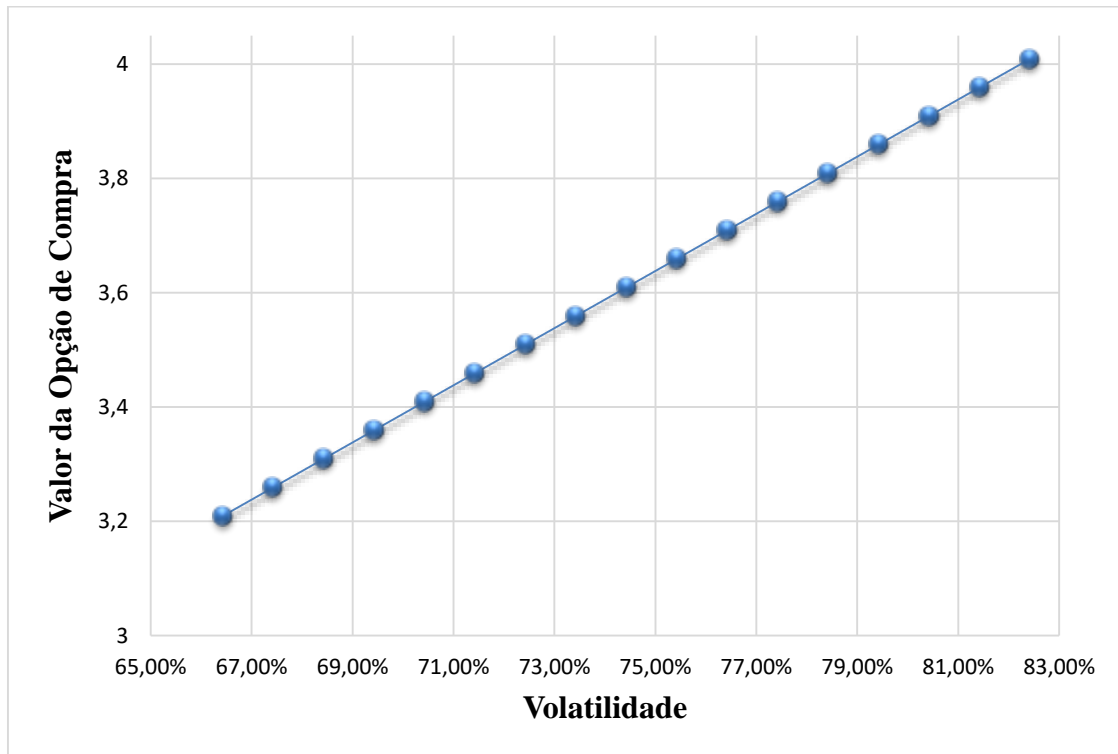
Considere o ativo sendo a ação ordinária, VALE3 da empresa Vale, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 18,20 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 74,43% a.a., e suponha que sua volatilidade varia de 1% para mais e para menos. Com uma taxa de juros de 14,15% a.a. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção. Supondo um valor de exercício de R\$ 20,00. Observe a tabela a seguir com os valores de compra e venda, gerado com as equações (4.38) e (4.39).

Tabela 6: Variações da Volatilidade.

S	E	σ	r	$(T - t)$	C	V
R\$ 18,20	R\$ 20,00	66,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,21	R\$ 3,64
R\$ 18,20	R\$ 20,00	67,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,26	R\$ 3,69
R\$ 18,20	R\$ 20,00	68,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,31	R\$ 3,74
R\$ 18,20	R\$ 20,00	69,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,36	R\$ 3,79
R\$ 18,20	R\$ 20,00	70,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,41	R\$ 3,84
R\$ 18,20	R\$ 20,00	71,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,46	R\$ 3,89
R\$ 18,20	R\$ 20,00	72,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,51	R\$ 3,94
R\$ 18,20	R\$ 20,00	73,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,56	R\$ 3,99
R\$ 18,20	R\$ 20,00	74,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,61	R\$ 4,04
R\$ 18,20	R\$ 20,00	75,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,66	R\$ 4,09
R\$ 18,20	R\$ 20,00	76,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,71	R\$ 4,14
R\$ 18,20	R\$ 20,00	77,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,76	R\$ 4,19
R\$ 18,20	R\$ 20,00	78,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,81	R\$ 4,24
R\$ 18,20	R\$ 20,00	79,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,86	R\$ 4,29
R\$ 18,20	R\$ 20,00	80,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,91	R\$ 4,34
R\$ 18,20	R\$ 20,00	81,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,96	R\$ 4,39
R\$ 18,20	R\$ 20,00	82,43% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,01	R\$ 4,44

Fonte: Autor.

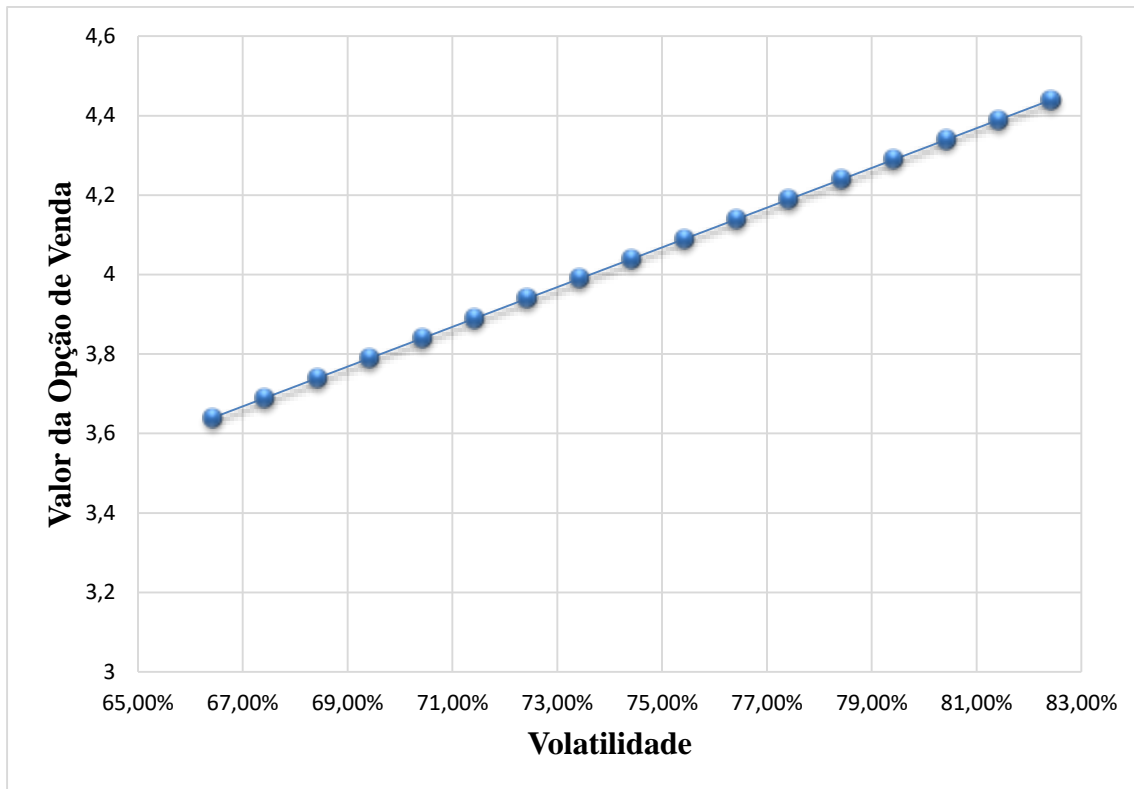
Gráfico 8: Variação da Opção de Compra em função da variação da Volatilidade.



Fonte: Autor.

No gráfico 8, a relação entre a volatilidade e o prêmio de uma opção é praticamente linear. O valor da volatilidade é associado ao preço de alguma mercadoria, derivativos, de forma que seja a variação do preço referente a um desvio padrão de média expressa em porcentagem em um determinado período de tempo.

Pelo gráfico, de forma que a volatilidade aumenta o valor da opção de compra tende a aumentar, e de forma que a variância diminui o valor da opção de compra também diminui.

Gráfico 9: Variação da Opção de Venda em função da variação da Volatilidade.

Fonte: Autor.

O comportamento de uma opção de venda em relação à volatilidade do ativo, é análogo ao da opção de compra.

8.3.5 Prêmio da Opção e a Taxa de Juros

A taxa de juros afeta diretamente no preço das opções. Quando a taxa de juros sobe no mercado o preço do ativo objeto tende a aumentar, proporcionando um acréscimo no preço da opção de compra. Por outro lado, se o preço do ativo subir com o aumento da taxa de juros, ocorre uma queda no valor da opção de venda. Como a taxa de juros está ligada com o valor das opções, quando há oscilações no mercado a opção oscila na mesma direção, mantendo inalteradas as outras variáveis.

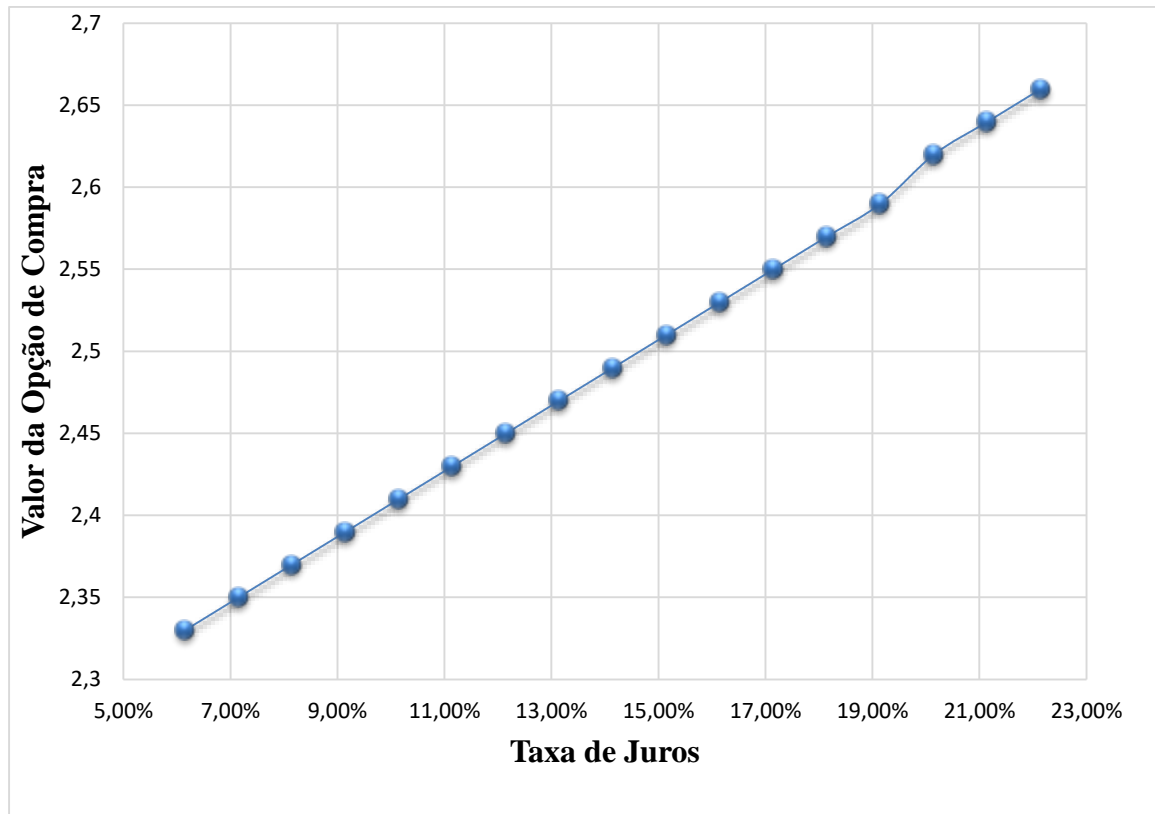
Considere o ativo sendo a ação ordinária, PETR3 da Petrobrás, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 10,53 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 81,17% a.a. Com uma taxa de juros de 14,15% a.a., e suponha que a taxa de juros varia de 1% para mais e para menos. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção. Supondo um valor de exercício de

R\$ 11,00. Observe a tabela a seguir com os valores de compra e venda, gerado com as equações (4.38) e (4.39).

Tabela 7: Variações da Taxa de Juros.

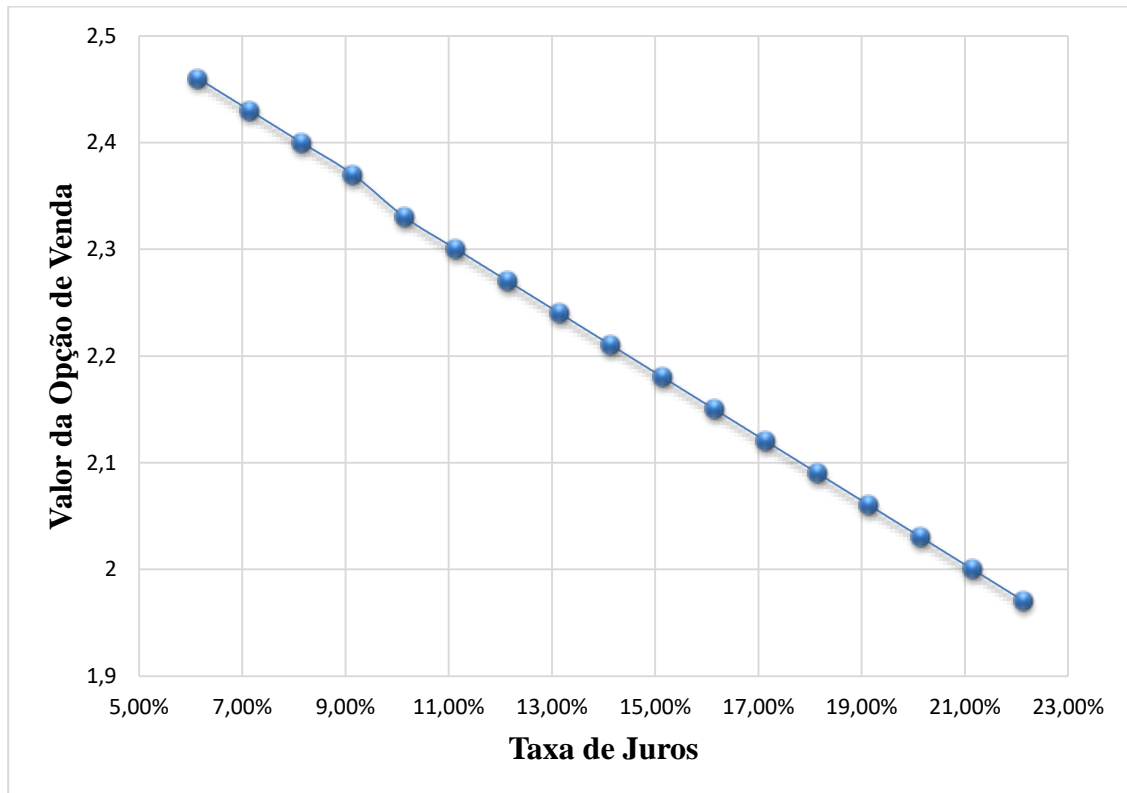
<i>S</i>	<i>E</i>	σ	<i>r</i>	$(T - t)$	<i>C</i>	<i>V</i>
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	6,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,33	R\$ 2,46
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	7,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,35	R\$ 2,43
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	8,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,37	R\$ 2,40
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	9,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,39	R\$ 2,37
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	10,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,41	R\$ 2,33
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	11,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,43	R\$ 2,30
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	12,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,45	R\$ 2,27
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	13,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,47	R\$ 2,24
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,49	R\$ 2,21
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	15,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,51	R\$ 2,18
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	16,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,53	R\$ 2,15
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	17,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,55	R\$ 2,12
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	18,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,57	R\$ 2,09
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	19,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,59	R\$ 2,06
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	20,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,62	R\$ 2,03
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	21,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,64	R\$ 2,00
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	22,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,66	R\$ 1,97

Fonte: Autor.

Gráfico 10: Variação da Opção de Compra em função da variação da Taxa de Juros.

Fonte: Autor.

No gráfico acima quando a taxa de juros aumenta no mercado, automaticamente o valor do ativo sobe, com isso ocorre um aumento direto no valor da opção de compra. Caso tenha uma queda da taxa de juros o valor da opção de compra tende a cair.

Gráfico 11: Variação da Opção de Venda em função da variação da Taxa de Juros.

Fonte: Autor.

No gráfico 11, ao contrário do que acontece com a opção de compra. Se a taxa de juros aumenta, o valor da opção de venda diminui, isso se deve ao alto valor do ativo objeto no mercado. Porém, se a taxa de juros diminui ocorre um aumento no valor da opção de venda devido à queda do ativo objeto.

8.4 Precificação das Opções via Modelo Binomial

Na precificação de opções via modelo Binomial o interesse é em saber qual o melhor valor a se pagar por uma opção do tipo europeia de compra ou venda em uma transação. Dessa forma, considere a mesma ação utilizada em 8.2 com dados encontrados em [9], referente ao mês de abril de 2016.

Considere que o preço corrente de uma ação ordinária PETR3 da Petrobrás está em R\$ 10,53, e suponha-se seis meses antes do vencimento do contrato de uma opção. O preço de exercício da opção é de R\$ 11,00. Já a taxa de juros livre de riscos vigente no mercado, referente à taxa Selic, é de 14,15% a.a. e a volatilidade da ação no mercado é de 81,17% a.a. Dado o tempo de 0,5 anos, tem-se $n = 5$ subintervalos de tempo, pois cada subintervalo equivale a 0,1 anos. Então, segue os seguintes parâmetros,

$$S = 10,53 \quad E = 11,00 \quad r = 0,1415 \quad \sigma = 0,8117 \quad T = 0,5 \quad N = 5$$

Das equações em (5.3), segue

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,8117\sqrt{\left(\frac{0,5}{5}\right)}} = 1,2926$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0,8117\sqrt{\left(\frac{0,5}{5}\right)}} = 0,7736$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,1415 \times \left(\frac{0,5}{5}\right)} - e^{-0,8117\sqrt{\left(\frac{0,5}{5}\right)}}}{e^{0,8117\sqrt{\left(\frac{0,5}{5}\right)}} - e^{-0,8117\sqrt{\left(\frac{0,5}{5}\right)}}} = 0,4636$$

onde, $\Delta t = \frac{T}{N}$. É possível obter os seguintes parâmetros,

$$u = 1,2926 \quad d = 0,7736 \quad p = 0,4636 \quad 1 - p = 0,5364$$

Considere apenas uma aproximação de quatro casas decimais. É possível obter o valor do ativo corrigido ao longo do tempo, basta usar os valores ascendentes u e descendentes d . Tem-se o triângulo ou árvore dos valores corrigidos,

Tabela 8: Valor do Ativo Corrigido.

0 ano	0,1 ano	0,2 anos	0,3 anos	0,4 anos	0,5 anos
10,53	13,61	17,59	22,74	29,40	38,00
	8,15	10,53	13,61	17,59	22,74
		6,30	8,15	10,53	13,61
			4,88	6,30	8,15
				3,77	4,88
					2,92

Fonte: Autor.

O valor da opção de compra é dado por $C = \max\{S_T - E, 0\}$, assim caso os valores da última coluna da tabela 8 forem menores do que o preço de exercício E , tem-se o valor da opção sendo igual a zero. Com base nos parâmetros encontrados e na equação (5.4), segue

Tabela 9: Valor da Opção de Compra.

0 ano	0,1 ano	0,2 anos	0,3 anos	0,4 anos	0,5 anos
2,43	4,47	7,47	12,05	18,55	27,00
	1,04	1,99	3,72	6,75	11,74
		0,25	0,55	1,19	2,61
			0	0	0
				0	0
					0

Fonte: Autor.

O valor da opção de venda é dado por $V = \max\{E - S, 0\}$, assim caso os valores da última coluna da tabela 8 forem maiores do que o preço de exercício E , tem-se o valor da opção sendo igual a zero. Com base nos parâmetros encontrados e na equação (5.4), segue

Tabela 10: Valor da Opção de Venda.

0 ano	0,1 ano	0,2 anos	0,3 anos	0,4 anos	0,5 anos
2,16	1,25	0,42	0	0	0
	3,29	2,00	0,80	0	0
		4,49	3,09	1,51	0
			5,82	4,54	2,85
				7,07	6,12
					8,08

Fonte: Autor.

