UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica

Franksilane Gonçalves Camelo

Teófilo Otoni

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA

GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica

Franksilane Gonçalves Camelo

Orientador(a):

Weversson Dalmaso Sellin

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos exigidos para a conclusão do curso.

Teófilo Otoni

2021

Catalogação na fonte - Sisbi/UFVJM

C181g Camelo, Franksilane Gonçalves
2021 Geometria Esférica na formação de professores [manuscrito] : a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica / Franksilane Gonçalves Camelo. -- Teófilo Otoni, 2021.
158 p. : il.

Orientador: Prof. Weversson Dalmaso Sellin.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2021.

1. Geometria Esférica. 2. Resolução de Problemas. 3. Formação de Professores. 4. GeoGebra. I. Sellin, Weversson Dalmaso. II. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Bibliotecário Rodrigo Martins Cruz / CRB6-2886
Técnico em T.I. Thales Francisco Mota Carvalho

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

FRANKSILANE GONÇALVES CAMELO

GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PERSPECTIVA METODOLÓGICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação **em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT** da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, **nível de Mestrado,** como requisito parcial para obtenção do título de **Mestra em MATEMÁTICA.**

Orientador: Prof. **Dr. Weversson Dalmaso Sellin**

Data de aprovação 05/08/2021.

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza - (UFVJM)

Prof. Dr. José Fernandes da Silva - (IFMG)

Ao meu marido, pais e irmãos. Realizar um trabalho como este não é tarefa fácil, mas ter vocês ao meu lado me incentivando e me amparando é o que tem me fortalecido.

AGRADECIMENTO

A Deus, por estar comigo em todos os momentos. Ele que das formas mais improváveis tem demonstrado seu Amor, muitas vezes nos pequenos detalhes, outras no ato de me presentear com pessoas tão especiais e tão significantes, que me deram força para chegar até aqui.

Ao meu marido Cleweson, agradeço por tanto Amor dedicado a mim, pelos seus cuidados, por sua compreensão em minhas ausências, por suas palavras de incentivo nos momentos de fraqueza, por sua cumplicidade nos momentos de êxito e por sempre me encorajar na realização dos meus sonhos.

Um agradecimento especial à minha família. Minha mãe Mercês e meu pai Onofre, meus exemplos de luta e persistência. O Amor, o carinho, e a bondade de vocês me inspira a ser um ser humano melhor. Aos meus queridos irmãos, que são muitos, mas faço questão de citar: Claudiane, Claudinéia, Cláudia, Cleide, Cleyton, Cleitiano, Regilane e Tauênia, agradeço muito a confiança que cada um de vocês deposita em mim e agradeço principalmente por nossos incríveis momentos juntos, momentos estes que me permitem ver a vida de maneira mais leve e natural. Aos meus sobrinhos queridos que com o jeitinho especial de cada um, têm alegrado os meus dias. Família, sou muito honrada por ter todos vocês ao meu lado!

Aos meus colegas e amigos que sempre me deram apoio, especialmente aos amigos do "quase mestres": Alexandre, Luiz Otávio, Daniele, Dionízio e Adriany, agradeço por estarem comigo nesta longa e difícil caminhada, por me proporcionarem momentos tão incríveis, sempre com bom humor e com uma história divertida pra contar. Nossa amizade foi muito além dos estudos, foi para a vida. Tenho muito orgulho, muita admiração e um carinho muito grande por cada um!

Ao professor Weversson, por ter aceitado de prontidão ser meu orientador, por ter encarado este desafio com tanta dedicação e paciência, muita paciência! Agradeço por sua amizade, por ser um professor tão cuidadoso, comprometido e por encarar com mais leveza o processo, o que o fez fluir com mais naturalidade e me trouxe mais confiança e segurança.

Ao professor e membro da banca José Fernandes, pelas palavras de incentivo, pelos conselhos amigos e pelas contribuições, não apenas neste trabalho, mas em tudo que me proponho a realizar.

Ao professor Fábio, também membro da banca, agradeço pelo interesse, disponibilidade e por ser, além de um profissional extremamente competente, um ser humano tão compreensivo.

A professora Sílvia, pelas orientações tão valiosas, pelas críticas construtivas, pelo incentivo e pela confiança em meu trabalho.

A todos os professores que estiveram presentes em minha formação, desde a Educação Infantil até no Mestrado. Cada um de vocês contribuiu de alguma forma para meu crescimento profissional e pessoal. Portanto, além da minha gratidão, vai minha admiração.

Aos alunos da Licenciatura em Matemática do IFMG- *campus* São João Evangelista por colaborarem com esta pesquisa na participação do minicurso.

Agradeço também esta Instituição de Ensino, por me permitir realizar este sonho.

E por fim, a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, vai minha gratidão.

"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê."

Arthur Schopenhauer.

RESUMO

Considerando o fato de que a Geometria Euclidiana por si só é insuficiente para a explicação de todos os fenômenos que nos rodeiam, a presente pesquisa aborda o ensino de Geometria Esférica na formação de professores, um tema raramente estudado nos cursos de Licenciatura em Matemática e com menor frequência ainda no ensino básico. Com o intuito de tornar este assunto mais acessível e contribuir para sua disseminação, foi elaborada uma Sequência Didática, que foi aplicada em forma de minicurso, para alunos da Licenciatura em Matemática do IFMG- *campus* São João Evangelista sobre a introdução de conceitos iniciais de Geometria Esférica. De maneira a oportunizar os estudantes a agirem de forma ativa, com o intuito de torná-los protagonistas no próprio processo de aprendizagem, o recurso metodológico adotado foi a Resolução de Problemas no sentido de encarar os problemas como ponto de partida para introduzir um novo conhecimento. E para favorecer o processo investigativo que a Resolução de Problemas requer, a ferramenta de auxílio na resolução dos problemas apresentados foi o *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que contribuiu na formação dos conceitos pretendidos. Como parte do referencial teórico, foi exposto o processo histórico que culminou com o surgimento da Geometria não Euclidiana, no qual o tema central foi a tentativa de demonstrar o Postulado das paralelas, um mistério que perdurou por cerca de dois mil anos e que teve resultados surpreendentes. Além disso, foram apresentados autores que abordam o uso da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática, bem como suas diferentes concepções. Ao refletir sobre as discussões dos resultados da aplicação da sequência didática associados aos relatos dos alunos após a realização do minicurso, podemos verificar que a sequência didática elaborada e aplicada, levando-se em conta a metodologia e as ferramentas adotadas, contribuiu de forma positiva e eficaz na apropriação dos conceitos pretendidos.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Resolução de Problemas, Formação de Professores, GeoGebra.

ABSTRACT

Considering the fact that Euclidean Geometry alone is insufficient to explain all the phenomena that surround us, this research addresses the teaching of Spherical Geometry in teacher education, a topic rarely studied in the Mathematics Degree courses and with less attendance still in basic education. In order to make this topic more accessible and contribute to its dissemination, a Didactic Sequence was elaborated, which was applied in the form of a short course, for students of the Mathematics Degree of IFMG- campus São João Evangelista about introduction of initial concepts of Spherical Geometry. In order to give students the opportunity to act actively, in order to make them protagonists in the learning process itself, the methodological resource adopted was Problem Solving in the sense of facing problems as a starting point for introducing new knowledge. And to favor the investigative process that problem solving requires, the help tool in solving the proposed problems was the dynamic geometry software GeoGebra, which contributed strongly in the formation of the intended concepts. As part of the theoretical framework, the historical process that culminated with the emergence of non-Euclidean geometry was exposed, in which the central theme was the attempt to demonstrate the Postulate of Parallels, a mystery that lasted for about two thousand years and that triggered surprising results. In addition, were presented authors who approached use of Problem Solving in Mathematics classes, as well as their different conceptions. When reflecting on the result of of the application of the didactic sequence associated with the students' reports after the completion of the mini-course, we can verify that the didactic sequence elaborated and applied, taking into account the methodology and the adopted tools, contributed in a positive and effective way in the appropriation of the intended concepts.

Keywords: Spherical Geometry, Problem Solving, Teacher Training, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para iniciar a discussão sobre o tema dessa pesquisa, convidamos o leitor a pensar na seguinte questão: Imagine um triângulo recortado de uma folha de papel, e tente colar toda essa figura na superfície de uma esfera. É possível realizar esta tarefa sem deformar o triângulo? Imagine também que queiramos calcular a distância entre dois pontos distantes no globo terrestre. Faz sentido pensarmos que basta calcular a distância de um segmento de reta que une estes dois pontos? Pensando em possíveis explicações lógicas para responder estes tipos de questionamentos, percebemos que a matemática que conhecemos do ensino básico até então, se torna insuficiente para nos auxiliar na busca por respostas, isto é, para compreender melhor as questões aqui citadas, é necessário lançar mão da ideia da Geometria estudada na Educação Básica, a chamada Geometria Euclidiana, e pensar em um modelo diferente, o modelo esférico. A Geometria que utiliza este modelo recebe o nome de Geometria Esférica e será o conteúdo deste trabalho.

A presente pesquisa é fruto de uma curiosidade sobre um assunto raramente estudado nos cursos de Licenciatura em Matemática e menos ainda na Educação Básica, como confirma Kaleff (2010). A Geometria, de forma geral, é uma área da Matemática no qual tive poucas oportunidades de apreciar e aprender durante o ensino básico, ficando a cargo do meu curso de graduação - Licenciatura em Matemática- a tarefa de fazê-lo. Neste curso pude conhecer e estudar suas principais definições, propriedades e características, e não foi necessário muitos recursos para me permitir apreciá-la. Ao longo deste processo, ouvi falar sobre um tipo de geometria em que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo era superior a $180°$, o que me deixou muito confusa e de certa forma muito curiosa, além de ter me dado conta do quão pouco eu conhecia sobre o assunto. Na ocasião não busquei conhecer essa diferente geometria porque tinha outras demandas da faculdade, e assim essa oportunidade só veio à tona no Mestrado.

E essa ideia de pesquisar sobre Geometria Esférica no Mestrado se deu através de leituras de dissertações do programa PROFMAT, as quais me permitiram um olhar muito além do que eu conhecia sobre Geometria Euclidiana. Descobri que a explicação de situações como as colocadas no início desta seção envolve uma compreensão mais profunda sobre geometria e seu processo de formalização como uma área da Matemática. E considerando o fato de que, além de outros aspectos, a matemática é uma ciência que nos auxilia na compreensão de fenômenos que nos rodeia, então é natural acreditar que seja relevante apresentar aos futuros professores, ferramentas que os possibilitem um olhar mais atento, crítico e compreensível acerca destes fenômenos, para que possam replicar este processo com seus alunos, sendo a Geometria Esférica uma dessas ferramentas em questão.

Indo ao encontro das discussões iniciais aqui apresentadas, surge uma questão de pesquisa que norteia este estudo: como apresentar à estudantes de Licenciatura em Matemática conceitos iniciais de Geometria Esférica?

E para auxiliar em possíveis respostas para esta indagação, este trabalho objetivou a elaboração de uma Sequência Didática, aplicada em forma de Minicurso, para alunos da Licenciatura em Matemática de maneira a oportunizar estes estudantes a agirem de forma ativa, com o intuito de torná-los protagonistas no próprio processo de aprendizagem. Além disso, a ferramenta de auxílio na resolução dos problemas apresentados, bem como na possível formação de conceitos, foi um *software* de geometria dinâmica por se apresentar como uma tecnologia que permite, além da visualização de objetos geométricos, a possibilidade de mover e arrastar estes objetos afim de verificar determinados padrões e características referentes ao conteúdo a ser trabalhado.

Em leituras de trabalhos sobre Geometria Esférica, percebi que há uma lacuna no que diz respeito a uma abordagem que protagoniza os alunos diante de um novo conhecimento. Portanto, o que move esta pesquisa não é apenas a possibilidade de apresentar aos licenciandos conceitos de Geometria Esférica. A busca por métodos que torne esta apresentação mais significativa para eles também é um destes motivos, visto que, como se percebe no ensino de Matemática, há uma necessidade em permitir com que os estudantes possam ser agentes ativos na construção de seus próprios conhecimentos, possibilitando-os pensar matematicamente e portanto, desempenhar um papel protagonista no processo de aprendizagem. E como acreditamos ser a Resolução de Problemas, como perspectiva metodológica, uma forma de promover esta proposta, a presente pesquisa a utiliza e baseia-se na concepção de Onuchic (2011, 2013, 2019) e Allevato (2005, 2009), principais pesquisadoras do tema no Brasil e integrantes do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP).

Minha pouca experiência como professora, um pouco mais de três anos, associada às várias discussões acadêmicas, foi suficiente para compreender alguns aspectos relacionados à aprendizagem de geometria, percebendo, por exemplo, que não é tão intuitivo como foi para mim. Ao contrário, muitos alunos a encaram com certo trauma, uma vez que envolve um processo de visualização e internalização, o que é algo muito particular e que varia de estudante para estudante. Frente à essa particularidade, sempre que possível, tentei associar essa visualização à ferramentas tecnológicas, de maneira especial, o GeoGebra.

Meu fascínio pelo GeoGebra surgiu na graduação, principalmente nas disciplinas de Cálculo, na qual o usava para compreender o comportamento das funções, o que me deixava absorvida por longos períodos em que cada descoberta era seguida de muito espanto e admiração. Suas potencialidades foram também verificadas ao lecionar para turmas do Ensino Médio, em um curso técnico integrado, sendo que na oportunidade, em uma discussão com a turma, o mesmo foi usado para a dedução da fórmula do cálculo do perímetro de uma circunferência, feita por meio de sucessivas construções de polígonos regulares, cada vez com uma quantidade maior de lados, até tender ao infinito. Foi uma experiência marcada por uma imensa satisfação de ensinar, gerada pela sensação de descoberta dos alunos. Outra experiência exitosa aconteceu no ensino de geometria espacial, no qual o GeoGebra foi utilizado, não apenas para apresentar as figuras espaciais e suas propriedades, mas também para a compreensão do cálculo de volume de sólidos geométricos pelo princípio de Cavalieri.

Portanto, além de dispor da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica, considerando a acessibilidade e as potencialidades do GeoGebra, que vão desde a capacidade de realçar visualmente um componente matemático até a possibilidade de investigações e experimentações, este *software* foi utilizado como ferramenta de ensino na tentativa de criar condições mais propícias ao ensino de Geometria Esférica, considerando a dificuldade dos alunos em "visualizar" os objetos geométricos.

Para debater essas questões introdutórias mais amplamente e discorrer sobre a pesquisa realizada afim de alcançar o objetivo proposto, este trabalho está organizado em seis capítulos que estão distribuídos da forma como se segue.

No capítulo 1, além da introdução apresenta-se os métodos adotados para a realização da pesquisa, onde é exposto o tipo de pesquisa, as técnicas de coleta de dados, além da caracterização do público alvo bem como as ferramentas de auxílio à aplicação da mesma.

No capítulo 2 é feita uma abordagem de alguns aspectos da Geometria de forma geral, como se deu seu ensino no Brasil e algumas fragilidades presentes na educação brasileira. Além disso, introduz algumas ideias sobre a Geometria não Euclidiana bem como autores que apresentam algumas aplicações dessa recente área do conhecimento matemático e ainda os trabalhos que defendem seu uso no ensino básico, o que justifica essa abordagem em cursos de Licenciatura em Matemática. O capítulo ainda explana sobre o processo histórico que culminou com o surgimento das Geometrias não Euclidianas. Para isso, apresenta-se uma obra que foi essencial para desenvolvimento da Geometria e consequentemente para as Geometrias não Euclidianas, pois é nela que se encontra o postulado das paralelas que por quase dois mil anos fez parte da vida de muitos matemáticos. Essa obra é *Os Elementos* de Euclides. Em seguida é feita uma exposição de alguns aspectos relevantes acerca das tentativas de demonstrar tal postulado por matemáticos como Saccheri, Bolyai, Lobachevsky e Riemann e o consequente surgimento da Geometria Esférica.

No terceiro capítulo são expostos os conceitos fundamentais acerca da Geometria Esférica, onde demonstra-se os principais resultados originados, especialmente aquele que explica a deformação dos ângulos de um triângulo plano posto sobre uma superfície esférica.

No capítulo 4 apresenta-se a Resolução de Problemas, como ela se desenvolveu, seus principais teóricos e além disso é feita uma análise das diferentes concepções acerca dessa tendência de ensino bem como os principais autores que a defende. Por fim, ela é abordada como um recurso metodológico, recurso este que foi utilizado na elaboração da sequência didática e na condução do minicurso.

No capítulo 5 é realizada uma análise no qual discute a aplicação da sequência didática à luz da Resolução de Problemas, mediada pelas Tecnologias da Informação, no caso o GeoGebra. Além disso, faz-se também uma análise do questionário respondido pelos estudantes logo após o término do minicurso, no qual eles relatam sobre as contribuições geradas por este estudo.

E para finalizar, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais acerca desta pesquisa, bem como suas limitações e possibilidades de diferentes abordagens em trabalhos futuros. Na próxima seção, apresentamos os métodos utilizados na consecução deste trabalho.