Dessa forma obtém-se, os valores da opção de compra e venda,

$$\begin{cases} C(t, S) = 2,43 \\ V(t, S) = 2,16 \end{cases}$$

8.5 Black – Scholes e Binomial: oscilando volatilidade e taxa de juros

Nos mercados se tem uma grande preocupação na variação da volatilidade do preço dos ativos objetos, e com a taxa de juros Selic que também oscila constantemente. Com essas oscilações, os valores das opções de compra e venda sofrem grandes alterações. Os parâmetros da volatilidade e da taxa de juros afetam diretamente o valor das opções. Será feito uma comparação dos valores das opções de compra e venda em função da volatilidade e da taxa de juros utilizando os modelos de Black – Scholes e Binomial.

8.5.1 Variação da Volatilidade

Considere o ativo sendo a ação ordinária, PETR3 da Petrobrás, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 10,53 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 81,17% a.a., e suponha que a volatilidade do ativo varia de 1% para mais e para menos. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção. Supondo um valor de exercício de R\$ 11,00. Observe as tabelas a seguir com os valores de compra e venda, calculado através dos modelos de Black – Scholes e Binomial.

Tabela 11: Prêmio da Opção em Função da Volatilidade no Modelo de Black - Scholes.

S	E	σ	r	$(T - t)$	C	V
R\$ 10,53	R\$ 11,00	74,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,29	R\$ 2,01
R\$ 10,53	R\$ 11,00	75,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,32	R\$ 2,04
R\$ 10,53	R\$ 11,00	76,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,35	R\$ 2,07
R\$ 10,53	R\$ 11,00	77,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,38	R\$ 2,10
R\$ 10,53	R\$ 11,00	78,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,41	R\$ 2,12
R\$ 10,53	R\$ 11,00	79,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,43	R\$ 2,15
R\$ 10,53	R\$ 11,00	80,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,46	R\$ 2,18
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,49	R\$ 2,21
R\$ 10,53	R\$ 11,00	82,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,52	R\$ 2,24
R\$ 10,53	R\$ 11,00	83,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,55	R\$ 2,26
R\$ 10,53	R\$ 11,00	84,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,57	R\$ 2,29
R\$ 10,53	R\$ 11,00	85,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,60	R\$ 2,32
R\$ 10,53	R\$ 11,00	86,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,63	R\$ 2,35
R\$ 10,53	R\$ 11,00	87,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,66	R\$ 2,38

R\$ 10,53	R\$ 11,00	88,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,69	R\$ 2,40
R\$ 10,53	R\$ 11,00	89,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,71	R\$ 2,43
R\$ 10,53	R\$ 11,00	90,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,74	R\$ 2,46

Fonte: Autor.

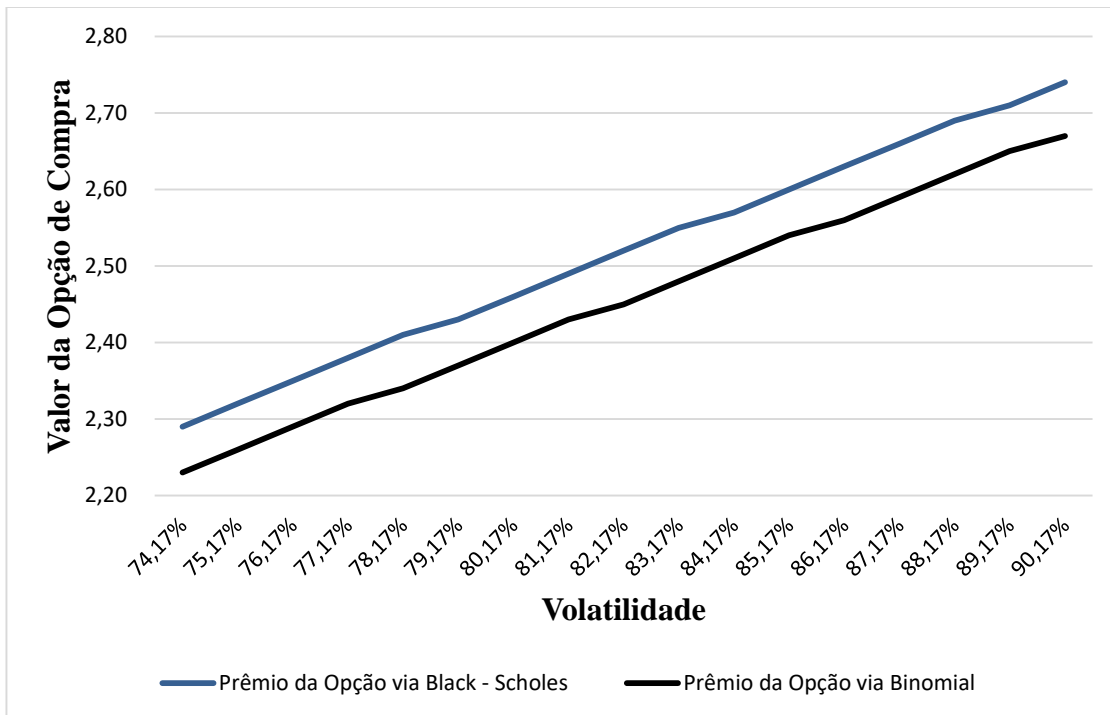
Tabela 12: Prêmio da Opção em Função da Volatilidade no Modelo Binomial.

S	E	σ	r	(T - t)	C	V
R\$ 10,53	R\$ 11,00	74,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,23	R\$ 1,97
R\$ 10,53	R\$ 11,00	75,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,26	R\$ 2,00
R\$ 10,53	R\$ 11,00	76,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,29	R\$ 2,03
R\$ 10,53	R\$ 11,00	77,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,32	R\$ 2,05
R\$ 10,53	R\$ 11,00	78,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,34	R\$ 2,08
R\$ 10,53	R\$ 11,00	79,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,37	R\$ 2,11
R\$ 10,53	R\$ 11,00	80,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,40	R\$ 2,14
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,43	R\$ 2,16
R\$ 10,53	R\$ 11,00	82,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,45	R\$ 2,19
R\$ 10,53	R\$ 11,00	83,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,48	R\$ 2,22
R\$ 10,53	R\$ 11,00	84,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,51	R\$ 2,25
R\$ 10,53	R\$ 11,00	85,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,54	R\$ 2,27
R\$ 10,53	R\$ 11,00	86,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,56	R\$ 2,30
R\$ 10,53	R\$ 11,00	87,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,59	R\$ 2,33
R\$ 10,53	R\$ 11,00	88,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,62	R\$ 2,36
R\$ 10,53	R\$ 11,00	89,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,65	R\$ 2,38
R\$ 10,53	R\$ 11,00	90,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,67	R\$ 2,41

Fonte: Autor.

De acordo com as tabelas 11 e 12 acima é possível comparar o valor da opção de compra e venda calculados pelos modelos de Black – Scholes e Binomial.

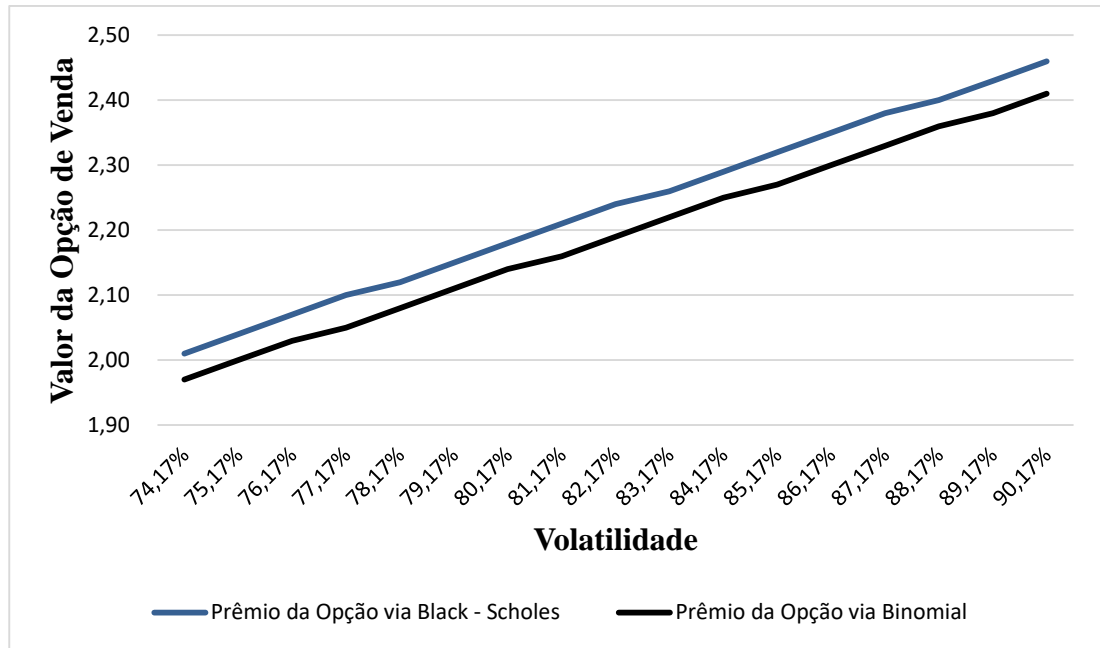
Gráfico 12: Valor da Opção de Compra Calculado via Black – Scholes e Binomial em função da Variação da Volatilidade.



Fonte: Autor.

A relação entre a volatilidade e o prêmio de uma opção é praticamente linear, se a volatilidade aumenta o valor da opção aumenta, se diminui o valor da opção também diminui. Porém, para o modelo de Black – Scholes os valores da opção de compra são relativamente maiores do que os valores da opção de compra calculados pelo modelo Binomial. Uma variação abrupta no valor da volatilidade gera uma alteração maior no valor da opção de compra calculado via Black – Scholes, ou seja, uma alteração dessas na volatilidade não é viável para um investidor caso esteja usando esse modelo.

Gráfico 13: Valor da Opção de Venda Calculado via Black – Scholes e Binomial em função da Variação da Volatilidade.



Fonte: Autor.

O comportamento de uma opção de venda em relação à volatilidade do ativo, é análogo ao da opção de compra. Novamente os valores da opção de venda calculados via Black – Scholes são maiores do que os calculados via Binomial quando se tem oscilações no valor da volatilidade.

8.5.2 Variação da Taxa de Juros

Considere o ativo sendo a ação ordinária, PETR3 da Petrobrás, e que esse ativo esteja no valor de R\$ 10,53 no mercado atual. Sua volatilidade no mercado é 81,17% a.a. Com uma taxa de juros de 14,15% a.a., e suponha que a taxa de juros varia de 1% para mais e para menos. Suponha um tempo de 0,5 anos para a maturidade da opção. Supondo um valor de exercício de R\$ 11,00. Observe as tabelas a seguir com os valores de compra e venda, calculado através dos modelos de Black – Scholes e Binomial.

Tabela 13: Prêmio da Opção em Função da Taxa de Juros no Modelo de Black - Scholes.

<i>S</i>	<i>E</i>	σ	<i>r</i>	$(T - t)$	<i>C</i>	<i>V</i>
----------	----------	----------	----------	-----------	----------	----------

R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	6,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,33	R\$ 2,46
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	7,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,35	R\$ 2,43
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	8,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,37	R\$ 2,40
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	9,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,39	R\$ 2,37
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	10,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,41	R\$ 2,33
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	11,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,43	R\$ 2,30
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	12,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,45	R\$ 2,27
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	13,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,47	R\$ 2,24
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,49	R\$ 2,21
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	15,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,51	R\$ 2,18
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	16,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,53	R\$ 2,15
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	17,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,55	R\$ 2,12
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	18,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,57	R\$ 2,09
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	19,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,59	R\$ 2,06
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	20,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,62	R\$ 2,03
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	21,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,64	R\$ 2,00
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	22,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,66	R\$ 1,97

Fonte: Autor.

Tabela 14: Prêmio da Opção em Função da Taxa de Juros no Modelo Binomial.

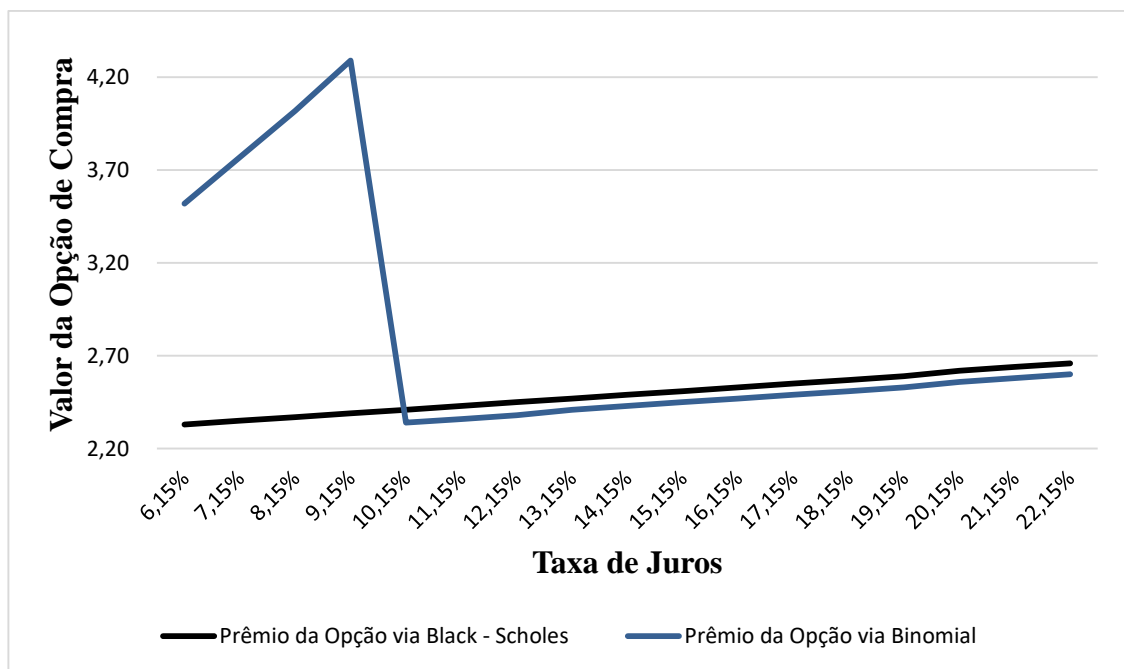
S	E	σ	r	$(T - t)$	C	V
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	6,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,52	R\$ 1,12
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	7,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 3,77	R\$ 0,96
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	8,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,02	R\$ 0,81
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	9,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 4,29	R\$ 0,68
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	10,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,34	R\$ 2,27
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	11,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,36	R\$ 2,25
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	12,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,38	R\$ 2,22
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	13,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,41	R\$ 2,19
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	14,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,43	R\$ 2,16
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	15,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,45	R\$ 2,14
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	16,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,47	R\$ 2,11
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	17,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,49	R\$ 2,08
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	18,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,51	R\$ 2,06
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	19,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,53	R\$ 2,03

R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	20,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,56	R\$ 2,01
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	21,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,58	R\$ 1,98
R\$ 10,53	R\$ 11,00	81,17% a.a.	22,15% a.a.	0,5 anos	R\$ 2,60	R\$ 1,95

Fonte: Autor.

De acordo com as tabelas 13 e 14 acima é possível comparar o valor da opção de compra e venda calculados pelos modelos de Black – Scholes e Binomial.

Gráfico 14: Valor da Opção de Compra Calculado via Black – Scholes e Binomial em função da Variação da Taxa de Juros.

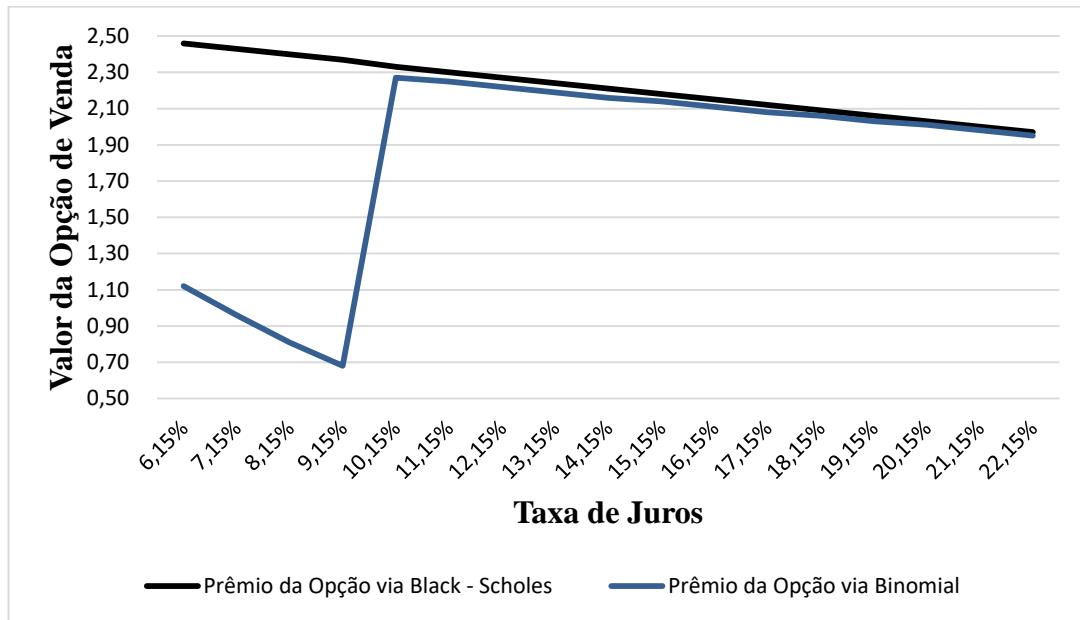


Fonte: Autor.

Já foi mencionado que a taxa de juros afeta diretamente no preço das opções, ou seja, quando a taxa de juros sobe no mercado o preço do ativo objeto tende a aumentar, ocorrendo um acréscimo no preço da opção de compra. Caso o preço do ativo subir com o aumento da taxa de juros, ocorre uma baixa no valor da opção de venda. No gráfico acima quando a taxa de juros aumenta no mercado, automaticamente o valor do ativo sobe, com isso ocorre um aumento direto no valor da opção de compra. Caso tenha uma queda da taxa de juros o valor da opção de compra tende a cair, esse fato serve para o modelo de Black – Scholes. Para o modelo Binomial observa-se um fato estranho. Para valores pequenos da taxa de juros, ao contrário do modelo de Black – Scholes, o valor da opção de compra aumenta consideravelmente. Depois, tem-se uma queda de valor em relação ao modelo de Black – Scholes, se mantendo com

crescimento no valor da opção quando a taxa de juros aumenta, porém com valores não tão distantes do modelo de Black – Scholes.

Gráfico 15: Valor da Opção de Venda Calculado via Black – Scholes e Binomial em função da Variação da Taxa de Juros.



Fonte: Autor.

O contrário do que acontece com a opção de compra se a taxa de juros aumenta, o valor da opção de venda diminui, isso se deve ao alto valor do ativo objeto no mercado. Se a taxa de juros diminui ocorre um aumento no valor da opção de venda devido à queda do ativo objeto. Como pode ser observado no modelo de Black – Scholes. No modelo Binomial, para menores valores da taxa de juros tem-se uma queda no valor da opção de venda, diferente do que ocorre em Black – Scholes. De maneira que a taxa de juros aumenta, o valor da opção tem um aumento significativo, porém menor do que em Black – Scholes.

9 ANÁLISE DE RESULTADOS

No presente estudo houve uma carência de várias demonstrações e explicações usadas como ferramentas na construção teórica e metodológica do modelo de Black – Scholes, como por exemplo, a aplicação da Fórmula de Itô desenvolvida na seção 4.4. Existe poucas referências que tratam diretamente do cálculo estocástico de Itô e suas aplicações, não sendo a intenção aqui esgotar as técnicas matemáticas do cálculo de Itô.

No gráfico 1, é feita uma variação do valor da ação ordinária PETR3 quando se aproxima da maturidade da opção. O gráfico expressa o valor da opção de compra em vários momentos. É possível perceber que com o passar do tempo se o valor do ativo aumentar o valor da opção tende a aumentar. Ao se aproximar da data de maturidade, o valor da opção tende a cair. Neste caso, fica evidente uma comparação entre o valor da opção de compra em relação ao valor do ativo e o tempo, onde tais variáveis é melhor estudada na seção 8.3.

Na seção 8.3 o prêmio da opção é afetado por seus parâmetros, como o ativo objeto, preço de exercício, tempo, volatilidade e taxa de juros. Estudando os valores dos gráficos 2 e 3 para a opção de compra, em relação a um fator importante que é o ativo subjacente, o ativo afeta de forma direta o prêmio da opção. Dessa forma, fica evidente, mesmo antes de se calcular o valor de uma opção de compra e venda, prever de forma relativa o valor da opção. Não pode ser deixado de lado como o tempo afeta o valor da opção, nos gráficos 6 e 7 observa-se que de maneira que o tempo aumenta o valor da opção aumenta devido as incertezas do mercado. Com isto, é importante pensar no prazo de maturidade de um contrato de opção, pois esse prazo afeta o valor do prêmio. Nos gráficos 8 e 9, os valores da opção de compra e venda é analisado de acordo com o parâmetro da volatilidade. Como já comentado cada ativo objeto ou qualquer derivativo possui uma volatilidade no mercado, esse coeficiente é fundamental no valor da opção. Se um ativo está com sua volatilidade muito alta é certo que o valor do prêmio da opção vai ser muito grande.

Muitos autores, como em [22], defendem que as variáveis do modelo que mais o impactam são a volatilidade e o valor do ativo subjacente. Pois, estas variáveis flutuam de uma forma difícil de prever, e caso haja uma pequena perturbação nos mercados como, por exemplo, doenças, guerras, desastres, etc., seus valores ficam desordenados e podem se supervalorizar ou diminuir drasticamente. Esse fator leva a uma preocupação maior a respeito da volatilidade e do valor do ativo objeto em específico num contrato de opção, por isso é importante estudar modelos de precificação de opções, com o intuito de melhorias nos mercados.

O modelo Binomial explanado na seção 8 é um dos modelos mais utilizados no mercado de opções de acordo com [28], juntamente com o modelo de Black – Scholes. Da seção 8.2 é obtida o valor da opção de compra e venda calculado pelo modelo Black – Scholes

$$\begin{cases} C(t, S) = 2,49 \\ V(t, S) = 2,21 \end{cases}$$

E da seção 8.4 é obtida o valor da opção de compra e venda calculado através do modelo Binomial

$$\begin{cases} C(t, S) = 2,43 \\ V(t, S) = 2,16 \end{cases}$$

Para o exemplo do valor da opção de compra e venda da ação ordinária PETR3, o modelo Binomial traz valores mais favoráveis para um investidor. Como no modelo Binomial é possível transformar um tempo discreto em tempo contínuo, de maneira que se aumente o número N de subintervalos os valores da opção de compra e venda tende a diminuir ao longo do tempo como pode ser ver em [15].

Na seção 8.5 é feita uma comparação dos valores da opção de compra e venda gerados pelos modelos de Black – Scholes e Binomial, em função das variações da volatilidade e da taxa de juros. A relação entre a volatilidade e o prêmio de uma opção é praticamente linear, então no gráfico 12 e 13 é visto um aumento no valor da opção de compra calculado no modelo de Black – Scholes quando há uma variação no valor da volatilidade. Esse aumento é relativamente maior do que ocorre com os valores da opção de compra via Binomial. Esse fato ocorre, pois no modelo de Black – Scholes a volatilidade é considerada constante ao longo do período de maturidade não correspondendo exatamente o que ocorre nos mercados. Uma variação abrupta no valor da volatilidade gera uma alteração maior no valor da opção de compra e venda calculado via Black – Scholes, ou seja, uma alteração dessas na volatilidade não é viável para um investidor caso esteja usando esse modelo.

Já os gráficos 14 e 15 mostram os valores das opções de compra e venda calculados via Black – Scholes e Binomial em função da variação da taxa de juros nos mercados. No gráfico 14, para valores menores da taxa de juros o valor da opção de compra é alto quando calculado pelo modelo de Binomial, diferentemente do que ocorre com o modelo de Black – Scholes. Ainda no gráfico 14 depois da taxa 9,15% o valor da opção de compra calculado pelo modelo Binomial têm uma queda drástica em relação aos valores da opção de compra calculados pelo

modelo de Black – Scholes. No gráfico 15, ocorre o contrário do gráfico 14, quando tem-se valores menores da taxa de juros o valor da opção de venda é pequeno calculado pelo modelo Binomial do que em Black – Scholes. Em seguida o valor da opção de venda no modelo Binomial diminui em relação ao calculado do modelo de Black – Scholes.

De acordo com as análises dos problemas enfrentados pelos produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri visto na seção 6, foi possível observar que falta um incentivo em suas produções no meio rural. Além de problemas aleatórios enfrentados pelos produtores, uma das causas que agravam suas produções e desmotivam o trabalho no campo é a falta de poder aquisitivo e ajuda por parte dos governos, sindicatos e cooperativas. Quando há perda em suas produções o produtores não possuem outras fontes de renda, fazendo uma diminuição do comércio local de seus produtos nas feiras. Desse fato é proposto uma alternativa de investimento para o produtor rural. Tal alternativa pode ser empreendida através do modelo de Black – Scholes e Binomial na precificação de opções, ou ainda fazendo investimentos direto na Bolsa de Valores. Fazendo essas aplicações o produtor tem uma outra fonte de renda, podendo assim obter capital para potencializar suas produções ou utilizar parte do seus ganhos com a terra para investir, fazendo assim uma forma de obtenção de recursos alternativos. Uma desvantagem, seria a falta de conhecimento para se fazer tais investimentos, por isso devido a carência de informações sobre como se investir nos mercados, foi desenvolvido um breve texto sobre o primeiro investimento que pode ser visto na seção 7. Dessa preocupação foi desenvolvida uma cartilha para o produtor rural com algumas informações para se dar um primeiro passo para investir corretamente nos mercados financeiros, assim o produtor interessado saberá por onde começar os procedimentos para se ter êxito nos investimentos.

Outro fator importante é obtido do teorema (B.2.5) da continuidade de Kolmogorov que pode ser visto nos apêndices, que garante a existência de uma versão contínua do Movimento Browniano, provando a propriedade (B.1) para valores dados de α , D e β . Durante toda a pesquisa realizada para a elaboração deste trabalho não foi encontrada a prova dessa propriedade. Foram consultados diversos materiais bibliográficos, monografias de mestrado, teses de doutorado, artigos e livros, objetivando fazer um levantamento sobre o modelo de Black – Scholes para a construção desta dissertação. Demonstrações como o da propriedade (B.1) não é amplamente difundidas na literatura, trazendo uma dificuldade em seu encontro juntamente com as ferramentas que foram necessárias para a sua verificação. Apresentar os teoremas (B.2.4) e (B.2.5) de Kolmogorov se faz importante para entender sobre a construção do movimento Browniano sem muito rigor.

Um resultado forte é a resolução analítica da equação de Black – Scholes, que pode ser entendida como uma equação de difusão, através da integral de Poisson apresentada no teorema (A.7.1.4).

Toda a estrutura encontrada no modelo de Black – Scholes reflete na aplicação nos mercados financeiros. A junção destas teorias mencionadas ao longo do texto, não são amplamente encontradas de forma explícita na literatura. Portanto, sobre o apreçamento das opções como o realizado na seção 8.2, observa-se que os cálculos demandam uma certa atenção. O investidor deve tomar cuidado ao realizar os cálculos analiticamente, para que não haja nenhum erro no valor do prêmio das opções. Existem calculadoras do modelo de Black – Scholes elaborada em planilhas que podem ser encontradas na internet ou desenvolvidas em algum programa computacional. Usar uma calculadora que traz a fórmula de precificação de opções de Black – Scholes pode ser de grande valia nos mercados.

Através destes resultados é possível entender um pouco de como funciona o modelo de Black – Scholes e Binomial e suas variáveis, expandindo conceitos matemáticos que não são abordados diretamente no mercado financeiro.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi mostrado nesta dissertação a teoria empregada no modelo de Black – Scholes, bem como sua construção e resolução, no tocante a possíveis simulações com dados retirados do mercado financeiro, e fazer uma breve comparação com o modelo Binomial.

Existe no mercado atual uma imensa diversidade de derivativos negociados em bolsas de valores do mundo todo. Essas operações com derivativos entre empresas e pessoas físicas são comuns nos dias de hoje. O crescimento do mercado de finanças se deve a busca constante por meio de seguros, de proteção para as negociações.

Um modelo matemático é considerado satisfatório quando está de acordo com dados reais vividos na prática, ou seja, o modelo é capaz de descrever com certeza os eventos que modela. No mercado atual usam-se o modelo de Black, Merton e Scholes para a precificação de opções, porém existem várias críticas a respeito de tal modelo. Este modelo aceita que os preços dos ativos objetos seguem um movimento Browniano e que possuem uma distribuição log-normal. Outra ideia adotada é considerar que a volatilidade é constante. Porém, alguns autores como pode ser visto em [35], defendem que a distribuição dos retornos dos ativos não é normal. Isto quer dizer que o processo estocástico considerado que é o movimento Browniano, pode ser mais bem ajustado, ou substituído por outro processo estocástico. Assim, surge um leque de oportunidades para novas pesquisas em outros modelos de precificação de opções. Críticos do modelo não aceitam que a volatilidade é constante, pelo simples fato de existir outros modelos como os citados na seção 4.6 que traduzem melhor o comportamento da volatilidade. Portanto à medida que processos estocásticos aparecem para descrever o comportamento dos mercados, os modelos de apreçamento de opções vão surgindo e gerando uma gama de impactos com modelos já existentes.

O modelo satisfaz as condições para gerar preços justos e livres de arbitragem para opções do tipo europeia. No entanto, no mundo real nos mercados onde o que se interessa é os lucros, é encontrado mercados instáveis, impossibilitando rebalanceamentos contínuos como carece o modelo de Black – Scholes.

O modelo de Black – Scholes considera que o mercado é perfeito, ou seja, que não existe variações nos preços dos ativos objetos, mas muitos investidores ainda continuam usando esse modelo. Porém, os mercados não são perfeitos, mas o avanço estabelecido pelas limitações das hipóteses do modelo ajudou vários outros acadêmicos a construir modelos que melhor interpretam o mercado. O mercado financeiro só pode expandir, crescer, se houver maior

conhecimento a seu respeito. Este conhecimento pode ser entendido como agentes e/ou parâmetros que influenciam no processo de formação de preços e valores que cercam as opções do tipo europeu. O modelo de Black – Scholes serve como ferramenta básica para entender a volatilidade do mercado e os preços dos ativos subjacentes negociados nas bolsas de valores. O que é preciso ficar claro aqui em relação à aceitação do modelo, é que para curtos períodos de tempo o modelo funciona com êxito, quando há ajustes dos parâmetros. Outro fator que levou sua aceitação no mercado foi sua ampla divulgação a partir de 1973, atribuindo ainda avanços tecnológicos como sua implantação em calculadoras de fácil manejo.

O modelo de Cox, Ross e Rubinstein é muito simples de ser utilizado e pode ser desenvolvido para diversos tipos de opções. Na árvore binomial é possível analisar período a período, e ver como o ativo está se comportando ao longo da maturidade da opção. Em questão de desempenho computacional o modelo apresenta um baixo custo benefício em seu manuseio. Quanto sua estrutura e compreensão, o modelo é facilmente encontrado na literatura, facilitando o seu acesso e implementação. Porém, mesmo que o modelo Binomial seja diversificado para outros tipos de opções, ele apresenta uma certa complexidade ao precificar outras opções. Essa dificuldade está no fato de sua programação e no nível de incerteza que o ativo objeto pode exercer sobre o valor da opção. A principal vantagem de se utilizar o modelo de Black – Scholes ao invés do modelo Binomial é sua velocidade de calcular o valor da opção, porém como ele calcula somente um valor em um dado momento, ele não consegue calcular o valor de uma opção que pode ser exercida a qualquer momento. E como o modelo Binomial divide o espaço de tempo até a expiração utilizando uma árvore binomial de preços avançando a partir do momento presente é um facilitador em momentos de mercados turbulentos. A árvore binomial mostra todos os caminhos possíveis que o preço da opção pode correr durante seu tempo de maturidade e o valor em cada passo é calculado retornando ao presente. O modelo de Black – Scholes se baseia num conjunto de parâmetros constantes até o fim da maturidade da opção, esse fato não ocorre no mundo real. Então, o modelo da árvore de decisões seria o mais ideal num mercado oscilatório. Foi visto na seção 8.5, o tratamento do valor da opção em relação aos parâmetros da volatilidade e da taxa de juros que estão em constante oscilação no mercado. Desta seção, pode-se concluir que o modelo de Black – Scholes apresenta melhor estabilidade comparativa do que o modelo Binomial que apresenta saltos nos valores, dificultando as comparações entre as variáveis e os valores das opções.

Devido a esses complicadores que fazem com que a área de finanças não esteja completa, constituindo um desafio tanto para acadêmicos quanto para outros interessados no assunto, tendo uma incessante busca pelo método ideal para precificar opções. Foi desenvolvido

como objetivo geral uma cartilha com base na pesquisa desta dissertação. Essa cartilha traz informações sobre o primeiro investimento para o produtor rural e como procede-lo corretamente sem que haja prejuízos por falta de informações a respeito dos mercados. É constatado que é possível o produtor rural ter uma alternativa de investimento diferente do trabalho no campo. Sendo esse investimento uma forma de renda capaz de ajudar nas atividades do campo e mesmo podendo ser uma obtenção de renda quando as produções não forem favoráveis. Utilizar do modelo de Black – Scholes para precificar opções pode ser uma ferramenta fundamental para o produtor rural, também pode ser utilizado o modelo Binomial. Como constatado na seção 8.5, caso o produtor rural utilize os modelos para um cenário onde se há uma grande variação na volatilidade o ideal é utilizar o modelo Binomial que apresente melhores resultados. Caso o cenário esteja com uma variação da taxa de juros o ideal é se utilizar o modelo de Black – Scholes. O objetivo proposto não é retirar o produtor do seu meio de trabalho, mas sim dar-lhe uma alternativa viável para se obter uma nova fonte de renda. Tal cartilha busca auxiliar o produtor rural interessado a investir grandes ou poucas quantias de dinheiro nos mercados, visando uma melhoria em suas fontes de renda através da prática do investimento na Bolsa de Valores.

Existindo uma abertura para o estudo de precificações de opções, tem-se algumas propostas de trabalhos futuros que podem ser realizadas:

- Desenvolver o modelo de Black – Scholes para precificações de opções em qualquer momento do tempo de maturidade da opção;
- Adequar outro processo estocástico ao modelo de Black – Scholes que melhor representa uma aplicação no mundo real;
- Desenvolver um curso de educação financeira para produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AMARAL, L. Do Jequitinhonha aos canaviais. Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado. Fafich-UFMG, 1988.
- [2] ARMICOPA - Associação Regional Mucuri de Cooperação dos Pequenos Agricultores. Diagnóstico Participativo da Agricultura Familiar do Território do Vale do Mucuri - MG. Teófilo Otoni, s.n.p, 2005.
- [3] ARROYO, M.G. A escola do campo e a pesquisa do campo: metas. In: MOLINA, M. C. Educação do Campo e Pesquisa: questões para reflexão. – Brasília: Ministério do Desenvolvimento Agrário, 2006.
- [4] ASSIS, T.P. Agricultura familiar e gestão social: ONGs, poder público e participação na construção do desenvolvimento. Lavras, Dissertação de Mestrado, PPGA-UFLA, 2005.
- [5] BESSADA, D. F. A. Generalizações do movimento browniano e suas aplicações à física e a finanças. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Abril de 2005.
- [6] BONOTTO, E. M. A equação de Black-Scholes com ação impulsiva. USP-São Carlos. Maio/2008. Tese (Doutoramento em Ciências-Matemática), Instituto de Ciências Matemáticas, Universidade de São Paulo.
- [7] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R.C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 8 ed. Editora LTC. New York, 2005.
- [8] BOVESPA. Bolsa de Valores de São Paulo. Mercado futuro de ações. São Paulo, 2010. Disponível em: <http://fernandonogueiracosta.files.wordpress.com/2010/03/mercado-futuro-de-acoes.pdf>. Acesso em 07 de abril de 2016.
- [9] BM&FBOVESPA. A nova bolsa. Disponível em: <http://bmfbovespa.com.br/pt-br/mercados/mercadorias-e-futuros.aspx?idioma=pt-br>. Acesso em 18 de novembro de 2016.
- [10] BRASIL. Ministério do desenvolvimento agrário. Secretaria do Desenvolvimento Territorial. Plano Territorial de Desenvolvimento Rural Sustentável - Guia para o Planejamento. Brasília: MDA/SDT, 2005.
- [11] BRANDENBURG, A. Agricultura familiar, ONGs e desenvolvimento sustentável. Curitiba, Editora da UFPR, 1999.
- [12] BRAUMANN, C. A. Introduções às equações diferenciais estocásticas e aplicações. XIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. Ericeira, 28 de Setembro a 1 de Outubro de 2005, Edições SPE.
- [13] CAIAFFA, M. Stochastic processes-lecture notes. Academic year 2011-2012.

- [14] CATIGNANI, G. O método das opções reais aplicado na avaliação das oportunidades de investimento no setor de seguros. Dissertação de Mestrado, Fundação Getúlio Vargas. Rio de Janeiro, 2003.
- [15] COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified Approach. *Journal of Financial Economics*. v. 7, n. 3, p. 229-263, september, 1979.
- [16] COX, J. C.; RUBINSTEIN, M. *Option Markets*. Prentice-Hall, 1985.
- [17] CME-Chicago Mercantile Exchange. An introduction to futures and options. Chicago. Copyright 2006, Illinois 60606-7499.
- [18] DESER - Departamento de Estudos Sócio-Econômicos Rurais. Referência de desenvolvimento da agricultura familiar da região Sul/Brasil – construção metodológica de uma matriz produtiva sustentável. Projeto rede Brasil de agricultores gestores de referência da agricultura da região Sul do Brasil. Deser, Relatório 2003/2004.
- [19] DRUCKER, P. *As novas realidades: no governo e na política, na economia e nas empresas, na sociedade e na visão do mundo*. 4. Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [20] DULCI, O. S. *Política e recuperação econômica em Minas Gerais*. Belo Horizonte, Editora UFMG, 1999.
- [21] EINSTEIN, A. *Investigations on the theory of brownian motion*. Dover, New York 1905.
- [22] EVANS, L. C. *An introduction to stochastic differential equations*. Version 1.2. Berkeley: University of California, sd. 139 p. Disponível em <http://math.Berkeley.edu/evans/SDE.course.pdf>. Acesso em 30 de fevereiro de 2016.
- [23] FERNANDES, M. A. *Precificação e hedge dinâmico de opções de Telebrás utilizando redes neurais*. Pós-Graduação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- [24] FERNANDES, M. M. *Diferenças finitas no valor de opções europeias e americanas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, Novembro, 2009.
- [25] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro, IMPA 1977.
- [26] FIGUEIREDO, J.; RIBEIRO, C. *Apontamentos de equações diferenciais: (Complementos de análise matemática EE)*. Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho, 2013.
- [27] FISCHER, B.; SCHOLE, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–654, 1973.
- [28] HULL, J. C. *Options, futures, and other theory derivatives*, Prentice Hall. 3° ed., 1997.

- [29] IBGE. Resultados do Censo 2010. Disponível em: http://www.censo2010.ibge.gov.br/dados_divulgados/index.php?uf=31. Acessado em 02 de setembro de 2016.
- [30] IÓRIO, V. EDP: Um curso de graduação. 3^o ed. Rio de Janeiro, 2012.
- [31] JUNIOR, H. M. Revisão da fórmula de Black & Scholes. Disponível: <http://www.sigmasociety.com/artigos/black-scholes.pdf>. Acesso em 13 de janeiro de 2016.
- [32] MILANÉS, A. Uma introdução ao cálculo estocástico e às equações diferenciais estocásticas. Relatório Técnico, RTE-03/2004- Série Ensino.
- [33] MISTURINI, R. Movimento browniano, integral de Itô e introdução às equações diferenciais estocásticas. Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre 8 de Julho de 2010.
- [34] NICOLAU, J. C. H. C. Modelação e estimação de séries financeiras através de equações diferenciais estocásticas. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, Junho de 2000.
- [35] OGA, L. F. A teoria da ciência no modelo de Black-Scholes de apreçamento de ações. Dissertação (Mestrado em Ciências) Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [36] OKSENDAL, B. Stochastic differential equations. Springer Verlag, 1998.
- [37] PEREIRA, L. O município de Araçuaí. Belo Horizonte, Imprensa Oficial, 1969.
- [38] PINHEIRO, L. O. COUTINHO, D. S.; QUEIRÓS, T.D.; MOREIRA, G. D. L. B.; ASSUMPCÃO, A. B. Implementação das Escolas Famílias Agrícolas Microrregionais no Território Mucuri: o desafio de uma nova educação no campo. Grupo de Pesquisa em Agricultura Familiar dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – GPAF Vales. Teófilo Otoni, MG: 2009 vol. 1, 11p.
- [39] PUC-RIO- Certificação Digital N° 0412242/CA. Mercado futuro. Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.maxwell.lambda.ele.pucRio.br/8954/8954_3.PDF. Acesso em 05 de janeiro de 2016.
- [40] RIBEIRO, E.M. Lembranças da terra: histórias do Mucuri e Jequitinhonha. Contagem, CEDEFES, 1996.
- [41] SALOMÃO, M. F. Precificação de opções financeiras: Um Estudo sobre os Modelos de Black – Scholes e Garch. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória 2011.
- [42] SOUZA, M. O.; ZUBELLI, J. P. Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto. Notas de Matemática Aplicada SBMAC, vol.29, 2012.