1.1 Metodologia

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, considerando o caráter subjetivo dos dados obtidos, e o fato de que foi realizado um levantamento bibliográfico de artigos, dissertações, teses e documentos que embasam teoricamente o assunto tratado. Através destes estudos foram feitas reflexões sobre como apresentar à estudantes da Licenciatura em Matemática conceitos iniciais de Geometria Esférica, tendo como recurso metodológico a Resolução de Problemas e como ferramenta de auxílio o GeoGebra.

O tipo de pesquisa escolhida é a pesquisa-ação, que envolve a ação do pesquisador com o grupo pesquisado. Para melhor esclarecer, apresentamos a definição de Fiorentini e Lorenzato, que orienta que:

> [...] é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para muda-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. [...] Trata-se de um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas a prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa. (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 112)

Dessa forma, a pesquisadora se incorporou ao grupo de forma a mediar as discussões e apresentar os problemas propostos durante a realização do minicurso. Os problemas que compõem a sequência didática foram criados pela pesquisadora sendo que alguns foram adaptados de outros autores, escolhidos de forma a conduzir o estudante à formação e formalização dos conceitos pretendidos sobre Geometria Esférica. Portanto, são problemas nos quais os participantes foram levados a fazer experimentações e verificar possíveis regularidades a fim de realizar potenciais conjecturas acerca de propriedades relacionadas à Geometria Esférica, conteúdo que até certo momento, não sabiam qual era. Esta é uma proposta baseada nos estudos de Onuchic e Allevato que será discutido de forma mais profunda no decorrer do trabalho.

A sequência didática (Apêndice C) foi construída tendo como base as discussões teóricas sobre o tema Resolução de Problemas, com o intuito de introduzir conceitos básicos de Geometria Esférica. Sobre Sequência Didática, Zabala (2015) a define como sendo "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos." (p.18). Dessa forma, cada problema foi escolhido de maneira a "conversar" um com o outro, sempre agregando algo novo e provocando os estudantes a refletirem sobre determinadas situações.

1.1.1 População e amostra

Gil (2002), ao apresentar as etapas de uma pesquisa do tipo pesquisa-ação, aponta que os procedimentos para escolha da amostra neste caso não precisa ser rigidamente estatísticos, mas sim, selecionadas pelo critério de intencionalidade. Em suas palavras "Uma amostra intencional, em que os indivíduos são selecionados com base em certas características tidas como relevantes pelos pesquisadores e participantes, mostra-se mais adequada para a obtenção de dados de natureza qualitativa; o que é o caso da pesquisa-ação." (p. 145).

Dessa forma, como a sequência didática foi apresentada em forma de minicurso, o mesmo foi divulgado tendo como público alvo alunos do quinto e do sétimo período da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais- *campus* São João Evangelista[1], por já terem estudado o conteúdo de Geometria Euclidiana em períodos anteriores do curso. Essa intencionalidade aconteceu visto que o público alvo escolhido possibilita que se faça uma abordagem de investigação que permite o confronto com ambas as geometrias, a Euclidiana e a não Euclidiana, especificamente a Esférica. O minicurso foi

[1] São João Evangelista é um município brasileiro no interior do estado de Minas Gerais, Região Sudeste do país. Localiza-se no Vale do Rio Doce

realizado com apoio do GEPETEM[2] do *campus*, e contou com a colaboração e divulgação do professor José Fernandes da Silva, professor da Licenciatura em Matemática, também do IFMG- *campus* São João Evangelista.

Após a divulgação do minicurso, os alunos interessados fizeram a inscrição e foram registrados em uma turma do *Google Sala de Aula* organizada pela pesquisadora. Assim, foram realizados três encontros de duas horas cada, distribuídos em três sábados consecutivos, na plataforma *Google Meet*, plataforma esta que os estudantes já possuíam acesso e conhecimento de suas funcionalidades. Neste aspecto, vale ressaltar que a proposta inicial deste trabalho era que os encontros acontecessem de forma presencial, uma vez que a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica pressupõe maior interação entre professor e alunos, visto que as discussões são parte importante do processo e o ideal é que aconteçam com bastante frequência. Mas devido à pandemia de Coronavírus, essa proposta se tornou inviável e portanto, todo o minicurso aconteceu de forma remota.

O minicurso aconteceu em duas etapas, sendo a primeira delas os encontros síncronos onde foi utilizado a sequência didática elaborada para introduzir os conceitos iniciais de Geometria Esférica através da Resolução de Problemas. A outra parte aconteceu por meio de atividades assíncronas, no qual foram disponibilizadas videoaulas no *Google Sala de Aula* para os cursistas assistirem e compreenderem as demonstrações (Apêndice E) de algumas fórmulas importantes da Geometria Esférica. Estas videoaulas foram gravadas pela própria pesquisadora sendo que algumas foram realizadas fazendo uso de ferramentas especiais do GeoGebra, como por exemplo a visualização em 2d dos triângulos planos construídos na esfera para usar as relações trigonométricas envolvidas. Esta última etapa foi um suporte para possíveis estudos futuros com mais ênfase no conteúdo por parte dos licenciandos, portanto ela não serviu para fins de coleta e análise de dados.

Para a eficácia na consecução da sequência didática elaborada, era necessário que os estudantes tivessem um conhecimento básico de construções geométricas no GeoGebra, a fim de possibilitar um trabalho mais direcionado ao objetivo principal. Assim, no primeiro encontro do minicurso, foi feita uma apresentação deste *software* aos alunos, abordando alguns comandos como por exemplo: construção de esferas, retas perpendiculares á uma curva, retas perpendiculares entre si e determinação de ângulos e planos. Era esperado que os mesmos já tivessem conceitos formados acerca de Geometria Euclidiana Plana e Espacial. Ainda, foi pedido que além da aplicadora/pesquisadora, cada participante tivesse disponível um computador com acesso à internet, sendo que estes recursos

[2]O Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Tecnologias em Educação Matemática (GEPETEM) desenvolve pesquisas e inovações na Educação Básica e no Ensino Superior, pautadas na formação inicial e continuada de professores de Matemática e na utilização das Tecnologias Digitais (TD).

foram de responsabilidade de cada um dos licenciandos.

Com o intuito de proteger legalmente e moralmente tanto o grupo pesquisado quanto a pesquisadora, cada um dos 11 estudantes [3] assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE-Anexo A). Este termo ficará arquivado, sob inteira responsabilidade da pesquisadora, por um período de cinco anos após o término da pesquisa.

1.1.2 Técnica de coleta de dados

A principal técnica de coleta de dados utilizada foi a observação participante, por caracterizar-se como mais flexível, considerando a possibilidade, de ao longo da pesquisa, os objetivos sofrerem redefinições, segundo Gil (2002). Além dessa observação participante, durante o processo de aplicação do minicurso, a reunião via *Google Meet* foi gravada (com consentimento de todos) para ser analisada posteriormente. Aliado á esta técnica, ao final da realização do minicurso, os estudantes responderam um questionário (elaborado no *Google formulários*) com o intuito de fornecer dados que, associados às discussões durante a aplicação do minicurso, permitiram avaliar como a Resolução de Problemas, mediada pelo uso do *software* GeoGebra pôde contribuir de forma eficaz e significativa na assimilação de conceitos de Geometria Esférica na formação inicial de estudantes da Licenciatura em Matemática.

Para analisar os dados obtidos foi privilegiada a discussão em torno do processo da realização dos encontros síncronos, associada com as respostas do questionário. Portanto, para essa discussão e interpretação dos resultados, foi feito um diálogo com o referencial teórico adotado, principalmente no que diz respeito à Resolução de Problemas como recurso metodológico.

1.2 Sobre o uso das tecnologias informáticas

Discussões sobre o uso de tecnologias informáticas (TI) no ensino, de maneira geral, não são recentes e são sempre necessárias, visto que os benefícios gerados por estes recursos são de fato muito significativos. Se considerarmos o contexto atual que estamos vivenciando, devido à pandemia causada pelo novo Coronavírus [4] que afetou diretamente as relações humanas, especialmente na educação, fazendo com que várias escolas ado-

[3] Foram realizadas 21 inscrições no minicurso, mas como os alunos estavam finalizando o semestre letivo, 10 deles não puderam mais participar ou não completaram as atividades por causa das demandas da graduação. Assim, teve um total de 11 participantes (7 do sexo feminino e 4 do sexo masculino).