[43] USP. Equações diferenciais parciais. Disponível em:
http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat_didatico/Equacoes_diferenciais_parciais.pdf.

Acesso em 20 de fevereiro de 2016.

[44] VICENTE, L. N. Introdução à matemática financeira. Departamento de Matemática da F.U.T.U.C, 2012/2013.

APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Alguns fenômenos que ocorrem na Eletricidade, Ótica, Magnetismo, Mecânica, Biologia, Economia, Finanças, e etc., podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial. Na maior parte do tempo faz-se a tentativa de se transformar a equação diferencial parcial em uma ou mais equações diferenciais ordinárias, com o objetivo de simplificar os trabalhos e resolução do problema como é o caso do método de separação de variáveis.

A.1 Equações Diferenciais

Definição A.1.1: Uma equação envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes (as incógnitas) em ordem a uma ou mais variáveis independentes designa-se equação diferencial.

Exemplo A.1.2: São equações diferenciais

$$\text{i) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{ii) } \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = w - v$$

A.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição A.2.1: Uma equação diferencial envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma variável independente designa-se equação diferencial ordinária (EDO).

Exemplo A.2.2: São equações diferenciais ordinárias

$$\text{i) } \frac{d^3 v}{dt^3} + 5v \frac{dv}{dt} = \cos t$$

$$\text{ii) } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$$

A.3 Equações Diferenciais Parciais

Definição A.3.1: Uma equação diferencial envolvendo derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a mais do que uma variável independente designa-se equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo A.3.2: São equações diferenciais parciais as equações i e ii, do exemplo (A.1.2).

A partir de agora, não é apresentado muitos detalhes e técnicas envolvidas a respeito das equações diferenciais ordinárias e o foco é voltado para o estudo da determinação de soluções analíticas das EDPs. Caso o leitor se interesse pelas EDOs pode consultar [7].

No estudo do modelo de Black – Scholes, o trabalho é focado na equação diferencial parcial de segunda ordem, que é a ordem da derivada parcial de maior grau que surge na equação.

A.4 Solução da Equação Diferencial Parcial

Uma função $u = f(x, y)$ é solução de uma EDP de segunda ordem

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (\text{A.1})$$

sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ se:

- (1) f é 2 vezes continuamente diferenciável sobre o conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$;
- (2) f satisfaz à EDP dada.

Definição A.4.1: Uma EDP é dita linear nas variáveis independentes x, y e na variável dependente $u = f(x, y)$ sobre $M \subset \mathbb{R}^2$, se pode ser posta na forma (A.1) onde todos os coeficientes A, B, C, D, E e F somente dependem das variáveis independentes x, y para todo $(x, y) \in M$ e $A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$, ou seja, a EDP será linear se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais, caso contrário, ela é dita não linear.

Definição A.4.2: Uma EDP é homogênea se $G(x, y) = 0$.

A.5 Problemas de Valores Iniciais ou de Fronteira

Definição A.5.1: Um problema com valores iniciais ou de fronteira de uma EDP de segunda ordem da forma de (A.1) é aquele que visa obter uma solução $u = f(x, y)$ para a equação dada sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ de modo que a função $u = f(x, y)$ deva satisfazer a algumas condições iniciais, ou seja, de algumas variáveis já fixadas, ou condições de fronteira dadas por funções conhecidas. No caso de condições de fronteira ou de contorno é preciso observar o que acontece ao redor da região M . A solução geral $u = f(x, y)$ de uma EDP sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ é a solução que engloba todas as soluções válidas sobre este conjunto M , enquanto uma solução particular é uma função específica que satisfaz à EDP dada sob uma condição particular.

Definição A.5.2: Se todas as condições suplementares representarem um determinado valor da variável independente, este é um *problema de valor inicial (PVI)*.

Definição A.5.3: Se as condições se referirem a dois valores distintos da variável independente, este se trata de um *problema de valor de fronteira (PVF)*.

Exemplo A.5.4: Um problema típico com problemas de valores iniciais PVI e problemas de valores de fronteira PVF para uma equação diferencial parcial do calor é:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Um problema desse tipo é denominado de *Problema de Valores Inicial e de Fronteira*, o qual se pode chamar de *(PVIF)*.

A.6 Classificação de uma Curva Cônica

As equações diferenciais parciais (EDP) de 2ª ordem podem ser classificadas em três tipos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. A classificação das EDPs objetiva especificar os métodos numéricos mais apropriados em sua resolução. Considere apenas duas variáveis

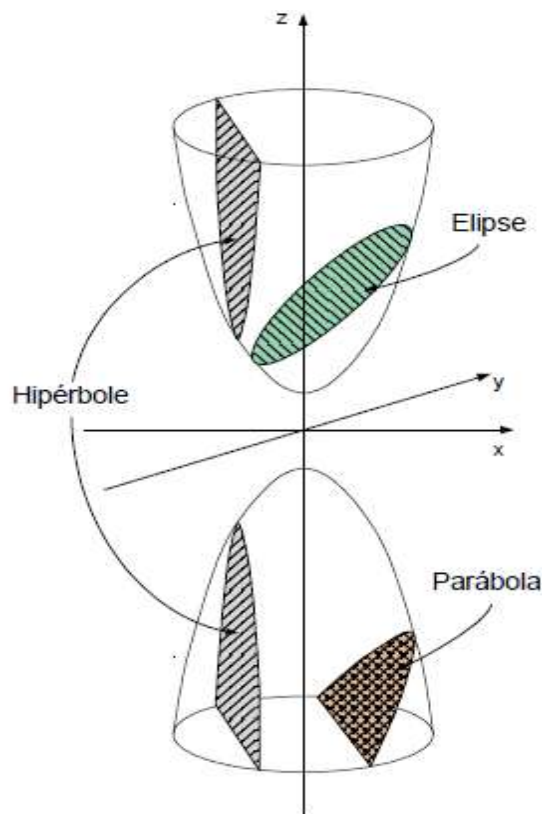
independentes, de modo que a EDP mais geral é da forma (A.1) em que u é função de x e y e em que A, B, C, D, E e F são coeficientes que podem ser função de x e y . Se esses coeficientes não forem função de x e y , a EDP é dita de coeficientes com funções constantes. A equação geral de uma curva cônica no plano é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Quando seus coeficientes $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ e A, B e C forem constantes pode-se classificar a cônica como uma elipse, parábola ou hipérbole, ou outras curvas degeneradas destas e isto vai depender do discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$. Portanto, as equações recebem o nome de Hipérbolica, Elíptica ou Parabólica se o discriminante das mesmas for dessa forma,

- 1) Hipérbolica se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$;
- 2) Elíptica se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$;
- 3) Parabólica se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$

Figura 2: Curvas cônicas representativas das EDPs lineares.



Exemplos A.6.1:

- i) A Equação da Onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$ é uma equação diferencial Hiperbólica, pois da equação geral (A.1), a equação da Onda possui como coeficientes $A = \beta^2$, $B = 0$ e $C = 1$; assim seu discriminante é $\Delta = 4\beta^2 > 0$.
- ii) A Equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$ é uma equação diferencial Elíptica, pois da equação geral (A.1), a equação de Laplace possui como coeficientes $A = 1$, $B = 0$ e $C = 1$; assim seu discriminante é $\Delta = -4 < 0$.
- iii) A Equação do Calor $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$ é uma equação diferencial Parabólica, pois da equação geral (A.1), a equação do Calor possui como coeficientes $A = \alpha^2$, $B = 0$ e $C = 0$; assim seu discriminante é $\Delta = 0$.

Na próxima seção será apresentado um método importante para resolver equações diferenciais parciais, conhecido como método de separação de variáveis. Sua característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que têm que ser resolvidas sujeitas a condições iniciais e condições de contorno.

A.7 Separação de Variáveis

A técnica da Separação de Variáveis ou Método de Fourier⁴⁵ transforma uma equação diferencial parcial em várias equações diferenciais ordinárias. Para resolver uma equação diferencial parcial por separação de variáveis, intui-se que uma solução pode ser escrita como o produto de duas funções quaisquer, em que uma delas é função de apenas uma das variáveis independentes e a outra das restantes. A equação resultante escreve-se de forma que um dos membros dependa apenas de uma das variáveis e o outro das variáveis restantes. Sendo assim, cada um dos membros terá de ser uma constante, o que vai possibilitar determinar as soluções.

⁴⁵Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em 21 de março de 1768 na cidade de Paris, e morreu em 16 de maio de 1830 foi um matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier e a sua aplicação aos problemas da condução do calor.

A.7.1 Método de Fourier

Esse método consiste, em primeiro momento, usar separação de variáveis e procurar soluções $u = (x, t)$ do problema apresentado no exemplo (A.5.4) na forma

$$u(x, t) = F(x)G(t). \quad (\text{A.2})$$

Uma vez identificado esse candidato é só mostrar que este é a solução do problema. Descrever esse método usando a Equação do Calor, pois este método foi criado originalmente para esta equação com a condução do calor numa barra de tamanho l , que pode ser mais bem compreendida em [25],

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

onde $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, e que satisfaça as condições de fronteira. Considere o caso em que as temperaturas nas extremidades da barra são mantidas constantemente a zero grau.

Substituindo (A.2) na equação do calor, tem-se,

$$F(x)G'(t) = \alpha^2 F''(x)G(t) \quad (\text{A.3})$$

ou

$$\frac{G'(t)}{G(t)} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (\text{A.4})$$

Neste caso, $G(t)$ e $F(x)$ nunca se anulam. Em (A.4) o lado esquerdo é uma função apenas de t e do lado direito é uma função apenas de x . Ambos, tanto o lado esquerdo de (A.4) como o lado direito são iguais, portanto devem depender de x e de t . Ou seja,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{G'(t)}{G(t)} \frac{1}{\alpha^2} = \sigma. \quad (\text{A.5})$$

A primeira equação, em (A.5), nos diz que F deve satisfazer à equação diferencial ordinária

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < l \quad (\text{A.6})$$

e como $u(0, t) = u(l, t) = 0$ a função $F(x)$ deve satisfazer também às condições

$$F(0) = 0 \quad \text{e} \quad F(l) = 0 \quad (\text{A.7})$$

pois, $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$ para todo $t > 0$. Se $F(0) \neq 0$, assim $G(t) = 0$ e, portanto, $u(x, t) = F(x)G(t) = 0$. Se $u = 0$, essa função não terá como satisfazer a condição inicial que diz que $u(x, 0) = f(x)$, a menos que $f(x) = 0$, portanto, $F(0) = 0$ e $F(l) = 0$.

É preciso verificar quais valores de σ que conduzem as soluções $F(x)$ do problema dado em (A.6) e (A.7). O interesse é apenas nas soluções F não identicamente nulas, de outro modo, obtém-se $u = 0$, o que não interessa. Antes, é enunciado um teorema para o tratamento das soluções de equações diferenciais de ordem n , para entender algumas soluções encontradas.

Teorema A.7.1.1: Seja y_1 e y_2 um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial linear homogênea em um intervalo $[a, b]$. Então, a solução geral da equação no intervalo é $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, onde $c_i, i = 1, 2$ são constantes arbitrárias.

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [7].

Suponha-se, então, três possibilidades para σ , conforme segue.

- 1) Se $\sigma > 0$, a solução geral de (A.6) pode ser encontrada. Com isso, suponha que $F(x) = e^{rx}$ seja solução. Logo, r deve ser raiz da equação característica. Segue,

$$r^2 - \sigma = 0$$

$$r^2 = \sigma$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\sigma}$$

$$r = \pm\sqrt{\sigma}$$

$$F_1(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} \quad \text{e} \quad F_2(x) = c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

De acordo com o teorema (A.7.1.1) a solução geral de (A.6) é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Portanto se tal F satisfazer as condições em (A.7), o par (c_1, c_2) de constantes deverá ser solução do sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}l} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}l} = 0 \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $c_1 = c_2 = 0$. Isso implica que $F = 0$, o que não interessa.

2) Se $\sigma = 0$, a solução geral da equação (A.6) é fácil verificar, então,

$$F''(x) = 0.$$

Seja $F'(x) = F(x)$ e $F''(x) = F'(x)$, então,

$$F'(x) = 0$$

$$\int F'(x) dx = \int 0 dx$$

$$F(x) = c_1.$$

Com isso,

$$F'(x) = c_1$$

$$\int F'(x) dx = \int c_1 dx$$

$$F(x) = c_1 x + c_2$$

e, para satisfazer às condições em (A.7), deve-se ter $c_2 = 0$ e $c_1 l + c_2 = 0$ o que implica $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $F = 0$.

- 3) Se $\sigma < 0$, então $\sigma = -\lambda^2$, e a solução geral de (A.6) pode ser encontrada. Com isso, suponha que $F(x) = e^{rx}$ seja solução de (A.6), então r tem que ser raiz da equação característica abaixo. Se isso acontecer é possível obter uma solução para $F(x)$, segue

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r = \pm\sqrt{-\lambda^2}$$

$$F_1(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda^2}x} \text{ e } F_2(x) = c_2 e^{-\sqrt{-\lambda^2}x}.$$

De acordo com o teorema (A.7.1.1) a solução geral de (A.6) é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda^2}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda^2}x}.$$

É importante enunciar um teorema sobre o tratamento das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem.

Teorema A.7.1.2: Suponha que y_1 e y_2 sejam soluções da equação $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, e que o determinante Wronskiano⁴⁶ $W = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$ não seja nulo no ponto t_0 , onde se fixem as condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$. Então, há uma escolha das constantes c_1 e c_2 para a qual $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ satisfaz à equação diferencial $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ e às condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$.

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [7].

Se as raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$ são números complexos. Pode-se denotá-los por $r_1 = \lambda i$ e $r_2 = -\lambda i$. Logo:

$$F(x) = c_1 e^{\lambda i x} + c_2 e^{-\lambda i x}.$$

Então, as expressões correspondentes de y são $y_1(x) = e^{\lambda i x}$ e $y_2(x) = e^{-\lambda i x}$. Agora, é preciso entender o significado dessas expressões, que envolvem a função exponencial de um

⁴⁶Os determinantes wronskianos receberam esse nome devido a Józef Maria Hoené Wronski (1776-1853), que nasceu na Polônia, mas viveu a maior parte da sua vida na França.

número complexo. Considere que as propriedades usuais da função exponencial tenham validade para expoentes complexos. Considere a Fórmula de Euler⁴⁷

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Daí,

$$\theta = \lambda x$$

logo,

$$e^{\lambda ix} = \cos \lambda x + i \operatorname{sen} \lambda x.$$

Observe que as partes, real e imaginária de $e^{\lambda ix}$ estão expressos em termos de funções elementares reais.

Ao fazer a soma e a diferença de y_1 e y_2 , para observar como se comportam essas funções elementares. Segue:

$$y_1(x) + y_2(x) = e^{\lambda ix} + e^{-\lambda ix} = \cos \lambda x + i \operatorname{sen} \lambda x + \cos \lambda x - i \operatorname{sen} \lambda x = 2 \cos \lambda x$$

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{\lambda ix} - e^{-\lambda ix} = \cos \lambda x + i \operatorname{sen} \lambda x - \cos \lambda x + i \operatorname{sen} \lambda x = 2i \operatorname{sen} \lambda x.$$

Desprezar os fatores 2 e $2i$ em cada expressão, encontra-se um par de soluções reais $u(x) = \cos \lambda x$ e $v(x) = \operatorname{sen} \lambda x$. Note que $u(x)$ e $v(x)$ são a parte real e imaginária, respectivamente de y_1 .

Pelo cálculo direto, o Wronskiano de u e v é:

$$\begin{aligned} W(u, v)(x) &= u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = \cos \lambda x \lambda \cos \lambda x + \operatorname{sen} \lambda x \lambda \operatorname{sen} \lambda x \\ W(u, v)(x) &= \lambda \cos^2 \lambda x + \lambda \operatorname{sen}^2 \lambda x = \lambda(\cos^2 \lambda x + \operatorname{sen}^2 \lambda x). \end{aligned}$$

Sabe-se que $\cos^2 \emptyset + \operatorname{sen}^2 \emptyset = 1$ e que $\lambda \neq 0$, então $W(u, v)(x) = \lambda$. O Wronskiano W não é zero e, assim, u e v formam um conjunto fundamental de soluções. Portanto a solução geral é da forma

⁴⁷Leonhard Paul Euler nasceu em 15 de abril de 1707 na cidade de São Petersburgo, e morreu em 18 de setembro de 1783 foi um grande matemático e físico suíço. A fórmula de Euler, cujo nome é uma homenagem a Leonhard Euler, é uma fórmula matemática da área específica da análise complexa, que mostra uma relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial.

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

Para que uma tal F satisfaça as condições em (A.7), deve-se ter $c_1 = 0$ e $c_2 \operatorname{sen} \lambda l = 0$ pelas condições de fronteira. Como não serve $c_2 = 0$, deve-se ter $\operatorname{sen} \lambda l = 0$, o que implica $\lambda l = n\pi$, onde n é um inteiro não nulo ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Os valores de $-\sigma = \lambda^2$:

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

São chamados os valores próprios ou autovalores⁴⁸ do problema dado, e as funções

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

são chamados as funções próprias ou autofunções⁴⁹ do problema dado.

Veja agora a segunda equação diferencial ordinária em (A.5). É fácil ver que sua solução é

$$G'(t) - G(t)\alpha^2\sigma = 0$$

$$G'(t) = G(t)\alpha^2\sigma$$

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \alpha^2\sigma$$

$$\int \frac{G'(t)}{G(t)} = \int \alpha^2\sigma dt$$

$$\ln G(t) = \alpha^2 t\sigma + c$$

$$e^{\ln G(t)} = e^{\alpha^2 t\sigma + c}$$

$$G(t) = ce^{\alpha^2 t\sigma}.$$

Considere que $\sigma = -\lambda^2$,

⁴⁸Em álgebra linear, um escalar λ é valor próprio de um operador linear $A: V \rightarrow V$ se existir um vetor $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. O vetor x é chamado de vetor próprio. Para que tal seja possível, é necessário que $\det(A - \lambda I) = 0$ o qual é uma equação polinomial de grau n na variável λ , as n raízes desse determinante são chamados de autovalores.

⁴⁹Função que, submetida a um operador, é apenas multiplicada por um escalar, função característica.

$$G(t) = ce^{-\alpha^2 t \lambda^2}.$$

Assim, como $\lambda^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ a solução geral será

$$G(t) = ce^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}}.$$

Então, multiplicado as soluções $F(x)$ e $G(t)$ de tal modo que satisfaça a equação do calor e as condições de fronteira e desprezando suas constantes arbitrárias de proporcionalidade, tem-se:

$$u(x, t) = F(x)G(t) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ce^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}}$$

ou ainda,

$$u(x, t) = e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, é obtida uma função

$$u_n(x, t) = e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.8})$$

à qual satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira. Será enunciado um teorema de suma importância.

Teorema A.7.1.3 (Princípio da Superposição): Se y_1 e y_2 forem duas soluções distintas de uma equação diferencial linear $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então, a combinação linear $ay_1 + by_2$ também é uma solução para quaisquer valores das constantes a e b .