[4] Considerada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) como a "maior crise sanitária mundial da nossa época".

tassem o ensino emergencial remoto e obrigassem muitos trabalhadores a desenvolver o teletrabalho, essa discussão se torna indispensável. Neste sentido, a incorporação dessas ferramentas no meio educacional aconteceu de forma abrupta, mudando radicalmente as formas de ensino ao passo que os celulares, aparelhos proibidos em grande parte das salas de aulas brasileiras, passaram a ser a principal e indispensável ferramenta de estudos dos alunos. Essa nova forma de "fazer" a educação vem reafirmar a necessidade de acompanharmos e repensarmos as evoluções tecnológicas e adaptarmos a estas mudanças de paradigmas, já que chegamos ao ponto de depender de seu uso para realizar grande parte de nossas tarefas diárias.

Neste sentido, *Softwares* como o GeoGebra incluem-se na gama de possibilidades de uso de tecnologias informáticas, porém, não servindo apenas como um simples auxílio, mas principalmente como possibilidades de criar ambientes investigativos.

Em um artigo que fala sobre *Softwares* e internet na sala de aula de matemática, BORBA (2010) [5] discute como estes podem moldar a maneira como o conhecimento matemático é produzido. Nestas discussões, ele expõe algumas particularidades referentes aos aspectos visuais que as tecnologias computacionais podem proporcionar. São elas:

> -Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
> -A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
> -Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
> -Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.
> -Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, (...) é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança (...) (BORBA; VILLARREAL, p. 96).

Tendo em vista essas particularidades visuais, Borba (2010) complementa afirmando que os *Softwares* possibilitam a investigação e a experimentação podendo levar os estudantes a desenvolverem suas ideias em um patamar que os permite criar conjecturas, validá-las e levantar subsídios para uma formalização matemática. É um pensamento que corrobora com a ideia dessa pesquisa, já que o recurso tecnológico não será usada apenas como uma ferramenta de busca de informação, mas sim, uma ferramenta que possibilita a produção do conhecimento, a construção de novas generalizações, ou no mínimo, a percepção de como ele é gerado.

O recurso escolhido para este trabalho foi portanto o GeoGebra, um *Software* de Geometria dinâmica que combina conceitos de álgebra e geometria em uma única inter-

[5] Marcelo de Carvalho Borba é um dos principais autores que pesquisam sobre uso das TI nas aulas de Matemática, sendo coordenador do Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), grupo este que vem desenvolvendo pesquisa sobre o papel das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) nos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

face. Inicialmente tínhamos duas opções, sendo elas o GeoGebra e o Cinderella[6]. Este segundo possui como principal atributo o fato de ter sido criado especialmente para o estudo de Geometrias não Euclidianas, tendo as representações geométricas vistas sob diferentes modelos, o hiperbólico, o esférico e o euclidiano. Portanto, o traçado de uma reta esférica ou um ângulo esférico, por exemplo, é feita de maneira automática, sem precisar de muitas construções. Por outro lado, o Cinderella não permite a experimentação e investigação requerida dos problemas a serem propostos neste trabalho, uma vez que todas as construções de Geometria Esférica, por exemplo, são realizadas sem precisar fazer uso de elementos da própria Geometria Euclidiana. Além disso, ele é menos acessível e possui uma interface menos atraente.

O GeoGebra, apesar de não ter sua criação direcionada para o estudo de Geometria não Euclidiana, possui vários recursos que, combinados, permitem a criação de objetos da Geometria Esférica, como a própria esfera, o traçado de arcos de pequenos e grandes círculos, bem como retas tangentes á estes círculos, que permitem, além da criação de ângulos esféricos, a possibilidade de usar tais recursos para experimentação e o consequente confronto com a Geometria Euclidiana. Além disso, este *software* é muito acessível, estando já instalado em laboratórios de informática de diversas escolas e boa parte dos alunos de Licenciatura em Matemática já tiveram ou terão algum contato com o mesmo ao longo de sua formação acadêmica.

1.3 Formação de professores de Matemática

A formação de professores é uma das linhas de pesquisa educacional com maior produção científica, de acordo com Nacarato (2006). E apesar de tantas pesquisas realizadas sobre esta temática, ela aponta que ainda é longa a distância entre os resultados destas pesquisas e suas implicações práticas na docência.

Em relação a formação de professor, de forma geral, Ponte (2002), um dos principais estudiosos sobre o tema, assegura que o futuro professor precisa desenvolver competências em diversas áreas fundamentais. São elas:
1- Formação pessoal, social e cultural;
2- Formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade;
3- Formação no domínio educacional;
4- Competências de ordem prática;
5- Capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica.

A segunda competência citada diz respeito ao conteúdo, ao conhecimento es-

[6]Também é um *Software* de Geometria dinâmica. Ele pode ser baixado no link: ⟨https://cinderella.de/tiki-index.php?page=Download+Cinderella.2⟩

pecífico do professor em relação àquilo que será ensinado. Sobre este aspecto, Ponte (2002, p. 2) afirma que "Sem dominar, com um elevado grau de competência, os conteúdos que é suposto ensinar, o professor não pode exercer de modo adequado a sua função profissional." Mas, como o professor não deve ser visto apenas como um mero transmissor de conteúdo, na quinta competência apresentada, Ponte (2002) expõe que o professor deve possuir competências no que diz respeito ao domínio da análise crítica de determinadas situações, além de possuir capacidades de produzir um novo conhecimento tencionando sua possível transformação.

E quando este conhecimento específico é a Matemática, D'ambrósio (1993), ao falar da formação de professores de Matemática para o século XXI, apresenta uma visão do que se constitui um ambiente propício à aprendizagem. Para ela, este ambiente deve se caracterizar de forma que os alunos possam propor, explorar e realizar investigações de problemas matemáticos. Dessa forma, "o processo de aprendizagem da Matemática se baseia na ação do aluno em resolução de problemas, em investigações e explorações dinâmicas de situações que os intrigam." (p. 38).

Neste sentido, Ponte (2002, p. 10) evidencia que:

> Do mesmo modo que os alunos da escola básica e secundária podem desenvolver muitas das suas competências matemáticas através da resolução de problemas e da realização de trabalho investigativo, também os nossos formandos – futuros professores – podem desenvolver muitas das suas competências profissionais com base em situações que envolvem exploração, pesquisa, produção de materiais, discussão e análise.

E reforçando essa ideia, retomando as reflexões de D'ambrosio (1993), esta afirma que é necessário alinhar a formação de professores à esta visão proposta, uma vez que o futuro professor terá mais sucesso ao agir dessa forma com seus alunos se ele já tiver passado por um experiência semelhante em sala de aula, tendo em vista que geralmente o professor ensina da forma como lhe foi ensinado.

Pensando ainda neste alinhamento, ela aponta que é essencial que as disciplinas da formação inicial possam questionar o conhecimento matemático como algo pronto e acabado, "analisando as decisões arbitrárias que levam à legitimação de certas formas matemáticas e ao descarte de outras." (D'AMBROSIO, 1993, p. 39).

Ou seja, para o futuro professor, não basta apenas possuir um conhecimento técnico-formal da Matemática, o que seria suficiente para um bacharel em Matemática, por exemplo. Para Fiorentini (2005, p. 110), para ser professor de Matemática, é necessário, sobretudo "conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático". Dessa forma, o que se espera à formação do professor de Matemática é uma abordagem compreensiva dos assuntos tratados de forma a poder abranger seus variados aspectos, o que permite auxiliar este futuro professor na leitura crítica de um mundo em constantes transformações e contribuir positivamente com a comunidade no qual está inserido.

E neste sentido, Ponte (2000, p. 6) expressa que:

> Um professor que não acompanha o progresso do saber nos seus domínios de ensino, que não procura conhecer os meios didácticos à sua disposição, que não desenvolve as suas competências profissionais, organizacionais e pessoais, dificilmente pode realizar um ensino de qualidade ou dar um contributo positivo à comunidade educativa onde se insere.

Tendo em vista estas reflexões apresentadas, tem-se um embasamento teórico que justifica o percurso metodológico adotado nesta pesquisa, o que fundamenta a escolha do tema, os recursos adotados e o público alvo escolhido.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA

Neste capítulo, serão abordados alguns aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento da Geometria bem como uma breve reflexão acerca de como se deu o ensino deste conteúdo na Educação Básica no Brasil e as principais consequências deste processo. Será feita também uma exposição de alguns autores que versam sobre o Ensino de Geometria na Educação Básica. Além disso, aborda-se o ensino de Geometria não Euclidiana em cursos de Licenciatura em Matemática, com a análise da presença deste conteúdo na estrutura curricular dos cursos dos Institutos Federais do Brasil. E para finalizar, apresenta-se o processo que culminou com o surgimento das Geometrias não Euclidianas.