Demonstração: Substituindo a expressão $y = ay_1 + by_2$ por y em $L(y)$, tem-se:

$$\begin{aligned} L(ay_1 + by_2) &= (ay_1 + by_2)'' + p(ay_1 + by_2)' + q(ay_1 + by_2) \\ &= (ay_1)'' + (by_2)'' + p(ay_1)' + p(by_2)' + q(ay_1) + q(by_2) \end{aligned}$$

$$= a(y_1'' + py_1' + qy_1) + b(y_2'' + py_2' + qy_2) = aL(y_1) + bL(y_2).$$

Uma vez que $L(y_1) = L(y_2) = 0$, segue-se que $L(ay_1 + by_2) = 0$, e, portanto, $ay_1 + by_2$ é solução de $L(y)$. ■

Com isso, se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ forem soluções da equação do calor, então qualquer função da forma $au(x, t) + bv(x, t)$, onde a e b são constantes, será também uma solução. É possível dizer que a solução do calor é linear, ou ainda, uma combinação linear de soluções que é também uma solução. Esse é o chamado princípio da superposição enunciado acima, que nos garante que qualquer múltiplo de uma solução da equação

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

também é uma solução, o qual vale também para combinações lineares de três ou mais soluções. Portanto qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t)$$

onde os c_n são constantes e os u_n são as funções definidas em (A.8), é solução da equação do calor e dos problemas de valores iniciais. Se a condição inicial de $f(x)$ for da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

então, nesse caso, um candidato a solução da equação do calor e de seu PVI e PVF será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{\frac{-n^2\pi^2\alpha^2 x}{l}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (\text{A.9})$$

Pelo método de separação de variáveis, chega-se a uma expressão razoável a candidato à solução da equação do calor. Na expressão (A.9) os coeficientes c_n deviam ser escolhidos de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Esses c_n , conforme pode ser encontrado [25], são os chamados coeficientes de Fourier da função f , dada em $[0, l]$, e estendida para todo \mathbb{R} de modo a ser ímpar e periódica de período $2l$. Assim,

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Caso f não tenha a forma simples acima, vem à ideia de tomar somas infinitas, o que nos leva a motivação para o estudo das séries de Fourier proposta em 1822 por Joseph Fourier no seu trabalho intitulado “A Teoria Analítica do Calor”. Mas não é apresentado detalhes sobre tais séries, pois seu estudo demanda tempo e rigor, conforme pode ser visto em [25].

Durante seu trabalho no problema do calor, em 1835, Poisson⁵⁰, no seu trabalho intitulado “Teoria Matemática do Calor” demonstrou uma forma original de tratar a integração de equações diferenciais auxiliares, como a que expressa o problema do calor, dando origem ao que se chama de integral de Poisson. Então, o comprimento da barra no problema do calor de $[0, \pi]$, é entendida com a fórmula do somatório de Poisson:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n).$$

Com mais alguns procedimentos, que aqui são omitidos, por fugir do escopo desse trabalho, é apresentado sem maiores detalhes a integral de Poisson para a solução analítica da equação do calor que está diretamente ligada a Transformada de Fourier, como pode ser visto em [25] e [26]. A partir da teoria das equações de difusão, é abordado o seguinte resultado de existência e unicidade.

Teorema A.7.1.4: Seja $u(0, x)$ uma função contínua em \mathbb{R} tal que, para certas constantes $M_0 \geq 0$ e $b \geq 0$, se verifique $|u(0, x)| \leq M_0 e^{b|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então a função

⁵⁰Siméon Denis Poisson nasceu em Pithiviers, França a 21 de junho de 1781 e morreu em Paris no dia 25 de abril de 1842 foi um matemático e físico francês.

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds \quad (\text{A.10})$$

tem derivadas de todas as ordens a respeito de τ e de x , para $\tau > 0$, e é a única solução da Equação do Calor com a condição inicial $u(\tau, x) = u(0, x)$ para $-\infty < x < +\infty$.

Uma possível demonstração desse teorema pode ser encontrada em [25].

Portanto, o candidato a solução para um PVI e PVF da equação do calor é dado pela equação (A.10).

APÊNDICE B - ASPECTOS GERAIS

Nesta seção, é relatado os conceitos de Processos Estocásticos, o Movimento Browniano como um processo estocástico e as Integrais de Itô, a fim de ajudar na compreensão de algumas propriedades já mencionadas.

B.1 Processos Estocásticos

Quando se trata do valor de um ativo financeiro, são muitos os fatores que influenciam em seu preço. Pode ocorrer uma variação esperada no valor do ativo ou um evento totalmente inesperado, mas depois de acontecer, é sempre possível determinar as suas causas, mas é quase impossível de quantificá-las, conforme [24]. Assim, é necessária a teoria dos processos estocásticos⁵¹ para descrever essas flutuações.

Bachelier em 1900, de acordo com [24], fez a primeira ligação entre o valor de um ativo e as leis probabilísticas. Seu trabalho descreveu o valor do ativo como um processo estocástico, onde o preço do ativo segue uma distribuição gaussiana e não revela informação sobre variações futuras. Suas ideias não foram bem aceitas na sua época, mas mesmo assim Bachelier construiu os alicerces da matemática financeira moderna. Mesmo seu trabalho sendo importante para impulsionar o estudo dos mercados, o modelo de Bachelier tinha várias falhas.

O modelo de Bachelier não considerava que o valor de um ativo era influenciado ao longo do tempo, ou seja, que seu valor poderia se alterar com o tempo. Este modelo considerava que o processo relacionado ao valor dos ativos seguia uma distribuição gaussiana, o que implicava que o valor de um ativo podia atingir valores negativos, o que é absurdo. Sendo assim, muitos pesquisadores desenvolveram melhorias em modelos no mercado financeiro como Black e Scholes, introduzindo o valor temporal do dinheiro como seu fator determinístico e considerando que o preço do ativo segue uma distribuição log-normal. Por isso é necessário definir alguns conceitos.

Definição B.1.1: Seja uma variável aleatória X , que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_n , define-se uma *função de probabilidade* $P(x_i)$ que tem as seguintes propriedades;

⁵¹Informalmente, pode-se entender como um processo seguido por qualquer variável que tenha um comportamento aleatório.

- (i) Se $P(x_i) \geq 0$, para todo i , onde $P(x_i)$ é a probabilidade associada $X = x_i$;
- (ii) $\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$, ou seja, a soma de todas as probabilidades representa o espaço amostral.

Definição B.1.2: Fixado Ω , denotado por $\mathcal{P}(\Omega) = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \subset \Omega\}$, o conjunto das partes de Ω . Uma subcoleção $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ então $\mathcal{A}^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \in \mathcal{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \in \mathcal{F}$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \in \mathcal{F}$.

Exemplo B.1.3: Alguns exemplos de σ -álgebras:

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}^c\}$

Definição B.1.4: O par ordenado (Ω, \mathcal{F}) , constituído de um conjunto Ω e uma σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , é chamado de *espaço mensurável*, e qualquer elemento de \mathcal{F} é chamado de mensurável⁵².

Definição B.1.5: Uma *medida* num espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma função $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ que satisfaz:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_j)$ para quaisquer \mathcal{A}_j em \mathcal{F} disjuntos dois-a-dois.

Definição B.1.6: Uma *medida de probabilidade* P sobre um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é função $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz:

- (i) $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;
- (ii) Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \in \mathcal{F}$ e $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ é disjunto (isto é, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$, se $i \neq j$), então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_i).$$

⁵²Na Teoria da Medida, veja [36], mensurável representa um conjunto pertencente ao domínio de definição de uma função de medida.

Definição B.1.7: Fixada a medida de probabilidade P sobre a σ -álgebra \mathcal{F} , nomea-se a tripla (Ω, \mathcal{F}, P) de *espaço de probabilidade*.

Definição B.1.8: Uma *medida P -exterior* em um dado conjunto Ω é uma função $\theta^*: \varphi(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz:

- (i) $\theta^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) Se $A \subset B \subset \Omega$, então $\theta^*(A) \leq \theta^*(B)$;
- (iii) Para toda sequência $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de Ω , $\theta^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta^*(A_n)$.

Definição B.1.9: Uma medida μ obtida da medida exterior θ^* é chamada de *medida de Lebesgue*⁵³ em \mathbb{R} . Os conjuntos $E \subset \mathbb{R}$ tais que, $\theta^*(A \cap E) + \theta^*(A \setminus E) = \theta^*(A)$, para todo $A \subset \mathbb{R}$, são chamados de conjuntos mensuráveis a Lebesgue.

Definição B.1.10: Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula (de Lebesgue)* quando para todo $\varepsilon > 0$ existe uma família enumerável de intervalos abertos e limitados $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, e satisfaz:

- (i) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, isto é, $\{I_k\}$ é um recobrimento de E ;
- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \text{amp}(I_k) < \varepsilon$. Neste caso, a amplitude é tratada como sendo o comprimento do intervalo, ou seja, $|I| = b - a$ se $I = (a, b)$.

Definição B.1.11: *Espaço de probabilidade completo* é todo aquele que possui subconjuntos G de Ω , sendo Ω um conjunto arbitrário qualquer, com medida P -exterior nula, isto é: $P^*(G) = \inf \{P(F); F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0$.

Definição B.1.12: Seja F uma família de subconjuntos de Ω , se tiver uma menor σ -álgebra \mathcal{F} contendo F , \mathcal{F} será chamado de σ -álgebra gerado por F . Se F é a coleção de todos os

⁵³Henri Léon Lebesgue (1875-1941), foi um matemático francês contribuindo muito na teoria da medida.

subconjuntos abertos em Ω de um espaço topológico⁵⁴, então $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ é chamado de σ -álgebra de Borel⁵⁵.

Definição B.1.13: Os subconjuntos $F \subset \Omega$ que são membros de uma σ -álgebra \mathcal{F} são chamados de *conjuntos mensuráveis* (em relação à σ -álgebra \mathcal{F}), ou conjuntos \mathcal{F} -mensuráveis. Considere um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , então uma função: $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado \mathcal{F} -mensurável se: $Y^{-1}(F) = \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in F\} \in \mathcal{F}$ para todos os conjuntos abertos $F \subset \mathbb{R}$, ou, de modo equivalente, para todos os conjuntos de Borel $F \subset \mathbb{R}$. Neste caso, os conjuntos mensuráveis recebem o nome de borelianos, e os elementos $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ é chamado o conjunto de Borel.

Definição B.1.14: Dado um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *variável aleatória contínua* se $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Definição B.1.15: Seja X uma variável aleatória contínua em (Ω, \mathcal{F}, P) ; a sua *função distribuição de probabilidade* $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, é definida por $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Definição B.1.16: Seja X uma variável aleatória contínua em (Ω, \mathcal{F}, P) , a sua *função densidade de probabilidade* $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, quando existe, é definida por $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$, $x \in \mathbb{R}$ onde $F_X(x)$ é a respectiva função de distribuição, e $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) dy = 1$.

Definição B.1.17: O *valor esperado* de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade f_X é definida por $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$. A *variância* de X é definida por $\sigma_X^2 = var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.

⁵⁴Se Ω é um conjunto e τ é uma família de subconjuntos de Ω (i.e. $\tau \subset P(\Omega)$). O τ é uma topologia em Ω se as seguintes exigências forem satisfeitas:

- (i) $\emptyset \in \tau, \Omega \in \tau$;
- (ii) Se $A_\alpha \in \tau$, para todo $\alpha \in A$, então $A_{\alpha \in A} \cup \alpha \in \tau$;
- (iii) Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.

Se τ é uma topologia em Ω , então (Ω, τ) é um espaço topológico. Os conjuntos de τ são chamados abertos com relação a τ . Os complementos dos conjuntos de τ são chamados fechados.

⁵⁵Félix Édouard Justin Émile Borel, nasceu em Saint-Affrique no dia 7 de janeiro de 1871 e morreu em Paris no dia 3 de fevereiro de 1956. Foi um matemático e político francês e pioneiro da teoria da medida e suas aplicações a teoria da probabilidade.

Definição B.1.18: Uma variável aleatória $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, com \sim representando equivalência, definida no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) diz-se ter *distribuição normal* se tem função densidade de probabilidade gaussiana⁵⁶ dada por $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty, \sigma > 0$. Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e Z é denominada por variável aleatória normal.

Definição B.1.19: Um *processo estocástico* é uma coleção parametrizada de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$, sendo $X_t = X(t) = X(t, \omega) = X_t(\omega)$, definido em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e assumindo valores em \mathbb{R} . O espaço de parâmetros T geralmente é o intervalo $[0, \infty)$, podendo ser também o intervalo $[a, b]$, onde a, b são inteiros não negativos. Para cada $t \in T$ fixado tem-se uma variável aleatória $\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega$. Se $\omega \in \Omega$ for fixado, pode ser considerada a função $t \rightarrow X_t(\omega); t \in T$ que é chamado o caminho de X_t , ou seja, uma função que depende de t .

Em outras palavras, um processo estocástico é um fenômeno que varia em algum grau, de forma não previsível, à medida que o tempo passa, pode ser, por exemplo, a variação do tráfego em um cruzamento, a variação diária no tamanho do estoque de uma empresa, a variação minuto a minuto do índice IBOVESPA⁵⁷, a variação no estado de um sistema de potência, a variação no número de chamadas feitas a uma central telefônica.

Pode-se observar logo abaixo um exemplo de um processo estocástico, sobre o índice Ibovespa mencionado acima. O gráfico mostra o tempo expresso da abertura do índice pela manhã até aproximadamente às cinco horas da tarde. Os pontos mostrados representam o número de ações das empresas que formam o índice. Os pontos equivalem ao valor da cotação de cada uma delas pela quantidade de ações. Então, como o índice Ibovespa está em aproximadamente 50 mil pontos significa que se um investidor possuísse a mesma carteira hipotética que o forma, teria exatamente R\$ 50 mil em ações. Já o número verde nos detalhes representa a oscilação das ações ao longo do dia, ou seja, se o número for verde a ação teve uma alta no preço, se for vermelho as ações sofreram baixa nos preços. Nos detalhes é possível observar uma alta de 1,61%, ou seja, o valor das ações teve uma alta com igual porcentagem, e

⁵⁶Essa expressão se deve a Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Braunschweig, 30 de abril de 1777, e morreu em Göttingen, 23 de fevereiro de 1855. Foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência.

⁵⁷Índice Bovespa é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações das ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo.

o número 795,52 representa a oscilação dos pontos para cima, pois está na cor verde que representa um valor positivo.

Um processo estocástico pode ocorrer tanto a tempo discreto como a tempo contínuo, neste trabalho é feito um tratamento somente a tempo contínuo. Nesse exemplo, o tempo é contínuo, pois o índice é analisado durante todo o tempo sem saltos.

Figura 3: Índice IBOVESPA.



Fonte: BM&FBOVESPA.

B.2 Movimento Browniano como um Processo Estocástico

O Movimento Browniano surgiu nas observações no campo da Biologia através de movimentos intermitentes de partículas orgânicas e inorgânicas em suspensão em líquidos. Esse é um exemplo de processo estocástico utilizado na Física para descrever o movimento de partículas. É um modelo matemático para descrever, em cada momento, depois de um instante inicial, um fenômeno aleatório.

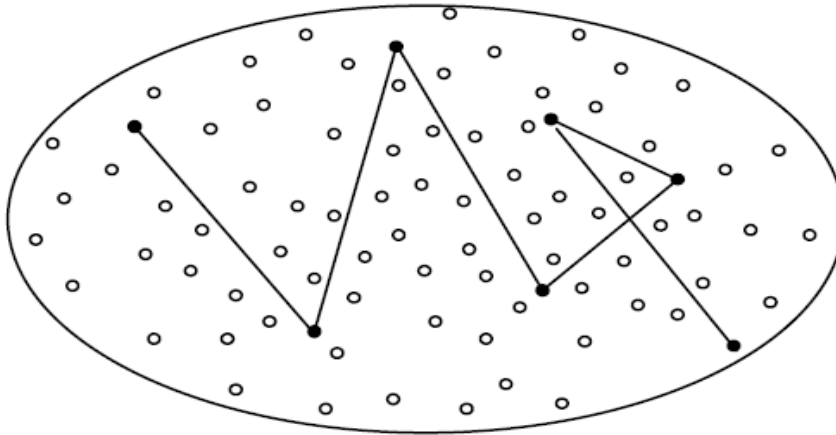
Em 1828, o botânico escocês Robert Brown observou que grãos de pólen suspensos em líquido realizavam um movimento irregular. Esse movimento pode ser utilizado na Física para descrever o movimento de pequenas partículas sujeitas a um grande número de pequenos choques aleatórios. O movimento oriundo a partir de choques aleatórios recebeu o nome de Movimento Browniano em homenagem a Robert Brown, mas também são conhecidos como Processo de Wiener em homenagem a Norbert Wiener, que em 1923 desenvolveu a teoria matemática deste movimento, conforme [5] e [21].

Bachelier em 1900 foi o primeiro a aplicar o movimento browniano no âmbito das finanças, mas sem um rigor matemático. Mesmo assim, muitos consideram Albert Einstein, grande físico do século XX, o primeiro a analisar este fenômeno do ponto de vista físico em 1905, conforme pode ser visto em [21], deixando a Teoria do Movimento Browniano tal qual como se conhece. Inicialmente Einstein não considerou que sua teoria explicasse o movimento Browniano, após o artigo de 1828 de Brown, conforme sua própria menção no artigo [21]: “É possível que os movimentos a serem discutidos aqui sejam idênticos ao denominado ‘Movimento Browniano’; no entanto, a informação a mim disponível é tão imprecisa que não posso efetuar qualquer julgamento a respeito”. Este movimento se deve à solução obtida para a densidade de distribuição de partículas dispersas no líquido, cuja forma matemática segue uma função de densidade de probabilidade gaussiana. Logo mais tarde, Einstein foi informado que seu trabalho descrevia realmente o movimento Browniano. Com isso, tornou-se base para a análise de muitos fenômenos nos mais diversos ramos do conhecimento, dentre os quais a Biologia, a Química, Física, e até mesmo Finanças.

Na área de Finanças, a Teoria do Movimento Browniano encontrou uma grande aplicação através na teoria de Black & Scholes, conforme [5]. Como foi mencionado, estes dois pesquisadores assumiram que a dinâmica de preços de um determinado ativo segue um Movimento Browniano, e obtiveram a partir desta proposição uma equação estocástica cuja solução permite a precificação de uma opção. Com os avanços da tecnologia de informação, principalmente na última década do século XXI, a evolução temporal de preços atingiu uma alta resolução, ou seja, é possível obter dados da variação do preço de um ativo financeiro a cada minuto durante uma transação no mercado de valores. Ainda, em função disto, muitos se perguntam: a dinâmica de preços do mercado segue realmente um Movimento Browniano? Não é detalhado sobre esse questionamento, pois neste trabalho é assumido que o mercado segue um movimento browniano. Para maiores discussões pode-se consultar [31].

Para descrever matematicamente o movimento é natural que se use o conceito de um processo estocástico interpretado como a posição no tempo t do grão de pólen.

Figura 4: Movimento intermitente de um grão de pólen observado ao microscópio.



Fonte: Bessada (2005, p. 91).

A seguir o processo estocástico que descreve matematicamente o movimento browniano.

Definição B.2.1: O processo de Wiener é um processo estocástico $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$ tal que:

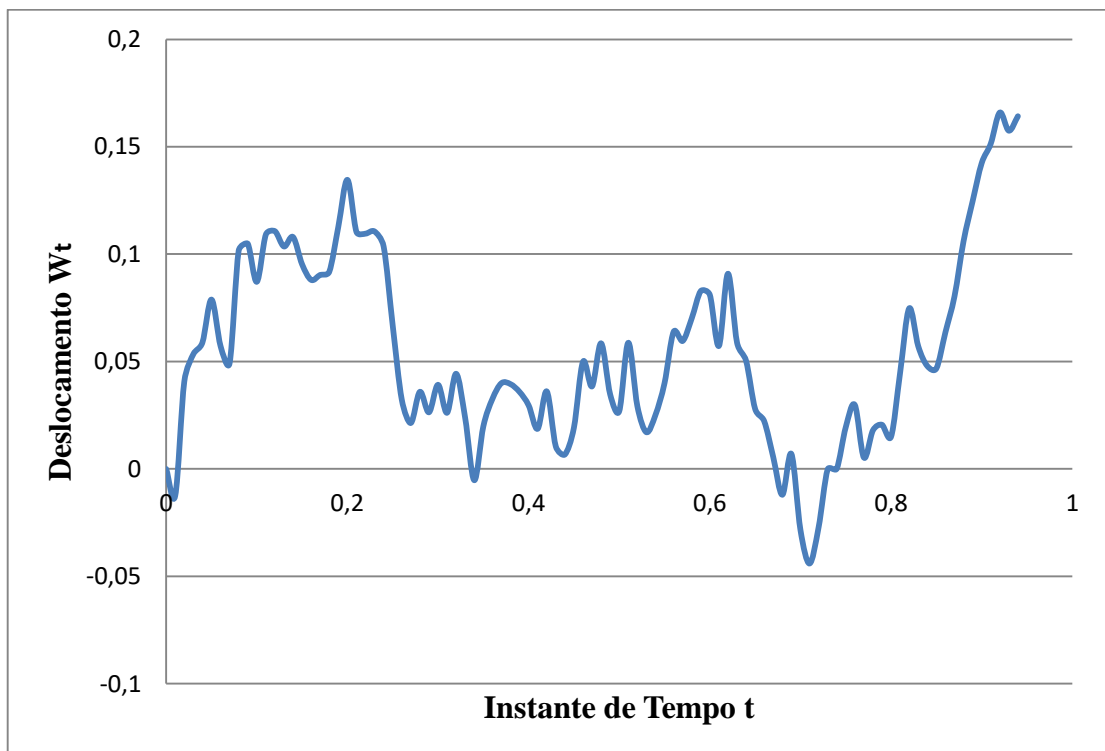
- (i) $P(\{\omega: B_0(\omega) = 0\}) = 1$, onde P uma medida de probabilidade.
- (ii) Para quaisquer $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ segue uma distribuição normal com média zero e variância $t - s$, ou seja, possui distribuição gaussiana;
- (iii) $B_{t_2} - B_{t_1}$ e $B_{t_4} - B_{t_3}$ são independentes desde que $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, ou seja, o processo possui incrementos independentes;
- (iv) As trajetórias $t \rightarrow B_t$ contínuas.