2.1 Um pouco de história sobre o desenvolvimento da Geometria

Desde o início dos tempos, o homem, na mera tentativa de sobreviver em meio aos animais selvagens, à natureza e à própria falta de alimentos, se viu na necessidade de desenvolver habilidades de pensar, fazer e assim criar instrumentos para auxiliá-lo neste processo. Dessa forma, no simples ato de lascar uma pedra para descarnar um animal para se alimentar, foi necessário comparar, medir, analisar e observar, e nestas simples ações o ser humano fazia Matemática mesmo sem saber o que era Matemática. (D'AMBRÓSIO, 1999)

D'Ambrósio (1999) também aponta que ao falar de Matemática, é impossível não falar da História da Humanidade, pois as duas se confundem. Isso se deve ao fato de que, muito antes de a Matemática ter sido concebida formalmente, como um corpo organizado (e isso se deu por volta do século XV) a mesma já era praticada por nossos ancestrais mesmo que de forma inconsciente, como descreveu o parágrafo acima.

Com o surgimento da Agricultura, levantam-se perguntas como: onde plantar? Como plantar? O que plantar? Como armazenar? E quando plantar? E para respondê-las, ainda segundo D'Ambrósio (1999), houve a necessidade de se pensar em um calendário, e este está intimamente relacionado à atividades matemáticas elementares, que com a evolução da humanidade, passou a auxiliar em tarefas como construções (o que possibilitou a criação de moradias fixas) e explicações de fenômenos naturais e da própria existência. Isso nos mostra que a Matemática está presente desde o início do desenvolvimento humano, e as demarcações de terra foi um exemplo concreto deste fato.

De acordo com o historiador Boyer (1974), não se sabe ao certo em que ponto da evolução humana a Matemática foi concebida, pois a mesma se desenvolveu bem antes do próprio ato de se fazer registros. Sobre a Geometria, há relatos de que a mesma se originou no Egito Antigo. A necessidade de um sistema justo de arrecadação de impostos nas áreas rurais no Antigo Egito teve implicações muito interessantes. A cheia do Rio Nilo era um evento periódico esperado por todos, pois quando ele se esvaziava, deixava as terras extremamente férteis favorecendo o plantio. Porém, sempre que isso acontecia, as águas do rio levavam consigo as estacas utilizadas para demarcar as terras dos agricultores, o que gerava conflito entre eles visto que as porções de terra de alguns eram levadas para terrenos de outros. Com o intuito de resolver este conflito, os que sentiam lesionados reclamavam ao Faraó a injustiça, já que com menor quantidade de terra era justo que pagassem menos impostos.

Na tentativa de resolver o problema, o Faraó passou a nomear funcionários, chamados de *esticadores de cordas* para remarcar as terras e os mesmos se viam então na necessidade de calcular áreas e para isso, dividiam as terras em triângulos e quadrados com auxílio de cordas, fazendo nascer então, a chamada Geometria, do grego $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$, *geo*- terra, *metria*- medida. Portanto, Geometria significa medir a terra, e isso levanta um questionamento importante: Se a Geometria teve início em uma necessidade prática, porque ela não é ensinada nas escolas partindo deste pressuposto?

Indo mais adiante, por volta do ano de 300 a.c., devido à morte de Alexandre, o Grande, seu Império foi dividido entre seus generais, cabendo a parte do Egito à Ptolomeu I que, sem pensar muito, contratou um grupo de intelectuais de alta categoria para lecionar em um instituto construído por ele, que mais adiante passou a ser chamado de Biblioteca de Alexandria, recebendo este nome por se localizar na cidade de Alexandria que passou a ser um centro intelectual.

Segundo Boyer (1974), um destes sábios era Euclides, matemático grego responsá-vel pela criação de uma obra monumental, *Os Elementos*, um compêndio que reuniu toda Matemática desenvolvida até então por diversos estudiosos e também por ele próprio. O sucesso da obra, além do que foi mencionado anteriormente, reside no fato de ter sido a primeira exposição axiomática e dedutiva da Matemática, que foi expressa em uma sequência lógica de forma que seu autor partiu de definições, noções comuns, axiomas e postulados e usou estes elementos para demonstrar teoremas e proposições no qual se percebe uma construção extremamente meticulosa. O trabalho foi tão essencial para o desenvolvimento da Geometria, que suas edições foram numerosas a ponto de perder apenas para a Bíblia Sagrada, como relata Boyer (1974).

Este historiador afirma ainda que não se sabe muito sobre a vida de Euclides de Alexandria, como é também conhecido o Matemático, mas acredita-se que ele não fazia questão de abordar questões práticas em seus estudos sendo então muito teórico, como se percebe em sua obra. Sua versatilidade pode ser percebida na variedade de tópicos que ele conseguiu cobrir durante a vida, como óptica, astronomia, música, mecânica e é claro a Matemática.

Ao falar sobre este importante ícone da Matemática, Carreira (2012, p. 27) expressa que "[...] para dizer a verdade, atualmente consideramo-lo mais como um ramo do saber do que como um homem". A obra, que foi e ainda é estudado por diversos autores, é então considerado um marco na história da Geometria, sendo por isso impossível não merecer destaque neste trabalho, pois graças a eles foi possível sistematizar a teoria desse campo do saber tão importante e necessário.

2.2 Ensino de Geometria na Educação Básica: reflexões

Alguns autores têm se desdobrado em estudos na tentativa de descobrir as causas e os efeitos da ausência do Ensino de Geometria na Educação Básica. Dentre eles, Pavanello (1993) salienta que este abandono não pode ser consequência do desenvolvimento da Matemática em si, já que a Geometria se estabeleceu pela necessidade humana, como foi descrito anteriormente. Ela acrescenta ainda que este abandono também não pode ser justificado pelo discurso de que sua contribuição para a formação do aluno não seja importante, ao passo que o estudo desse ramo da Matemática foi visto, durante séculos, como indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio.

Pavanello (1993) conclui que as causas deste abandono foram devido às mudanças sócio-político-econômicas produzidas na sociedade brasileira anos atrás. Sobre estas modificações, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) [1] ocorrido em 1960 se destaca como maior marco de mudança curricular do Ensino de Matemática brasileiro nos 50 últimos anos, sendo que este abalo se deu na tentativa de unificar os três ramos fundamentais da disciplina, sendo eles, Aritmética, Álgebra e Geometria. E neste movimento o Ensino da Geometria se deu por meio de uma linguagem predominantemente simbólica pautada na Teoria dos conjuntos no qual a Geometria possuía um tratamento com rigor algébrico, abrindo mão da preocupação em uma construção sistematizada partindo de noções primitivas e práticas, como se deu no seu próprio desenvolvimento.

Como o ensino de Geometria já se encontrava em crise, esse movimento se tornou, de acordo com Pereira (2001), o principal responsável pela ausência dessa disciplina no meio escolar, já que a maioria dos professores da época não dominava esse tipo de ensino e

[1] Foi um Movimento Internacional da Matemática que ocorreu na década de 1960 e teve grandes repercussões no Brasil que se caracterizou por abordar o ensino de Matemática pautado na formalidade e nos fundamentos da teoria de conjuntos.

a Lei de Diretrizes e Bases da Educação 5691/71, facilitou ainda mais esta ausência, pois após sua promulgação, conferiu liberdade aos professores de escolher seu programa de ensino, o que possibilitou aos docentes que se sentiam inseguros em ministrar Geometria, que não eram poucos, que a abandonasse. Outros acabavam por deixá-la como o último conteúdo a ser ensinado, talvez na tentativa de tirar de si a culpa alegando não ter tido tempo para dedicar-se a ela, segundo Pereira (2001).

Em vista deste processo, se verifica no ensino de Matemática uma grande lacuna relacionada ao Ensino de Geometria e de acordo com Pereira (2001), essa lacuna priva o aluno da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos, acarretando sua má formação.

Tendo em vista o que foi discutido até aqui, percebe-se que a maneira com que o ensino de Geometria foi proposto para a Educação Básica não contribui para o aprendizado deste ramo tão importante da Matemática, por não enfatizar sua aplicação prática no cotidiano. Para amparar esta ideia, Brum, Schuhmacher e Silva (2015) afirmam que atualmente há problemas relacionados ao ensino deste conteúdo no Ensino Básico no qual existe uma falta de correlação com outras áreas do conhecimento, o que impede uma visão mais ampla e crítica por parte dos alunos.

Dessa forma, o que é proposto neste trabalho é o estudo de uma Geometria que possui aplicação prática imediata na vida de toda humanidade, visto que seu modelo é, não por coincidência, exatamente o formato de um local onde o ser humano habita, o planeta Terra. E a possibilidade de descrever e compreender o meio onde vivemos torna o estudo de Geometria pela ótica proposta como de extrema relevância na formação inicial dos futuros professores.