Em outras palavras, o movimento browniano é um fenômeno que ocorre durante um tempo de observação relacionado ao movimento de agitação térmica das moléculas do meio e devido a colisões entre as moléculas. Não é possível deixar de notar, que a teoria de Einstein para o movimento browniano forneceu um enorme suporte para a teoria atômica da matéria que surgia já no século XX. Einstein percebeu que o movimento errático das partículas em colisão era mais bem descrito em termos probabilísticos, conforme [21]. O modelo probabilístico mais simples que permite um entendimento das leis do movimento browniano de partículas é o

modelo do passeio aleatório em uma dimensão. Um exemplo do passeio aleatório unidimensional é considerar uma partícula com movimentos restritos apenas a um eixo de deslocamento. A partícula parte da origem em $t = 0$ e, a cada intervalo de segundos, move-se de acordo com alguma lei probabilística: como por exemplo, ela pode dar um passo de tamanho c para a direita com probabilidade $\frac{1}{2}$ ou um passo para a esquerda, também de tamanho c , com probabilidade $\frac{1}{2}$.

O processo de Wiener possui uma trajetória de um passeio aleatório que depende do instante de tempo t . A figura abaixo gerada no software Excel descreve uma possível trajetória de uma partícula cujo movimento é definido, em termos estocásticos, por um movimento browniano unidimensional no intervalo de tempo $[0, 1]$. Nessa figura, o movimento corresponde fisicamente, ao exemplo do movimento de uma partícula sujeita, em cada instante t , a constantes mudanças de direções, cujos deslocamentos são observados.

Gráfico16: Trajetória de um Movimento Browniano



Fonte: Autor.

Apesar de o gráfico parecer ser suave, se aproximar seus traços com um zoom, verifica-se que ele é formado pela ligação de “bicos” produzidos pelo processo aleatório. Uma função

desta forma não pode ser integrada ou derivada por métodos convencionais do cálculo usual, conhecido muitas vezes como o cálculo newtoniano.

Para gerar trajetórias do gráfico 1 deste processo, sugere-se seguir a sequência de instruções descrita na figura 4 no software Excel. Para cada instante de 0,01 unidades de tempo gerou-se o valor do incremento do processo. Para determinar o valor do processo em cada instante na coluna B, toma-se cada incremento da coluna C adicionado ao valor estado do processo no instante anterior. A função =Aleatório() na coluna D gera valores aleatórios entre 0 e 1. Já a função =Inv.Norm() nos dá o inverso da distribuição cumulativa normal para a média 0 e variância 1 especificados. Enquanto a distribuição normal cumulativa Dist.Norm recebe um valor e calcula a probabilidade cumulativa daquele valor, a função Inv.Norm recebe uma probabilidade e calcula o valor de x que a gerou.

Figura 5: Instruções usadas para obter a trajetória do gráfico 1.

	A	B	C	D
1	Movimento Browniano			
2				
3		Variância= 1		
4				
5	instante t	Wt	incrementos W_001	gerador
6	0	0		=Aleatório()
7	0,01	=C7	=Inv.Norm(D7;0;3*0,01)	=Aleatório()
8	=A7+0,01	=B7+C8	=Inv.Norm(D8;0;3*0,01)	=Aleatório()
9	=A8+0,01	=B8+C9	=Inv.Norm(D9;0;3*0,01)	=Aleatório()
10	=A9+0,01	=B9+C10	=Inv.Norm(D10;0;3*0,01)	=Aleatório()
11	=A10+0,01	=B10+C11	=Inv.Norm(D11;0;3*0,01)	=Aleatório()
12				

Fonte: Autor.

Wiener construiu matematicamente o movimento browniano, mas Einstein já o tinha formalizado sem saber, em seu trabalho. Com isso, existem várias formas de se construir o movimento browniano, por exemplo, uma construção explícita que trata o processo como uma série de funções contínuas com coeficientes aleatórios e que possuem convergência, conforme pode ser visto em [33].

A formalização dada por Wiener teve grande influência de um matemático soviético chamado Andrey Nicolayevich Kolmogorov. Kolmogorov foi muito influente na criação da teoria da probabilidade moderna, e dentre suas contribuições deixadas para a matemática

existem dois teoremas de grande interesse no estudo da probabilidade avançada ligados ao estudo de processos estocásticos e que tem uma grande importância para a construção do processo de Wiener. A construção do processo de Wiener como descrito acima demanda certo trabalho e requer conceitos mais aprofundados, porém com o auxílio dos teoremas de Kolmogorov é garantido que esse processo existe e é contínuo.

Definição B.2.2: Para qualquer conjunto finito $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$, as distribuições conjuntas das variáveis aleatórias $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ é denominada distribuição de *dimensão finita* do processo se $F_{(t_1, t_2, \dots, t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$.

Definição B.2.3: Um processo estocástico $\{X'_t\}_{t \in [0, T]}$ é dito uma *modificação* de $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ se $P(X_t = X'_t) = 1$, onde X_t e X'_t pertencem ao espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

Teorema B.2.4 (Extensão do Teorema de Kolmogorov): Seja,

$$\{F_{(t_1, t_2, \dots, t_n)}, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad t_j \in T, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

uma família de funções de distribuição de dimensão finita satisfazendo as seguintes condições de consistência de Kolmogorov:

- (i) $F_{(t_1, \dots, t_n, t_{n+1})}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow F_{(t_1, \dots, t_n)}(x_1, \dots, x_n)$, com $x_{n+1} \rightarrow +\infty$.
- (ii) Se π é uma permutação de $(1, 2, \dots, n)$ e a função F é denotado por $\pi y = (y\pi(1), \dots, y\pi(n))$ para todo n -vetor, tem-se $F_{\pi t}(\pi x) = F_{(t x)}$ para todo x, t, π , e n .

Então existe um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e um processo estocástico $\{B_t\}$ tais que

$$F_{(t_1, t_2, \dots, t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\{\omega: B_{t_1}(\omega) \leq x_1, \dots, B_{t_n}(\omega) \leq x_n\}).$$

O teorema (B.2.4) também é conhecido como Teorema de Consistência de Kolmogorov e sua demonstração pode ser encontrada em [32].

Teorema B.2.5 (Teorema da Continuidade de Kolmogorov): Seja o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Considere o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ satisfazendo a propriedade,

$$E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq D|t - s|^{1+\beta}; \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{B.1})$$

onde α, β , e D são constante reais não negativas. Então, existe um processo estocástico $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$, tal que $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$ é uma modificação contínua de $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$. Com isso, o processo de Wiener satisfaz a condição (4.1) de Kolmogorov se $\alpha = 4$, $D = n^2$ e $\beta = 1$, por exemplo, portanto o processo ou Movimento Browniano terá uma versão contínua.

Também conhecido como Critério de Kolmogorov, uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [13].

Agora é só provar que $E^x[(B_t - B_s)^4] = n^2(t - s)^2$ satisfaz a condição (B.1) do teorema (B.2.5), onde E^x denota a expectativa média com relação a probabilidade P . É definido antes algumas propriedades da expectativa do movimento browniano que podem ser mais bem compreendidas em [36],

- (i) $E^x[B_t] = x, \quad \forall t \geq 0;$
- (ii) $E^x[(B_t - x)^2] = nt, \quad E^x[(B_s - x)^2] = ns, \quad \forall t \geq 0;$
- (iii) $E^x[(B_t - x)(B_s - x)] = n, \quad \min(s, t);$
- (iv) $E^x[(B_t - B_s)^2] = n(t - s), \quad \text{se } t \geq s;$
- (v) $E^x[(B_t - B_s)^2] = E^x[(B_t - x)^2 - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)^2] = n(t - 2s + s) = n(t - s) \quad \text{quando } t \geq s.$

Demonstração: Assim segue,

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = E^x[(B_t - B_s)(B_t - B_s)(B_t - B_s)(B_t - B_s)],$$

reescrevendo,

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = E^x\{[(B_t - x) - (B_s - x)][(B_t - x) - (B_s - x)][(B_t - x) - (B_s - x)][(B_t - x) - (B_s - x)]\},$$

distribuindo,

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^4] &= E^x\{[(B_t - x)(B_t - x) - (B_t - x)(B_s - x) - (B_t - x)(B_s - x) \\ &\quad + (B_s - x)(B_s - x)][(B_t - x)(B_t - x) - (B_t - x)(B_s - x) \\ &\quad - (B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)(B_s - x)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^4] &= E^x\{[(B_t - x)^2 - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)^2][(B_t - x)^2 \\ &\quad - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)^2]\} \end{aligned}$$

segue,

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = E^x\{[(B_t - x)^2 - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)^2]^2\}.$$

Sabe-se que

$$E(a + b) = E(a) + E(b),$$

então segue,

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^4] &= \{E^x[(B_t - x)^2] - E^x[2(B_t - x)(B_s - x)] + E^x[(B_s - x)^2]\} \\ &\quad \{E^x[(B_t - x)^2] - E^x[2(B_t - x)(B_s - x)] + E^x[(B_s - x)^2]\}. \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

então segue,

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^4] &= \{E^x[(B_t - x)^2] - 2E^x[(B_t - x)(B_s - x)] + E^x[(B_s - x)^2]\} \\ &\quad \{E^x[(B_t - x)^2] - 2E^x[(B_t - x)(B_s - x)] + E^x[(B_s - x)^2]\}. \end{aligned}$$

Pelas propriedades (ii) e (iii), segue

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = (nt - 2ns + ns)(nt - 2ns + ns)$$

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = n^2t^2 - 2n^2ts + n^2ts - 2n^2ts + 4n^2s^2 - 2n^2s^2 + n^2ts \\ - 2n^2s^2 + n^2s^2$$

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = n^2t^2 - 2n^2ts + n^2s^2$$

$$E^x[(B_t - B_s)^4] = n^2(t - s)^2.$$

Portanto é obtida uma versão contínua do movimento Browniano. ■

Outro fato importante das propriedades do movimento browniano e que não pode ficar de lado, por não ser difícil sua verificação é que seus incrementos são independentes. Então, B_t terá incrementos independentes se, $B_t, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ é independente para todo $0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_k$. Para provar isso, considere o fato de que as variáveis aleatórias seguem uma distribuição gaussiana e são independentes e não são correlacionadas. Por isso, é suficiente provar que

$$E^x \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

tal fato é suficiente para provar a independência dos incrementos, pois a esperança do produtos desses incrementos serão nulos por que as variáveis não são correlacionadas e são independentes, onde $t_i < t_j$, que segue a partir da forma

$$cE^x \left[B_{t_i}B_{t_j} - B_{t_{i-1}}B_{t_j} - B_{t_i}B_{t_{j-1}} + B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}} \right] = n(t_i - t_{i-1} - t_j + t_{j-1})$$

$$cE^x \left[B_{t_i}B_{t_j} - B_{t_{i-1}}B_{t_j} - B_{t_i}B_{t_{j-1}} + B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}} \right] = 0. \quad (\text{B.3})$$

Como para cada $s < t$, $B_t - B_s$ vai ser independente de um instante anterior dentro de um intervalo $[0, t_k]$. Então, dado um processo em um instante $B_s = x_0$, nenhuma outra informação sobre os valores de B_τ , com $\tau < s$ vai ter efeito a distribuição de probabilidade em $B_t - B_s$. Onde o coeficiente c é representado por uma matriz de variáveis aleatórias com índices

independentes, mas não é apresentado detalhes sobre tal matriz, para maiores informações veja [36].

A partir disso, $B_t - B_s$ é independente de \mathcal{F} se $s < t$, como demonstrado a seguir.

Demonstração: Então, suficientemente é preciso provar (B.2). Dessa forma, B_t terá incrementos independentes, segue

$$E^x \left[B_{t_i} B_{t_j} - B_{t_i} B_{t_{j-1}} - B_{t_{i-1}} B_{t_j} + B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} \right]$$

$$E^x \left[B_{t_i} B_{t_j} - B_{t_i} B_{t_{j-1}} - B_{t_{i-1}} B_{t_j} + B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} \right] = E^x \left[(B_{t_i} - x)(B_{t_j} - x) - (B_{t_i} - x)(B_{t_{j-1}} - x) - (B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_j} - x) + (B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_{j-1}} - x) \right],$$

onde $t_i < t_j$.

$$\text{Como } E^x[(B_t - x)^2] = E^x\{[(B_t - x)(B_t - x)]^2\} = nt,$$

segue,

$$\begin{aligned} E^x \left[B_{t_i} B_{t_j} - B_{t_i} B_{t_{j-1}} - B_{t_{i-1}} B_{t_j} + B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} \right] &= E^x \left[(B_{t_i} - x)(B_{t_j} - x) \right] \\ &\quad - E^x \left[(B_{t_i} - x)(B_{t_{j-1}} - x) \right] - E^x \left[(B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_j} - x) \right] + E^x \left[(B_{t_{i-1}} - x) \right. \\ &\quad \left. (B_{t_{j-1}} - x) \right] \end{aligned}$$

$$E^x \left[B_{t_i} B_{t_j} - B_{t_i} B_{t_{j-1}} - B_{t_{i-1}} B_{t_j} + B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} \right] = nt_i - nt_i - nt_{i-1} + nt_{i-1} = 0.$$

Logo, está provado que o movimento Browniano possui incrementos independentes. ■

B.3 As Integrais de Itô

Em 1951 uma teoria matemática rigorosa foi desenvolvida pelo japonês Kiyoshi Itô para o tratamento das soluções das equações diferenciais estocásticas. O cálculo de Itô é preferencialmente aplicado em finanças, como é visto mais a frente, mas foi desenvolvido a princípio para o cálculo da trajetória de foguetes. Itô desenvolveu uma forma de dar sentido a integral $\int_a^b X_t dB_t$, onde $(B_t)_{t \geq 0}$ é o movimento Browniano unidimensional e $(X_t)_{t \in [a,b]}$ é um processo estocástico. Mas, existem controvérsias sobre a aceitação do cálculo de Itô. Essa controvérsia se dá pelo fato de existir o cálculo de Stratonovich⁵⁸ para o tratamento de integrais como a referida acima. O que difere o cálculo de Stratonovich do cálculo de Itô é somente a tomada dos pontos t_j^* para a integração no intervalo $[t_j, t_{j+1}]$. Itô corresponde à escolha $t_j^* = t_j$ e Stratonovich à escolha $t_j^* = \frac{(t_j + t_{j+1})}{2}$. Em diversas situações é mais apropriado o uso da integral de Stratonovich. Entretanto essa controvérsia não será abordada aqui e nem a construção das integrais de Stratonovich. Para maiores detalhes pode se consultar [33], [34] e [36].

Para iniciar à breve construção das integrais de Itô, considere o problema de valor inicial da seguinte forma,

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), t) dt & t \in (t_0, t_k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

onde $f: \mathbb{R} \times [t_0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que descreve o comportamento de um fenômeno em estudo e x_0 é uma constante qualquer, sendo neste caso $t_0 = 0$. Neste caso, a solução procurada é uma função $x: (t_0, t_k) \rightarrow \mathbb{R}$ para todo t em algum intervalo satisfazendo as igualdades acima. Porém, em diversas situações o interesse pode estar em um modelo que descreva também a ação de algum fenômeno aleatório, como algum tipo de perturbação ou ruído, num intervalo de tempo $[t_0, t_k]$, com $k = 1, 2, \dots, n$. Como uma possível descrição para algumas situações desse tipo, tem-se as chamadas equações diferenciais estocásticas:

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

⁵⁸Ruslan Leontyevich Stratonovich (1930-1997), foi um russo físico, engenheiro e probabilista e um dos criadores da teoria das equações diferenciais estocásticas.

onde $f(s, x), g(s, x)$, sendo $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ são definidas no intervalo $[a, b]$ para todo $s \in [t_{k-1}, t_k]: \mathbb{R} \times [t_0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções e $(B_t)_{t \in [t_0, t_k]}$ é um movimento Browniano.

Com isso a solução procurada é um processo estocástico $(X_t)_{t \in [t_0, t_k]}$ que satisfaça a equação integral estocástica, que nada mais é que a forma integral da Equação Diferencial Estocástica (EDE) logo abaixo, cuja demonstração pode ser visto em [33], [34] e [36],

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} f(X_s, s) ds + \int_{t_0}^{t_k} g(X_s, s) dB_s.$$

Quanto à primeira integral, $\int_{t_0}^{t_k} f(X_s, s) ds$, se fixar-se sua aleatoriedade $\omega = \omega_0$, onde $\int_{t_0}^{t_k} f(X(s, \omega), s) ds$, essa integral pode-se transformar em uma integral de Riemann⁵⁹ $\int_{t_0}^{t_k} F(\omega_0, s) ds$ com $F(\omega, s) = f(X(s, \omega), s)$. O valor dessa integral dependerá do valor de $\omega = \omega_0$ e, portanto, a integral é uma variável aleatória sendo uma função mensurável de ω . Já com a segunda integral $\int_{t_0}^{t_k} g(X_s, s) dB_s$ não se aplica o mesmo método, pois o integrando, o movimento Browniano possui variação ilimitada e não segue as regras usuais do cálculo. Agora, é apresentado algumas propriedades essenciais na construção da integral de Itô.

Definição B.3.1: Uma família de *sub- σ -álgebra* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é chamado de *filtração* no espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) se $0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ isto é, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é crescente.

Definição B.3.2: Um processo estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ é dito *adaptado a uma filtração* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se para cada tempo $t \geq 0$, a variável aleatória X_t é mensurável em relação à σ -álgebra. Todo processo adaptado à sua filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, também é chamado de *história* do processo até o tempo t .

Definição B.3.3: Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ uma filtração em σ -álgebras. O tempo T pode ser contínuo ou discreto. Um processo estocástico $(X_t)_{t \in T}$ a valores reais definidos em (Ω, \mathcal{F}, P) é dito um *martingale* em relação à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ e à medida P se

⁵⁹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria.

- (i) $E[|X_t|] < \infty$ para todo $t \in T$;
- (ii) $(X_t)_{t \in T}$ é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$;
- (iii) $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ para todo $t \geq s$.

A construção das integrais de Itô é baseada nas definições acima. Assim, dado o movimento Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ definido em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , considere uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ do espaço (Ω, \mathcal{F}, P) tal que, $\sigma(B_s, 0 \leq s \leq t) \subset \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$ e $\sigma(B_{t+\lambda} - B_t, \lambda \geq 0)$ com $\lambda = 1, 2, \dots, n$, é independente de \mathcal{F}_t para todo $t \geq 0$. Toma-se $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ sendo uma filtração do movimento Browniano, com $(B_t)_{t \geq 0}$ sendo um martingale em relação $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Considere o intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$, um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , onde é definido o movimento Browniano ou processo de Wiener $(B_t)_{t \geq 0}$ e uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Seja $M^2 = M^2(a, b)$ como uma classe dos processos estocásticos $(X_t)_{t \in [a, b]}$ que satisfazem:

- (i) $(X_t)_{t \in [a, b]}$ é um processo mensurável, isto é, a função $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ é $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável, onde \mathcal{B} denota a σ -álgebra de Borel no intervalo $[a, b]$;
- (ii) $(X_t)_{t \in [a, b]}$ é adaptado à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, ou seja, para cada $t \in [a, b]$, a variável aleatória X_t é \mathcal{F}_t -mensurável;
- (iii) $E\left(\int_a^b |X_t|^2 dt\right) < \infty$.