2.3 Ensino de Geometria Esférica no Ensino Básico: relevâncias e possibilidades

Embora haja alguns poucos não especialistas que ainda acreditam que a terra seja plana, a concepção de sua esfericidade é provada e aceita desde muitos séculos atrás, e essa aceitação foi sendo forjada com o tempo. Uma das observações que auxiliou neste processo foram os eclipses lunares, depois o afastamento no horizonte e a consequente redução no tamanho, e também o fato de as estrelas serem distintas nos diferentes polos. A Geometria Esférica, apesar de ter sido descoberta teoricamente somente no século XIX, já era praticada de forma inconsciente desde muito tempo, e um exemplo mais evidente dessa prática foram as grandes navegações, nos séculos XV e XVI, no qual determinar a rota mais curta, além de representar uma economia de tempo e dinheiro, na maioria das vezes era questão de vida ou morte.

Mas essa rota mais curta, logicamente não pode ser a distância de uma linha reta que une o ponto de partida ao ponto de chegada, pois como a terra é esférica isso representaria um “furo” na terra, e isso não é nada interessante, muito menos prático. Se não é uma linha reta, deve ser então uma curva, um arco. Mas não pode ser um arco qualquer, deve ser um arco que possui como centro o próprio centro da terra. Este arco era chamado *Ortodromia* na época das grandes navegações. Hoje recebe o nome de *Geodésica*.

Por tudo isso, Whittlesey (2019) considera que dada sua importância nas navegações, a Geometria Esférica deve ser considerada digna o suficiente para ser ensinada ao público geral. Ele reforça ainda que “Todos os matemáticos devem saber algo sobre geometria esférica, mas para o professor do ensino médio, amplo conhecimento das aplicações da matemática nas ciências naturais é particularmente importante.” (p. 9).

Além das navegações, as rotas aéreas também é um exemplo onde se utiliza os conceitos de Geometria Esférica. Sair de um ponto do planeta e ir à outro, mesmo que seja por vias aéreas também requer um conhecimento Geométrico, conhecimento este que vai além dos conceitos de Geometria Euclidiana.

Whittlesey (2019) apresenta mais uma aplicação da Geometria Esférica que atualmente se tem na Geologia: compreender como funciona os movimentos das placas tectônicas. Ele expõe que “No século XX, foi demonstrado que a superfície da terra é coberta por uma série de placas bastante rígidas que se movem uma em relação à outra. Esses movimentos causam terremotos e vulcões. A geometria esférica nos ajuda a entender como esses movimentos da placa funcionam.” (p. 8).

O GPS, cuja sigla traduzida é Sistema de Posicionamento Global, é uma importante ferramenta utilizada pelo ser humano e que facilita sua localização de forma extremamente precisa em qualquer ponto do Planeta. Este sistema usa a interseção de quatro esferas, sendo uma delas a própria terra para determinar corretamente o posicionamento de um determinado ponto. Este sistema tão necessário é graças aos estudos de Geometria Esférica.

Outro campo de estudo importante, a Teoria da relatividade de Einstein só é possível em um modelo de Geometria não Euclidiano, no caso a Geometria Esférica, ou Geometria Riemanniana, como será mostrado posteriormente. De acordo com Courant e Robbins (2000, p. 276) “Na teoria geral da relatividade de Einstein, a geometria do espaço é uma Geometria Riemanniana, a luz se propaga ao longo de geodésias, e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche. ”

Atualmente, o ensino de Geometrias não Euclidianas como esférica e hiperbólica não se manifesta na grande maioria das propostas curriculares, de acordo com Brum, Schuhmacher e Silva (2015). Mas por outro lado, tem se intensificado o número de pesquisas que discutem sobre seu ensino na Educação Básica, especialmente a Geometria Esférica, pelas suas importantes aplicabilidades, como descritas anteriormente.

Brum, Schuhmacher e Silva (2015), em um estudo sobre a apresentação de conceitos elementares de Geometrias não Euclidianas no Ensino Médio, afirma que "Existe um excesso de formalismo com a prevalência das demonstrações geométricas euclidianas e o abandono por completo de outras Geometrias em sala de aula." (p. 423). Estes autores expõem sobre a necessidade de os estudantes compreenderem que vivemos em um mundo em que apenas a Geometria Euclidiana não é suficiente para explicar certos fenômenos e já que as situações de aprendizagem devem levar os estudantes a estabelecer diferenças entre determinados objetos sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações, faz-se necessário que ele compreenda os diversos modelos de Geometria.

Outro autor a defender essa ideia é Medeiros (2017) quando propõe estratégias que possibilitam a abordagem da Geometria Esférica na Educação Básica, que segundo o mesmo é um tipo de Geometria que possui um caráter que permite aos estudantes usar sua curiosidade para novas descobertas. Ele afirma que "Enquanto professores, precisamos estimular nossos alunos a lançarem-se em suas curiosidades que podem ser pilares de novas descobertas. Foi assim no passado, pode ser assim no futuro." (p. 71).

Andrade (2011) apresenta uma sequência didática de Geometria Esférica para o Ensino Médio com objetivo de avançar discussões a respeito do Ensino e aprendizagem deste conteúdo. Ao analisar como se dá a apropriação de conceitos básicos dessa Geometria para alunos do 2° ano, a autora observou que ao utilizar uma sequência de ensino com diferentes registros de apresentação, foi proporcionado aos estudantes a apropriação de tais conhecimentos em conjunto com os já conhecidos da Geometria Euclidiana. Sendo assim, ela assegura que mesmo não fazendo parte do currículo educacional, a Geometria Esférica é possível de ser trabalhada. Destaca ainda a importância de outras pesquisas na área de forma a solidificar conhecimentos acerca deste conteúdo que se configura em extrema relevância.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ do Ensino Médio) apresentam como unidades temáticas da Geometria os seguintes tópicos: Geometria Plana, Geometria Espacial, Métrica e Geometria Analítica.

Embora isso seja proposto, o mesmo documento orienta que para a compreensão e construção de modelos para a resolução de problemas matemáticos e de outras disciplinas, uma capacidade importante que deve ser trabalhada é a de utilizar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) orientam ainda que:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (PCN, p. 6)

Além disso, estes documentos preveem nos estudos dos conceitos geométricos a oportunidade de desenvolver no estudante um tipo especial de conhecimento: o de compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivemos. E mais ainda, ao orientar sobre o ensino de geometria ao estudante, o documento explicita que:

> [..] mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes **modelos explicativos do espaço e suas formas** numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios **diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana**. (grifo nosso, p. 125)

E em se tratando de documentos que regem o Ensino no Brasil, não poderíamos deixar de citar a Base Nacional Curricular Comum (BNCC)[2], que é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Ao elencar as competências gerais da Educação Básica, a BNCC reforça a ideia apresentada nos PCNs ao citar em seu primeiro item como sendo: "Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para **entender e explicar a realidade**". (BRASIL, 2018, grifo nosso). Ao expor sobre a unidade temática Geometria, é discutido que a mesma " envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento."

Portanto, ao embasar-se nas citações acima dos PCNs e da BNCC, quando colocam as expressões **modelos explicativos do espaço e suas formas** e **entender e explicar a realidade**, pode-se considerar que como o modelo esférico é o que mais se aproxima daquele que representa a realidade e auxilia na resolução de problemas do cotidiano, como as aplicações aqui citadas, fica claro o quanto esta abordagem pode enriquecer a formação dos estudantes quando se trata de uma articulação entre Matemática e vida real, dando significados a sua aprendizagem.

[2]Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais [...]

2.4 Ensino de Geometria Esférica na formação de professores

Tendo em vista todas as reflexões tecidas ao longo do texto, sobre as fragilidades do ensino de Geometria e sobre as possibilidades e importâncias de seu estudo na Educação Básica, percebe-se o quanto é relevante, necessário e possível o Ensino de Geometria Esférica neste segmento no que diz respeito a uma formação integral e significativa dos alunos, como abordam Frigotto, Ciavata e Silva (2005). E como o responsável por este ensino são os professores, é justificável e necessário fornecer aos mesmos meios que os possibilite um ensino de qualidade, visto que a falta de formação destes profissionais da educação foi um dos motivos que culminou em tantas fragilidades no ensino de Geometria, algo que foi discutido na seção anterior.

Em seu trabalho intitulado "Geometrias não-euclidianas na Educação Básica: utopia ou possibilidade?", Kaleff (2010) discute a respeito do ensino de Geometria não Euclidiana na Educação Básica e consequentemente na formação de professores, onde ela destaca a importância de se trabalhar essa nova geometria, o que ela chama de "olhar além da janela de Euclides", no qual ela expõe que:

> A importância de se trabalhar as GNE [a] , até mesmo na escola e, principalmente, no âmbito da licenciatura, reside no fato dessas teorias possibilitarem a quebra de paradigmas e padrões visuais, trazendo o visualmente inesperado para a sala de aula e a oportunidade de criação de novas imagens e conceitos. Ou seja, de possibilitar trazer padrões de desenhos e relacioná-los a expressões e palavras com outros significados além dos euclidianos, unindo-se aspectos geométricos aparentemente antagônicos, quando apresentados em diferentes linguagens e em outros registros gráficos de representação. (p. 10)
>
> [a] Geometrias não Euclidianas

Neste sentido, a autora sustenta e defende a ideia de se trabalhar as Geometrias não Euclidianas na formação de professores, o que infelizmente não tem sido tratado nos cursos de Licenciatura com a atenção que merece. Ela afirma ainda que desde o século passado, existem estudos internacionais que ressaltam explicitamente a importância e propõe a inclusão de outras geometrias além da Geometria Euclidiana no ensino.

Cavichiolo (2011), em sua importante dissertação sobre o tema, realiza uma revisão de literatura sobre o ensino de Geometrias não Euclidianas no Brasil com o intuito de saber quais os problemas levantados, as constatações e as contribuições que tais pesquisas trazem para as propostas que visam incluir conteúdos dessas geometrias na formação do futuro professor de Matemática. Os autores com os quais ela dialoga são: Brito (1995), Bonete (2000), Pataki (2003), Cabarati (2004), Reis (2004), Marqueze (2006), Kaleff (2007) e Santos (2009).

A autora relata que em síntese, todas as pesquisas analisadas em seu estudo denunciam que:

> O estudo das Geometrias não Euclidianas não está amplamente incorporado na formação inicial do professor de Matemática. Percebe-se que em grande parte, dos cursos de Licenciatura em Matemática, essas geometrias não são contempladas nas suas propostas curriculares. (CAVICHIOLO, 2011, p. 33).

Ela garante ainda que estas pesquisas apontam para a necessidade de se incorporar o estudo de Geometrias não Euclidianas no currículo escolar, mas para isso, salientam que os futuros professores devem estar preparados para seu ensino nas escolas, o que sinaliza que o ponto de partida para a efetivação de propostas que visam incluir as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica é a formação inicial destes profissionais da educação. (CAVICHIOLO, 2011).

Com o propósito de averiguar esta ausência tão mencionada pelas pesquisas, foi realizado um levantamento, com o auxílio da plataforma "e- MEC" [3] e dos sites oficiais das Instituições públicas Federais [4], com o intuito de verificar quais dos cursos de Licenciatura em Matemática, na modalidade presencial e reconhecidos pela Capes, oferecidos pelos Institutos Federais do Brasil abordam em seu Projeto Político Pedagógico (PPP) alguma possibilidade de se trabalhar Geometria Esférica ou Geometria não Euclidiana no decorrer da graduação.

O resultado foi compilado e pode ser observado na tabela do apêndice A, no qual foi possível verificar que dos 100 cursos pesquisados, apenas 18 deles (listados na referida tabela) possui alguma disciplina cujo conteúdo aborde algo relacionado a este tema. Assim, tem-se um limitador, se torna um desafio para os professores a possibilidade de replicar este conteúdo aos seus alunos, já que os mesmos, na grande maioria das vezes, não teve uma formação direcionada para este ensino.

Isso é reforçado nas palavras de Kaleff (2010), ao discutir sobre as imagens mentais que são impregnadas em nossa mente sobre a Geometria Euclidiana, relacionando com a formação continuada. Neste sentido, ela afirma que:

> Se for considerado o comportamento do professor, a inclusão dos novos conhecimentos geométricos na escola pode não se realizar, pois, até mesmo no âmbito da formação continuada, se apresenta uma ampla variedade de dificuldades ligadas a essas imagens, ao uso da linguagem e à resolução de problemas introdutórios às GNE, as quais se refletem no desempenho profissional [...] (KALEFF, 2010, p. 10).

E se uma formação inicial deficitária do professor pode dificultar a inclusão de conhecimentos introdutórios acerca da Geometria não Euclidiana no Ensino Básico, acredita-se que este minicurso irá contribuir com essa formação, que poderá se apresentar de forma

[3] Disponível em: https://emec.mec.gov.br/

[4] A análise foi feita por meio dos respectivos Projetos Político Pedagógicos (PPP) das Instituições

mais integral e mais condizente com os objetivos almejados para com a Educação Básica, como observado pelos documentos apresentados anteriormente, os PCNs e a BNCC. Mas vale ressaltar que a relevância em se inserir estudos relacionados ao ensino de conceitos básicos de Geometria não Euclidiana, especificamente a Geometria Esférica, não reside na ideia de elevar o estudo deste novo conhecimento em detrimento do já comumente praticado. A proposta é salientar a importância do conhecimento, por parte dos futuros professores, de que muitos dos problemas da humanidade e, é claro, do mundo científico, são solucionados ou explicados com base em modelos não Euclidianos.

Neste sentido, no processo de reflexão gerada pelo estudo de conceitos introdutórios de Geometria Esférica proposto por este trabalho, espera-se que os professores em potencial possam desconstruir a ideia enraizada em todo o seu período escolar de que a Geometria Euclidiana é suficiente para a explicação de todos os fenômenos à nossa volta.

E este processo de desconstrução é ainda mais relevante, considerando o fato de que a ciência tem evoluído de forma que o questionamento de ideias simples se torna fundamental para sua reformulação e sua consequente inovação. Esta afirmação é baseada nos estudos de Godoi (2015), em uma pesquisa cujo objetivo foi apresentar o problema das ideias de natureza simples para o desenvolvimento da ciência partindo da perspectiva de Gaston Bachelard.

2.5 Geometrias não Euclidianas: como surgiram?

Antes de expor sobre as Geometrias não Euclidianas, faz-se necessário discorrer um pouco sobre a Geometria Euclidiana. Esta última recebeu este nome devido às contribuições de Euclides, Matemático grego que viveu antes de Cristo. Essa Geometria, após ter sido consolidada por Euclides, foi considerada por quase dois milênios como sendo a única predominante, suprema e inquestionável, pelo fato de ter sido suficiente para suprir as necessidades existentes da época e também por ter sido desenvolvida de forma tão sistemática por Euclides em sua obra *Os Elementos*, que por muito tempo foi dispensável ir contra seus fundamentos.

Complementando essas ideias, o historiador Boyer (1974) relata que "até o século XIX a geometria euclidiana descrevia o mundo por aproximações. Reinava absoluta e era capaz de dar conta dos fenômenos estudados até então [...]" e um pouco mais, nas palavras de Berlinski, Carina e Moriconi (2018, p. 10), durante mais de 2000 anos, "geometria significou geometria euclidiana, e a geometria euclidiana era Os elementos."

Os Elementos é uma obra que, além de outros ramos da Matemática, contém toda a teoria da Geometria exposta em um sistema axiomático [5], sendo que este compêndio é dividido em treze livros, de maneira que os seis primeiros tratam de Geometria Plana Elementar, os três seguintes versam sobre Teoria dos Números, o livro X expõe sobre incomensurabilidade e os demais discorrem sobre Geometria Espacial. Como exemplo, no livro I temos uma lista com 23 definições, nas quais sete delas estão listadas abaixo em uma versão traduzida.

> Livro I
> Definições
>
> 1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
> 2. E linha é comprimento sem largura.
> 3. E extremidades de uma linha são pontos.
> 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
> 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
> 6. E extremidades de uma superfície são retas.
> 7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma. (BICUDO, 2009) (p. 97)

Segundo Berlinski, Carina e Moriconi (2018) alguns Matemáticos do século XIX e XX como David Hilbert e Moritz Pasc foram unânimes em criticar algumas definições de Euclides, em consonância com Boyer (1974) quando salienta que o autor de *Os Elementos* começa com definições que não podem ser definidas, como no exemplo de que "ponto é aquilo de que nada é parte", sendo que neste caso, as palavras que ele usa para definir a noção de ponto, como "parte", não foram pré-definidas e isso acontece em outras definições como: "E linha é comprimento sem largura" onde também se verifica o uso de palavras indefinidas.