Pode-se definir a Integral de Itô para toda classe M^2 . Seja $(X_t)_{t \in [a, b]}$ um processo estocástico em $M^2(a, b)$. Fixado uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ na qual supõe-se serem válidas as integrais de Itô e sendo φ um processo elementar, com

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

onde $I_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ é uma função que indica a escolha do intervalo $[t_i, t_{i+1})$ entre $[a, b]$.

Tem-se que,

$$\int_a^b \varphi(t) dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

é um processo elementar no intervalo $[a, b]$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_a^b |X_t - \varphi_n(t)|^2 dt \right) = 0$$

e define-se

$$\int_a^b X_t dB_t \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(t) dB_t \quad (\text{B.4})$$

com o limite em $L^2(\Omega)$, onde L^2 é a imagem inversa por φ de qualquer conjunto de Borel pertencente à σ -álgebra do produto $\mathcal{B}_{[a,b]} \times \mathcal{F}$. Pelo fato de ser mensurável, o processo estocástico φ também pode ser pensado como uma variável aleatória definida no espaço $([a, b] \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{F}, \mu \times P)$.

Teorema B.3.4 (Isometria de Itô): Seja φ_n uma função elementar qualquer. Então, $\int_a^b \varphi_n(t) dB_t$, o integral estocástico de φ_n ao processo browniano é uma variável aleatória que pertence a L^2 , assim

$$E \left[\left(\int_a^b \varphi(t) dB_t \right)^2 \right] = E \left(\int_a^b \varphi^2(t) dt \right).$$

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [36].

O limite em (B.4) existe, pois pela Isometria de Itô para processos elementares, nota-se que

$$E \left[\left(\int_a^b \varphi_n(t) dB_t - \int_a^b \varphi_m(t) dB_t \right)^2 \right] = E \left(\int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt \right) \rightarrow 0$$

quando $n, m \rightarrow \infty$, pois para cada i e j com $\varphi^2(t_i)$ e $\varphi^2(t_j)$, é apreciado em algum momento do desenvolvimento da igualdade acima um produto que envolve o seguinte termo

$$E (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = 0,$$

assim, os termos vão se anular, nesse caso quando ao fazer passagem do limite com $n, m \rightarrow \infty$ será verificado que os dois lados da igualdade acima tende para zero, para maior verificação consulte [36]. O limite não depende da sequência φ_n escolhida. Toma-se outra sequência $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ que também satisfaça

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_a^b |X_t - \psi_n(t)|^2 dt \right) = 0.$$

Definida uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ pondo $\vartheta_{2n} = \varphi_n$ e $\vartheta_{2n-1} = \psi_n$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_a^b |X_t - \varphi_n(t) dt \right) = 0$$

e, isto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(t) dB_t$$

existe em $L^2(\Omega)$. Assim, as subsequências $\left\{ \int_a^b \varphi_n(t) dB_t \right\}_{n=1}^{\infty}$ e $\left\{ \int_a^b \psi_n(t) dB_t \right\}_{n=1}^{\infty}$ devem convergir para o mesmo limite. Logo, o valor para o qual essas sequências convergem é definida como a integral de Itô.

Depois de feita uma construção não generalizada para as integrais de Itô, basta calcular como exemplo a integral $\int_a^b B_t dB_t$. Mas, não é abordado com detalhes sobre soluções fortes e fracas para as integrais de Itô, e é feito um exemplo usando variação quadrática do movimento browniano. Para maiores detalhes sobre essas integrais veja [33]. Para calcular essa integral, é preciso inicialmente enunciar um lema.

Lema B.3.5 (Variação Quadrática do Movimento Browniano): Seja $[a, b]$ um intervalo em $[0, \infty)$, e suponha-se que $P_n = \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = b\}$ são partições de $[a, b]$, com $|P_n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \rightarrow b - a$$

em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Tem-se $B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}$ e $t_{i+1}^n - t_i^n$, seja

$$Q_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2.$$

Note que,

$$b - a = \sum_{i=0}^{k_n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n),$$

então,

$$Q_n - (b - a) = \sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - \sum_{i=0}^{k_n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n).$$

Sabe-se que,

$$\sum_{i=k}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^n a_i + \sum_{i=k}^n b_i$$

segue,

$$Q_n - (b - a) = \sum_{i=0}^{k_n-1} \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right).$$

Fazendo,

$$(Q_n - (b - a))^2 = \left\{ \sum_{i=0}^{k_n-1} \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) \right\}^2$$

$$(Q_n - (b - a))^2 = \left\{ \sum_{i=0}^{k_n-1} \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) \right\}$$

$$\left\{ \sum_{j=0}^{k_n-1} \left((B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right) \right\}$$

$$(Q_n - (b - a))^2 = \sum_{i=0}^{k_n-1} \sum_{j=0}^{k_n-1} \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) \left((B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right)$$

e assim,

$$E[(Q_n - (b - a))^2] = \sum_{i=0}^{k_n-1} \sum_{j=0}^{k_n-1} E \left[\left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) \left((B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right) \right].$$

Para $i \neq j$, de acordo com a independência dos incrementos, o termo do somatório pode ser escrito dessa forma

$$E \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) E \left((B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right) = 0$$

de fato, pois $E \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \right) = (t_{i+1}^n - t_i^n)$. Portanto,

$$E[(Q_n - (b - a))^2] = \sum_{i=0}^{k_n-1} E \left[\left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k_n-1} E[(Y^2 - 1)^2](t_{i+1}^n - t_i^n)^2$$

onde,

$$Y = Y_i^n = \frac{B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}}{\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Consequentemente, sendo $C = E[(Y^2 - 1)^2]$,

$$E[(Q_n - (b - a))^2] = C \sum_{i=0}^{k_n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \leq C |P_n|(b - a) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. ■

Exemplo B.3.6: Demonstre que $\int_a^b B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_b^2 - B_a^2) - \frac{1}{2}(b - a)$.

Demonstração: Para se chegar à igualdade acima, é preciso saber se o processo $(B_t)_{t \in [a, b]}$ está em $M^2(a, b)$. Então, veja algumas hipóteses que não podem ser deixadas de lado.

- (i) Assumir a mensurabilidade do movimento browniano, e sua prova que depende da continuidade das trajetórias será omitida aqui, mas pode ser encontrada em [33];
- (ii) Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ uma filtração adaptada ao processo $(B_t)_{t \geq 0}$;
- (iii) Por Fubini⁶⁰,

$$\int_a^b \int_a^b |B_t|^2 dt dB_t = \int_a^b \left(\int_a^b |B_t|^2 dB_t \right) dt$$

$$\int_a^b \int_a^b E(|B_t|^2) dt dB_t = \int_a^b E(|B_t|^2) dt$$

⁶⁰**Teorema de Fubini:** Seja $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$. Suponha que $\int_a^b f(x, y) dx$ exista para todo $y \in [c, d]$ e que $\int_c^d f(x, y) dy$ exista para todo $x \in [a, b]$. Então $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$. A aplicação desse teorema no item (iii) acima pode ser melhor compreendida em [33].

$$\int_a^b \int_a^b E(|B_t|^2) dt dB_t = E\left(\int_a^b |B_t|^2 dt\right)$$

$$\int_a^b \int_a^b E(|B_t|^2) dt dB_t = \int_a^b t dt = \frac{b^2 - a^2}{2} < \infty.$$

Com isso, pode-se considerar por (iii) que $(B_t)_{t \in [a,b]} \in M^2(a,b)$. Construindo processos elementares aproximando $(B_t)_{t \in [a,b]}$ e considere partições $P_n = \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = b\}$ do intervalo $[a,b]$ tais que $|P_n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\int_a^b B_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} B_{t_i^n} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) \quad (\text{B.5})$$

onde o limite é no sentido de $L^2(\Omega)$. Usando a identidade $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b-a)^2$ em (B.5), e de acordo com o lema (B.3.4),

$$\int_a^b B_t dB_t = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}^n}^2 - B_{t_i^n}^2) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2$$

$$= \frac{1}{2}(B_b^2 - B_a^2) - \frac{1}{2}(b-a).$$

O termo $-\frac{1}{2}(b-a)$ que aparece no final do cálculo do somatório mostra que a integral de Itô não segue realmente as regras do cálculo usual. Logo, está provada a igualdade em (B.3.5). ■

B.4 Equações Diferenciais Estocásticas

As equações diferenciais estocásticas (EDEs) são basicamente equações diferenciais com algum termo que descreve a ação de efeitos aleatórios que influencia o sistema. A teoria dessas equações remonta ao século XX, a partir dos trabalhos de Bachelier (1900), Einstein (1905), Wiener (1920), Ornstein – Uhlenbeck (1930), dentre outros. É comum que as equações

diferenciais ordinárias descrevam um comportamento dinâmico de um fenômeno em estudo, enquanto o termo estocástico descreve o ruído, ou seja, as perturbações aleatórias que influenciam esse fenômeno.

Ao descrever alguns fenômenos naturais em linguagem matemática encontra-se as equações diferenciais estocásticas, que têm importantes aplicações em praticamente todos os ramos da Ciência e Tecnologia, conforme [34]. Um dos primeiros estudos de EDE surgidos na literatura foi em 1930, trata-se do modelo de Ornstein – Uhlenbeck para o movimento Browniano, que é o movimento irregular de uma partícula suspensa num fluido. O estudo das EDEs se faz importante na aplicação do modelo de Black – Scholes. É feito aqui uma breve apresentação da existência e unicidade de soluções das equações diferenciais estocásticas. Para um melhor tratamento das mesmas pode-se consultar [33], [34] e [36].

Seja $(B_t)_{t \geq 0}$ um movimento browniano unidimensional definido em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ gerada pelo processo $(B_t)_{t \geq 0}$. Considere também que $(X_t)_{t \in [0, T]}$ é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Basta saber se existe algum processo estocástico da forma $(X_t)_{t \in [0, T]}$ que satisfaça uma dada equação diferencial estocástica como

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

essa equação diferencial estocástica assim como outras devem ser entendidas como equações integrais com integrais estocásticas no sentido de Itô ou de Stratonovich, como visto na seção anterior.

Se um processo $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$, satisfaz a equação (B.6), no intervalo $t_0 \leq t \leq T$, será então uma solução de (B.6). Se fixar f e g , cada solução do processo X vai depender do valor inicial dado X_{t_0} , com $s \leq t$ e do processo $(B_t)_{t \in [0, T]}$. Se esta solução existir para cada processo do movimento Browniano em consideração, pode-se dizer que a equação diferencial estocástica possui uma solução forte. Uma solução será fraca quando são dadas apenas as funções f e g , e a solução consiste em um espaço de probabilidade com uma filtração, e um processo adaptado a esta filtração, assim no qual o processo de Wiener não é especificado, isto é, à incógnitas tanto em X como em B . Não é tratado aqui sobre as condições de existência e unicidade de soluções fracas, somente as soluções fortes para as do tipo (B.6). Para maiores informações sobre soluções fortes e fracas pode se consultar [12], [33] e [36].

Em alguns casos, quando o trabalho com as equações diferenciais ordinárias é aprofundado, as vezes não é encontrado fórmulas explícitas para as suas soluções, o mesmo ocorre para as equações do tipo (B.6). Então, é necessário usar métodos numéricos para aproximar as soluções, porém esses métodos serão omitidos aqui. Mas, para um pesquisador interessado em encontrar essas tais soluções destinadas a algum problema em questão, primeiro é necessário saber se a solução existe e se é única. Agora será enunciado um teorema que garante a existência e a unicidade de soluções fortes de equações diferenciais estocásticas.

Teorema B.4.1 (Existência e Unicidade): Sejam $f, g: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições,

- (i) f e g são contínuas;
- (ii) Seja $\|f(t, x) - f(t, y)\| + \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq K\|x - y\|$ para todo $0 \leq t \leq T$ e $x, y \in \mathbb{R}$ (condição de Lipschitz⁶¹);
- (iii) Seja $\|f(t, x)\| + \|g(t, x)\| \leq K\sqrt{1 + \|x\|^2}$ para todo $0 \leq t \leq T$ e $x \in \mathbb{R}$ (condição de crescimento);
- (iv) Seja a variável aleatória $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$ e $E(X_0^2) < \infty$.

Então existe um processo $X: [t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que será solução forte da equação (B.6), admitindo uma única solução pela condição de Lipschitz e esse processo vai existir pela condição de crescimento. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [32].

⁶¹Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), foi um matemático alemão que contribuiu em várias áreas na matemática.

ANEXOS



INVESTINDO NA BOLSA DE VALORES

Guia básico para o Produtor Rural

**Bruno Campos Ferrelra da Silva
Carlos Alberto Mirez Tarrillo**

Ficha Catalográfica

Título: INVESTINDO NA BOLSA DE VALORES: Guia básico para o Produtor Rural

Tipo de trabalho: Cartilha desenvolvida como parte da pesquisa dissertação de mestrado intitulada Modelo de Black—Scholes como Alternativa de Investimento para os Produtores Rurais dos Vales do Jequetinhonha e Mucuri

Área: Modelagem Matemática

Autores: Bruno Ferreira Campos e Carlos Alberto Mirez Tarrillo

Revisão: Erasmo Carlos Gomes de Almeida

APRESENTAÇÃO

Conhecimento e informação são fundamentais para o crescimento e desenvolvimento de um investimento, seja na produção rural, comercial ou na industrial. As informações a respeito dos mercados serão abordados de maneira simples e objetiva, deixando claro que a cartilha busca instigar o produtor rural dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri a refletir sobre as alternativas de investimentos nos mercados financeiros.

Esta cartilha tem por objetivo orientar os produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri que desejam investir e operar grandes ou pequenas quantidades de dinheiro na Bolsa de Valores. Neste material é possível encontrar perguntas e respostas que irão esclarecer alguns procedimentos iniciais que se deve tomar para obter bons resultados com seus investimentos.

Os produtores rurais que desejam conhecer os mercados futuros, fazer investimentos em ações e em opções financeiras, terá como base neste resumo os principais conceitos que lhe ajudaram a entender como funciona os mercados. Proporcionando melhor entendimento acerca dos riscos e vantagens associadas a essas operações.

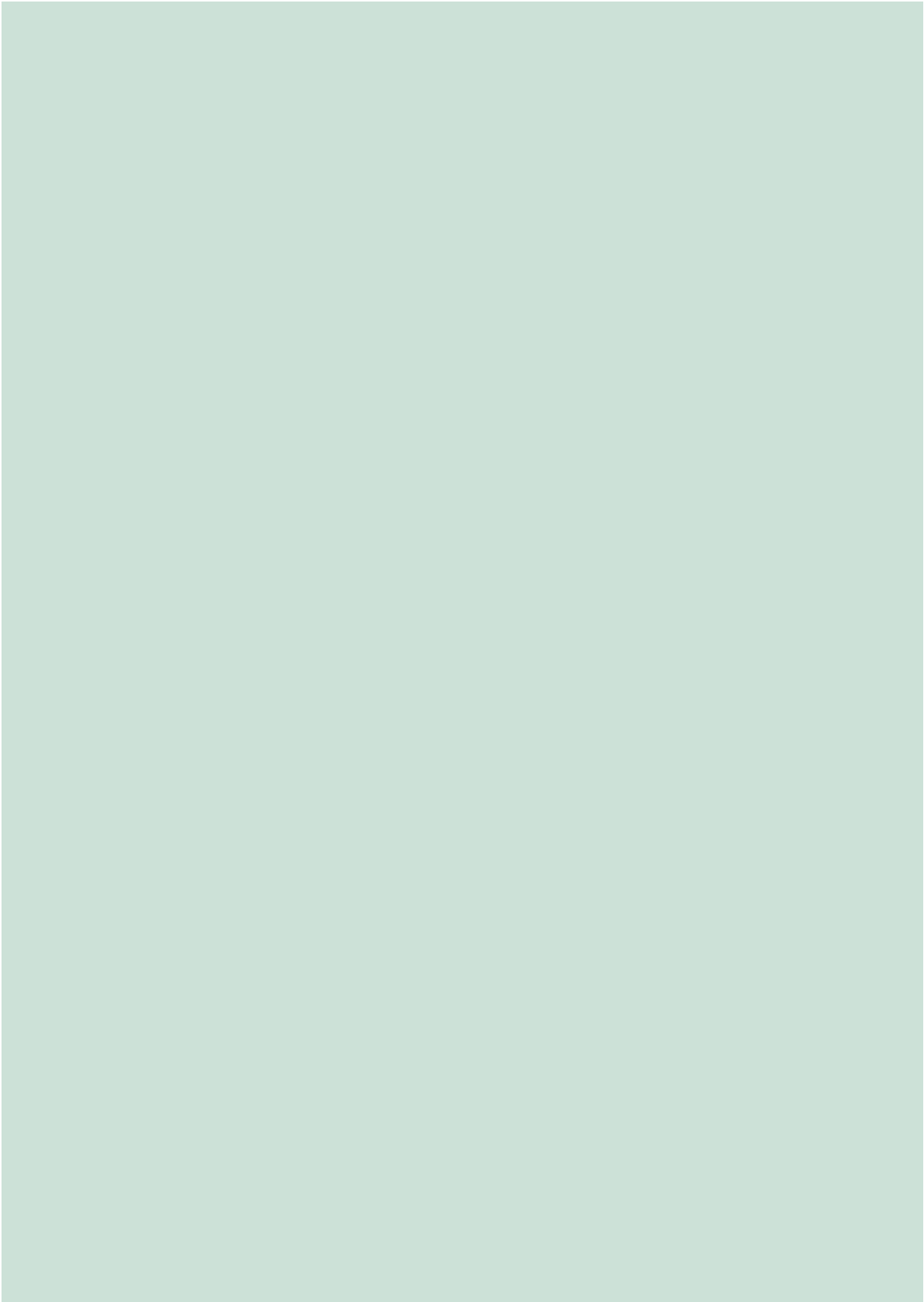
A cartilha é voltada para os produtores rurais, mas está aberta para interessados em aplicar algum capital na Bolsa.





ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	5
2	PRODUÇÃO RURAL	5
3	O QUE É BOLSA DE VALORES	6
4	QUAL O VALOR MÍNIMO QUE O PRODUTOR RURAL PODE INVESTIR NA BOLSA DE VALORES?	6
5	O QUE SÃO AÇÕES?	6
5.1	CÓDIGO DAS AÇÕES.....	6
6	O QUE SÃO OPÇÕES	7
6.1	LETRAS E NÚMEROS DE UMA OPÇÃO.....	8
7	O QUE É UMA CORRETORA?	8
8	O PRODUTOR RURAL PODE INVESTIR EM AÇÕES PELA INTERNET, COMPRAR OPÇÕES E APLICAR DINHEIRO NA BOLSA DE VALORES?	8
9	FORMAS DE INVESTIR	8
10	MERCADOS EM QUE SE PODE OPERAR	8
10.1	MERCADO A VISTA.....	9
10.2	MERCADO A TERMO.....	9
10.3	MERCADO DE AÇÕES.....	9
10.4	MERCADO DE OPÇÕES.....	9
11	QUE TAXAS SERÃO COBRADAS DO PRODUTOR RURAL AO FAZER UM INVESTIMENTO NA BOLSA DE VALORES?	9
12	QUAIS SÃO OS RISCOS QUE O PRODUTOR RURAL VAI SOFRER AO INVESTIR NOS MERCADOS?	9
13	PRODUTOR RURAL FIQUE DE OLHO NA VOLATILIDADE	10
14	EXEMPLO DE INVESTIMENTO REAL	10
15	MAIS INFORMAÇÕES	10
	REFERÊNCIAS	11



1 INTRODUÇÃO

Os mercados surgiram a partir da necessidade de administrar as alterações de preços de ativos agrícolas. A busca por proteção dos preços agrícolas já era conhecida desde os tempos medievais. Tendo início da realização de acordos contratuais entre os envolvidos para a entrega numa data futura, durante as feiras medievais da Europa do século XII.

Na década de 1840, a cidade de Chicago no EUA, surgiu como um forte centro de mercado para os Estados vizinhos. Agricultores se reuniam em épocas de colheitas para vender e trocar seus grãos. Por volta de 1848, comerciantes de grãos se reuniram para formar uma troca de grãos organizada, na Junta Comercial de Chicago (CBOT). A Junta Comercial de Chicago nada mais era do que uma associação de comerciantes que criaram um local específico e organizado de encontro para compradores e vendedores de diversos grãos e demais produtos, assim eles poderiam se reunir e realizar seus negócios.

O ponto de partida da negociação de ativos financeiros nos Mercados Futuros deu-se em 1973, com o surgimento da bolsa de futuros, o International Monetary Market pelo grupo do Chicago Mercantile Exchange, negociando contratos futuros de câmbio.

No Brasil, a primeira bolsa de contratos futuros que surgiu foi a Bolsa de Mercadorias de São Paulo, no ano de 1918, operando inicialmente, com contratos de algodão. A Bolsa de Valores do Rio de Janeiro, surgiu em 1979, sendo a pioneira nas negociações no Mercado Futuro de Ações no Brasil.

É possível observar no início, que os mercados se organizaram a partir das necessidades dos produtores rurais. Os vales do Jequitinhonha e Mucuri possuem produtores rurais que praticam o comércio de seus produtos e outros que produzem para o próprio sustento vendendo somente o excedente.

Com os mecanismos de investimentos na bolsa de valores como forma alternativa de ganho financeiro é possível se obter melhoras na produção rural e mesmo suprir necessidades como investimentos nesse meio. Com os avanços tecnológicos, e com as variadas formas de se investir nos mercados organizados, surge o interesse de se adequar ao mercado organizado. É preciso saber como investir adequadamente no mercado de ações e de opções, visando uma alternativa de obtenção de renda para auxílio na produção rural. A cartilha se faz necessário, sendo um primeiro passo para o produtor entrar nos mercados financeiros como investidor.

2. PRODUÇÃO RURAL

A produção rural pode ser desenvolvida por pessoas físicas ou por empresas, chamadas de pessoas jurídicas. As produções rurais podem variar como por exemplo, atividades agropecuárias, pesqueira ou silvicultura, extração de produtos primários, animais ou vegetais, podendo ser uma atividade constante ou temporária.

Para melhorar a produção rural o produtor deve fazer uma boa gestão de seus investimentos. Devido à queda dos preços ou aumento nos custos das produções é preciso se ter uma boa gestão das atividades no meio rural. É importante saber quanto se gasta com determinada produção para que se tenha um bom retorno, e mesmo possuir controles e organização nos empreendimentos. Para isso não é preciso computadores ou alguma super tecnologia, é necessário somente que o produtor tenha uma agenda ou algo que registre seus investimentos. Com uma boa gestão é possível retirar parte dos ganhos e investir em uma outra forma de obtenção de renda.



3 O QUE É BOLSA DE VALORES?

A Bolsa de Valores é um mercado onde se pode encontrar vários tipos de investidores que negociam ações, opções e demais produtos financeiros de diversos setores.

A bolsa surgiu da necessidade das empresas conseguirem mais investidores, dessa forma a empresa vende um pedaço da participação dos ganhos para pessoas ou outras empresas, e em troca consegue vastas somas de investimentos. Com isso, as pessoas tem direito a receber parte dos lucros das empresas, e essas empresas em contra partida, obtém um capital de giro a um preço mais barato do que o oferecido pelo banco.

A principal bolsa no Brasil é a BM&FBovespa (Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros). Criada em 2008 devido a união da BM&F (Bolsa de Mercadorias & Futuros) e a Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo). Essa junção fez a BM&F Bovespa se tornar a maior bolsa do mundo em valor de mercado, atrás somente de EUA e Alemanha.

4 QUAL O VALOR MINIMO PARA INVESTIR?

Na prática não existe um valor mínimo para se fazer um investimento. Alguns economistas sugerem que investimentos baixos sejam feitos em primeiro momento em fundos. Fundos representa uma espécie de mecanismo que reúne dinheiro de vários indivíduos e fica a cargo de um gestor cuidar do dinheiro. O gestor faz aplicações no mercado financeiro e repassa os ganhos as partes envolvidas. As pessoas envolvidas nessa aplicação do fundo, pagam uma taxa para o administrador, gestor, responsável por controlar o risco que o dinheiro sofre nos mercados.

5 O QUE SÃO AÇÕES?

Ação é o valor mobiliário emitido pelas companhias e representativo de parcela do capital. É o documento que indica ser o seu possuidor o proprietário de certa fração de determinada empresa.

Existem dois tipos de ações, as ordinárias e as preferenciais.

As ações ordinárias são representadas pela sigla ON. Estas ações dão aos acionistas, aqueles que detêm a posse das ações, o direito de voto nas assembleias dentro da empresa e a participação não preferencial nos resultados das empresas.

As ações preferenciais, são representadas pela sigla PN, e concedem prioridades aos acionistas. Nesse caso, os acionistas possuem direito nos dividendos e no reembolso do capital da empresa, porém não possuem o direito de voto nas assembleias.

5.1 CÓDIGO DAS AÇÕES

É importante que o produtor rural saiba como funciona os códigos das ações, uma vez que existe uma grande comercialização de ações nos mercados financeiros.

Existem basicamente dois tipos de ações, as ordinárias e as preferenciais. As ações ordinárias são representadas pela sigla ON. Estas ações dão aos acionistas, aqueles que detêm a posse das ações, o direito de voto nas assembleias dentro da empresa e a participação não preferencial nos resultados das empresas.

Já as ações preferenciais, são representadas pela sigla PN, e concedem prioridades aos acionistas. Nesse caso, os acionistas possuem direito nos dividendos e no reembolso do capital da empresa, porém não possuem o direito de voto nas assembleias. As ações preferenciais se subdividem em classes A, B, C e D. Neste caso as classes também são representadas por siglas sendo PNA, PNB, PNC e PND. Para maiores detalhes de cada classe é fundamental consultar a empresa, pois cada empresa em específico pode tratar essas classes de maneira diferenciada.

No mercado financeiro essas ações são negociadas na Bolsa de Valores. Ao fazer uma pesquisa do valor de uma ação de uma determinada empresa, encontra-se a ação correspondente em códigos. Os códigos possuem 4 letras maiúsculas que fornecem abreviadamente o nome da empresa, mas essa quantidade de letras pode variar conforme a empresa queira, e o número que representa o tipo da ação.

- O número 1 representa o direito de subscrição de uma ação ordinária, onde subscrição significa É o direito de preferência do acionista para adquirir novas ações de uma companhia, numa dada porcentagem das que possui. Exemplo é o código PETR1, referente ao direito de subscrição da ação ordinária da Petrobrás PETR3;
- O número 2 representa o direito de subscrição de uma ação preferencial. Exemplo é o código BBDC2, referente ao direito de subscrição da ação preferencial do Banco do Bradesco BBDC4;
- O número 3 representa as ações ordinárias de uma empresa. Exemplo é o código NATU3, referente à empresa Natura Cosméticos S.A.;
- O número 4 representa as ações preferenciais de uma empresa. Exemplo é o código BBDC4, referente às ações do Banco Bradesco;
- O número 5 representa as ações preferenciais de classe A de uma empresa. Exemplo é o código VALE5, referente à empresa da Vale;
- O número 6 representa as ações preferenciais classe B de uma empresa. Exemplo é o código CPLE6, referente à empresa Companhia Paranaense de Energia;
- O número 7 representa as ações preferenciais de classe C. Exemplo é o código TMAC7 da empresa Amazônia Cel.;
- O número 8 representa as ações preferenciais de classe D. Exemplo é o código BRGE8 da empresa Consórcio Alfa de Administração S.A.;
- O número 9 representa os recibos de subscrição das ações ordinárias. Exemplo é o código BRBR-GEACNPA9 da empresa Consórcio Alfa de Administração S.A.;
- O número 10 representa os recibos de subscrição das ações preferenciais. Não é comum encontrar ações usando esse número em seus códigos;
- O número 11 não representa nenhuma regra específica para a ação ser negociada. Este número representa os recibos de ações de empresas estrangeiras negociadas na bolsa brasileira. Também representam os ativos compostos por mais de um tipo de ação. Não é comum encontrar ações usando esse número em seus códigos.

6 O QUE SÃO OPÇÕES?

Contratos que concedem o direito, mas não a obrigação de comprar (opção de compra), ou vender (opção de venda) determinado ativo financeiro. Sendo ativo financeiro qualquer coisa que possa gerar um fluxo monetário.

Existem alguns tipos de opções nos mercados.

- Opção europeia é a opção na qual o titular de uma opção só pode exercê-la na data de vencimento.
- Opção Americana é a opção na qual o titular de uma opção pode exercê-la a qualquer momento até a data de vencimento.
- Opção Barreira é quando a opção pode surgir ou perder o valor consoante, e o ativo subjacente atinja algum valor pré-fixado antes da expiração.
- Opção Asiática, o preço dessas opções depende de algum tipo de média (aritmética, geométrica, por exemplo).
- Opção Lookback, o preço dessas opções depende do preço máximo ou mínimo do ativo subjacente.

6.1 LETRAS E NÚMEROS DE UM OPÇÃO

Na prática, muitos contratos de opções são classificados de acordo com os ativos financeiros neles descritos. Neste caso, por exemplo, tanto para uma opção de compra, quanto para uma opção de venda, as informações sobre os detalhes do ativo financeiro, preço de exercício da opção, sendo o preço de exercício o valor pago pelo ativo financeiro, e a data do vencimento do contrato devem estar descritos no contrato de opção.

Para este exemplo, considere a opção PETRF25 da empresa Petobras. As quatro primeiras letras representam o tipo de ação, porém a quinta letra representa se a opção é do tipo venda ou compra e qual o vencimento da opção. E no final os números vão definir o preço estabelecido no contrato de opção para exercer o direito de compra ou venda. Usando essas descrições fica evidente de qual tipo de ativos financeiros está sendo aplicados na forma de opções, no exemplo os ativos são ações estatais da empresa Petrobras. Então em resumo a opção PETRF25, refere-se a PETR ação ordinária da empresa Petrobras, a letra F significa que a opção é do tipo compra com vencimento em junho e o número 25 define o preço de exercício da opção, porém nem sempre esse número no contrato é exatamente o preço de exercício, no exemplo acima o preço de exercício é de R\$ 25,00.

Para saber o mês de vencimento representado pela letra F é necessário consultar uma tabela referente as opções de compra. Essa tabela pode ser facilmente encontrada no site da BM&FBovespa.

7 O QUE É UMA CORRETORA?

Corretora é um órgão que comercializa títulos e valores mobiliários e opera a compra e venda de ações nas bolsas de valores. Na corretora os profissionais irão te orientar a fazer um melhor investimento para que haja um retorno certo. É preciso escolher bem sua corretora, obtenha informações de outros acionistas e fique atento as aplicações do seu dinheiro.

8 POSSO INVESTIR NA BOLSA PELA INTERNET?

O produtor rural pode investir em ações pela internet, comprar opções e aplicar dinheiro na bolsa de valores. As corretoras oferecem serviços online pela internet, onde o produtor rural é capaz de comprar ou vender ações e opções e aplicar dinheiro em algum fundo monetário pela internet. Não é necessário que o produtor rural se desloque até uma agência de corretoras, é possível fazer toda a aplicação com segurança pela internet.

9 FORMAS DE INVESTIR

É possível investir em ações de empresas através de uma corretora, pode-se também, aplicar dinheiro em fundos que buscam retornos em alguns setores do mercado, neste caso é possível aplicar inicialmente pequenos valores. Investir em compra de opções, que lhe dão direito de comprar ou vender determinado ativo financeiro, neste caso o titular do contrato de opção deve ficar atento aos valores do ativo no mercado para não haver grandes prejuízos.

10 MERCADOS EM QUE SE PODE OPERAR

Existem alguns mercados que o produtor rural pode operar. A Bolsa de Valores oferece várias formas de se negociar e possui um sistema rico em informações atualizadas em tempo real. A bolsa garante elevados padrões de cumprimento dos negócios realizados diariamente, oferecendo mecanismos de negociação de interesse público.

10.1 MERCADO A VISTA

Neste mercado a entrega dos ativos vendidos acontece no 3º dia útil depois de feita a negociação juntamente com o pagamento da transação. Essa liquidação é processada pela Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia – CBLC, que é uma empresa responsável pela compensação, liquidação e controle de risco das operações realizadas na Bolsa de Valores.

10.2 MERCADO A TERMO

As operações neste mercado se dão em um prazo de trinta, sessenta ou noventa dias. Para operar no mercado a termo é requerido um limite mínimo para ocorrer a transação de valores na Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia tanto pelo vendedor e pelo comprador. Esse valor mínimo requerido funciona como uma operação de seguro. No mercado a termo, o contrato pode ser liquidado antes da data de vencimento.

10.3 MERCADO DE AÇÕES

No mercado de ações é realizado compra ou venda de uma quantidade de ações por um preço já fixado, para ser liquidado na data estipulada. Neste mercado as transações são feitas na bolsa de valores, onde o é possível comprar ou vender cotas de ações que representam uma menor parcela de parte de um capital maior de empresas que possuem capital aberto para investimentos. Os detentores das ações serão chamados de acionistas e terão deveres e direitos de um sócio.

10.4 MERCADO DE OPÇÕES

A opção é um contrato que o investidor adquire ao pagar um valor em dinheiro, que lhe dar o direito de comprar ou vender algum tipo de ativo financeiro de outro investidor. O possuidor da opção, até a data de vencimento do contrato poderá exercer a opção caso ela for do tipo americana, caso seja do tipo europeia somente poderá exercer o contrato na data final do contrato de opção. As opções europeias e americanas são as mais comercializadas na bolsa de valores. A vantagem dos mercados de opções é que titular do contrato não precisa necessariamente exercer a opção, já quem lançou a opção deverá concluir a transação de compra ou venda caso o possuidor da opção opte por exercê-la.

11 QUE TAXAS SERÃO COBRADAS AO FAZER UM INVESTIMENTO NA BOLSA?

Geralmente são cobradas taxas de custódia e de corretagem. Os valores dessas taxas variam de uma corretora para outra. No caso da taxa de corretagem é o valor cobrado pela corretora para fazer com que seu dinheiro seja investido no mercado. A taxa de custódia é o valor cobrado pela bolsa de valores BM&FBOVESPA para assegurar os investimentos, valor esse também que pode variar de acordo com a corretora contratada.

12 QUAIS SÃO OS RISCOS DE INVESTIR NA BOLSA?

Em qualquer transação nos mercados existe a possibilidade de riscos. Quando lidamos com investimentos em ações, opções, fundos e entre outros, estamos sujeitos as flutuações de preços dos mercados, ou seja, por exemplo, se uma empresa começa a perder prestígio no mercado seus ativos financeiros começam

a declinar o valor. Caso você tenha algum investimento nesta empresa, correrá o risco da perda de dinheiro investido.

13 FIQUE DE OLHO NA VOLATILIDADE

Na área de finanças, a volatilidade é uma medida de dispersão dos retornos de um determinado ativo financeiro. Por exemplo, se uma ação varia num curto período de tempo, maior vai ser o risco de ganhar ou perder dinheiro ao se negociar essa ação. A volatilidade é usada para mostrar a intensidade em que um ativo financeiro muda seu valor, se para mais, ou se para menos, em um determinado período de tempo observado.

O produtor rural deve ficar atento as oscilações de um determinado ativo financeiro, ou seja, se sua volatilidade estiver muito alta ou baixa é certo que as mudanças de valores serão frequentes, tanto para cima quanto para baixo. Matematicamente quanto mais alta for o valor da volatilidade é de se esperar uma alta nos preços dos ativos, porém da mesma forma que a volatilidade aumenta bruscamente, poderá também ter uma queda rápida fazendo uma oscilação nos preços.

14 EXEMPLO DE INVESTIMENTO REAL

Considere a ação PETR da empresa Petrobras, com vencimento J em outubro e com número 9, neste caso o número 9 não representa o preço de exercício da opção PETRJ9. De acordo com a BM&FBovespa o preço de exercício dessa opção está em R\$ 15,00. Esses dados se referem ao dia 27 de setembro à 14 de outubro de 2016.

O contrato de opção PETRJ9 dá o direito de comprar a ação preferencial PETR4 da Petrobras a um preço de exercício de R\$ 15,00. No dia 27 de setembro a ação está valendo R\$ 12,88. Cada contrato de opção PETRJ9 dá o direito de comprar uma ação PETR4 por R\$ 15,00. O valor para adquirir o contrato de opção PETRJ9 no mês de setembro está em R\$ 0,08. No dia 14 de outubro o contrato de opção está valendo R\$ 1,29. Teve um aumento de aproximadamente 1500%. Nesse início de outubro o valor da ação PETR4 está cotada em R\$ 16,45. Momento favorável para exercer a opção.

Suponha que um produtor rural tenha em mãos apenas R\$ 1000,00. No mês de setembro o produtor adquire o contrato PETRJ9 à R\$ 0,08, podendo comprar 12500 contratos que lhe dão o direito de comprar a ação PETR4 a R\$ 15,00. Cada contrato dá direito de comprar apenas uma única ação. Com os contratos em mãos o produtor rural já poderia exercer a opção, pois a ação da Petrobras no mercado está valendo R\$ 16,45. Porém, caso o produtor rural não tenha mais dinheiro para comprar 12500 ações a R\$ 15,00 cada, e podendo posteriormente vender a um valor de R\$ 16,45 cada, seria interessante olhar apenas para o valor do contrato de opção. Como o contrato de opção subiu 1500%, enquanto em cada ação o produtor teria um lucro de aproximadamente 9%. É melhor vender os 12500 contratos adquiridos a R\$ 0,08 cada por R\$ 1,29. Dessa forma, o produtor vai obter um montante de R\$ 16125,00. Descontando os R\$ 1000,00 investidos sobra um lucro de R\$ 15125,00.

Então é observado que não precisa de muito dinheiro para poder investir nos mercados, esse foi apenas um único exemplo, mas existe outras formas de investimentos com bons retornos. É necessário apenas uma pequena atenção aos mercados, esse trabalho pode ser feito pelas corretoras de investimento.

Com um retorno desse é possível se aplicar o capital adquirido em outras atividades na produção rural, sendo assim uma alternativa de renda.

15 MAIS INFORMAÇÕES

Para o produtor rural começar investir agora, é necessário estipular em qual tipo de mercado se deseja entrar, ou seja, em que deseja investir dinheiro? E de quanto você deseja investir?

Procure uma corretora e converse sobre seus interesses. O site da BM&FBovespa, cujo site é http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/, tem várias informações específicas sobre investimentos. Neste site da Bolsa de Valores é possível encontrar uma lista extensa de corretoras, no qual o produtor poderá filtrar a busca de acordo com seus interesses de investimentos e fazer o melhor investimento possível.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, L. Do Jequitinhonha aos canaviais. Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado. Fafich-UFMG, 1988.
- ARMICOPA - Associação Regional Mucuri de Cooperação dos Pequenos Agricultores. Diagnóstico Participativo da Agricultura Familiar do Território do Vale do Mucuri - MG. Teófilo Otoni, s.n.p, 2005.
- ASSIS, T.P. Agricultura familiar e gestão social: ONGs, poder público e participação na construção do desenvolvimento. Lavras, Dissertação de Mestrado, PPGA-UFLA, 2005.
- BOVESPA. Bolsa de Valores de São Paulo. Mercado futuro de ações. São Paulo, 2010. Disponível em: <http://fernandonogueiracosta.files.wordpress.com/2010/03/mercado-futuro-de-acoes.pdf>. Acesso em 07 de abril de 2016.
- BM&FBOVESPA. A nova bolsa. Disponível em: <http://bmfbovespa.com.br/pt-br/mercados/mercadorias-e-futuros.aspx?idioma=pt-br>. Acesso em 31 de março de 2016.
- CME-Chicago Mercantile Exchange. An introduction to futures and options. Chicago. Copyright 2006, Illinois 60606-7499.
- DRUCKER, P. As novas realidades: no governo e na política, na economia e nas empresas, na sociedade e na visão do mundo. 4. Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- DULCI, O. S. Política e recuperação econômica em Minas Gerais. Belo Horizonte, Editora UFMG, 1999.
- HULL, J. C. Options, futures, and other theory derivatives, Prentice Hall. 3° ed., 1997.
- INCRA. Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária, Titulação de Assentamentos, disponível em: <http://www.incra.gov.br/index.php/reforma-agraria-2/projetos-e-programas-doincra/titulacao-de-assentamentos>. Acesso em: 16 de novembro de 2016.
- PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. Lei n ° 11.326, de 24 de julho de 2006, disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2006/lei/111326.htm. Acesso em: 16 novembro de 2016.
- PUC-RIO- Certificação Digital No0412242/CA. Mercado futuro. Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.maxwell.lambda.ele.pucrio.br/8954/8954_3.PDF. Acesso em 05 de junho de 2016.
- PWC e BM&F BOVESPA. Como abrir o capital da sua empresa no Brasil (IPO). Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt-r/educacional/download/BMFBOVESPA-Como-e-por-que-tornar-seuma-companhia-aberta.pdf>. 2015. Acesso em: 15 junho de 2016.