Essa estrutura lógica de Euclides, apesar de ter os primeiros questionamentos científicos datados do século XVI, permaneceu sem mudanças até o século XIX, período em que se originaram as Geometrias não Euclidianas. Com o objetivo de alicerçar essas novas Geometrias de forma consistente e sobre um rigor lógico, de acordo com Salema (2018), testemunhou-se tentativas de trabalhos que estabelecesse um sistema completo de axiomas motivados a revisar a estrutura lógica de Euclides, já que a mesma não garantia a consistência necessária, como visto anteriormente.

Nessas tentativas, em 1889, o alemão David Hilbert foi quem obteve maior êxito, preenchendo as lacunas deixadas pelos *Elementos* de forma que ele percorreu um caminho oposto ao de Euclides, ao invés de definir alguns elementos, Hilbert considerou como

[5] "Euclides foi o primeiro a apresentar a Matemática de uma forma dedutiva, na qual a veracidade de cada afirmação é confirmada por uma sequência lógica de deduções mais simples até sua comprovação final, o método axiomático." (SCHENNA, 2019, p. 23)

indefinidos três entes Geométricos: ponto, reta e plano e construiu relações mútuas entre eles por meio dos axiomas. Ele enunciou também três relações fundamentais: incidência, estar entre e congruência, além de 20 axiomas subdivididos em 5 grupos. Segue um trecho do capítulo I do seu livro, que exerceu forte influência no século XX:

> DEFINIÇÃO: Imaginemos os três sistemas diferentes de objectos: aos objectos do primeiro sistema chamemos de pontos e representemo-los por $A, B, C, \ldots$; aos objectos do segundo sistema chamemos rectas e representemo-los por $a, b, c, \ldots$; aos objectos do terceiro sistema chamemos planos e representemo-los por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$[...]. (HILBERT, 2003, p. 1).

Dessa forma, o conjunto axiomático de Hilbert, como ficou conhecido atualmente, estabeleceu-se completamente o caráter puramente dedutivo e formal da Geometria, já que segundo Boyer (1974), apesar de apresentar uma estrutura dedutiva, *Os Elementos* estava cheio de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas. Porém o autor salienta que para sua época isso não era tão relevante tendo em vista a grandiosidade do seu trabalho que ainda hoje possui suas bases como parte do currículo universal da humanidade, e como refletem Berlinski, Carina e Moriconi (2018, p. 9), "Os elementos é um grande livro; talvez Euclides tenha lido seu brilhante trabalho em voz alta, [...] sem saber que seus alunos ouviam em primeira mão uma lição que tantos outros viriam a ouvir tantas vezes e de tantas outras vozes."

Encerra-se esta seção que introduziu um pouco sobre a Geometria Euclidiana sendo que na próxima será discutido como se deu a origem das Geometrias não Euclidianas, que como será verificado, essa procedência possui relação direta com os Postulados de Euclides, especialmente a tentativa de demonstrar o Postulado V.

2.5.1 História do quinto postulado e seus desdobramentos

Prosseguindo com os estudos sobre a obra magna de Euclides, ao finalizar as vinte e três definições, o Matemático enuncia cinco Postulados que podem ser verificados a seguir fazendo ressalva de que o que Euclides chama de "reta", hoje recebe o nome de "segmento de reta".

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO, 2009, p. 98).

É necessário frisar aqui que na época de Euclides, Axiomas eram “noções comuns” sobre determinado assunto, já os Postulados eram verdades que nem sempre necessitavam ser aceitas apenas por si só, como os Axiomas. Atualmente, convencionou-se que não é necessário fazer esta distinção entre Axioma e Postulado.

Em relação aos Postulados elencados anteriormente, apresenta-se seguidamente suas reescritas em uma linguagem mais atual e mais simples.

1. Por dois pontos, é possível traçar um segmento de reta;

2. Um segmento de reta pode ser prolongado infinitamente para construir uma reta;

3. Dado um centro qualquer e uma distância qualquer, é possível traçar um círculo;

4. Todos os ângulos retos são iguais entre si;

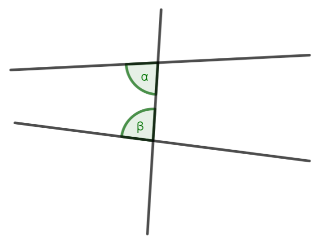
5. Se uma reta intersecta outras duas retas e a soma dos ângulos internos de um mesmo lado for menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas, ao serem prolongadas se encontrarão do mesmo lado que estes ângulos.

Nos três primeiros postulados, Euclides estabelece a existência de pontos, retas e círculos de forma a iniciar um “caminho” para alcançar os objetivos pretendidos, ou seja, o mesmo utiliza estes elementos básicos para demonstrar todas as outras figuras definidas por ele . Fazendo uma pequena observação a respeito do primeiro, é impossível traçar um segmento de reta partindo de um ponto e chegando nele mesmo. Assim, far-se-ia necessário especificar “por dois pontos **distintos**, é possível traçar um segmento de reta.”

O quarto postulado parece um tanto quanto óbvio, mas também desconcertante, já que ao expor sobre igualdade de ângulos retos, surge a dúvida: o que seria ângulo reto? Ângulo reto seria um “ângulo que é reto”? Seria reto o ângulo formado por duas retas que são cruzadas na perpendicular? Ou seriam duas retas perpendiculares aquelas que formam um ângulo reto? Mas o que seria um ângulo? Bem, isso foi posto por Euclides na sua 8^a definição: “E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.” Um pouco confuso, mas esclarece melhor. Confusões à parte, estes quatro primeiros Postulados apresentam noções mais tranquilas de se perceber e aceitar sem demonstração.

Mas o quinto postulado é mais perturbador porque não é tão evidente. Ele foi o motivo de instigações, incômodos e aborrecimentos por aproximadamente dois milênios. E para compreendê-lo melhor, basta observar a figura 2.1.

Figura 2.1: Representação do Postulado V.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Com o auxílio da imagem acima, o que ficou postulado por Euclides é que, sendo a soma dos ângulos em destaque menor do que 180° então as duas retas irão se intersectar, no mesmo lado que estão os ângulos, ao serem prolongadas. O que sabemos de Geometria Euclidiana atualmente nos induz a não ter dúvidas quanto à este fato e poderia até aceitarmos como noção básica sem muitas indagações, mas naquela época, como tudo estava sendo descoberto, alguns matemáticos mais instigantes começaram a questionar o por quê isso era válido. Pensaram então que seria possível demonstrar este postulado, com o auxílio dos postulados anteriores.

Muitas das tentativas não foram exitosas porque nas tentativas de demonstração os Matemáticos fizeram uso inconsciente de afirmações equivalentes ao quinto Postulado, mas para provar o Postulado original era necessário provar esta nova versão, e como não conseguiam, estavam na verdade produzindo uma falácia.

Uma afirmação a é logicamente equivalente a uma afirmação b se, supondo a veracidade de a pode-se demonstrar a veracidade b e de forma análoga, supondo a veracidade de b pode-se demonstrar a veracidade de a. Por exemplo: considere uma versão equivalente do Postulado V proposta por Playfair no século XVIII: "Uma e apenas uma linha reta pode ser traçada passando por qualquer ponto P no plano paralelo a uma dada linha reta AB."[6] Então, se esse enunciado puder ser demonstrado, consequentemente demonstra-se o Postulado original, caso contrário, nada resolvido.

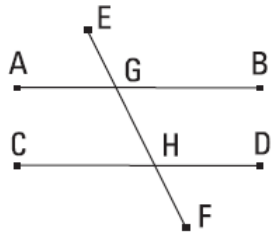
E assim como este, surgiram outros enunciados em substituição ao Postulado V, então apresenta-se a seguir um pequeno comentário sobre algumas tentativas de demonstração que faz uso destes enunciados equivalentes sendo que as mais significativas serão melhor explicadas posteriormente.

Claudius Ptolomeu (100-168), de acordo com Schenna (2019), foi um dos primeiros a tentar demonstrar o Postulado V, no século II. Ele considerou a versão do Postulado

[6]Este Postulado ficou então conhecido como Postulado das paralelas e é o mais comumente utilizado.

na íntegra, mas de forma implícita teria usado a 29^a proposição do primeiro capítulo de *Os Elementos*, que dizia o seguinte: “A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.” Bicudo (2009). Segue a visualização dessa proposição na figura 2.2.

Figura 2.2: 29^a proposição de Euclides.



Fonte: Bicudo (2009)

Mas o que Ptolomeu não havia notado, é que acabara de gerar um ciclo vicioso, já que em sua demonstração ele usa o Teorema do ângulo externo, que é equivalente ao Postulado das Paralelas.

Posidônio de Apameia (135 a. C-51 a. C), por volta de 100 a.C., tentou provar que: “retas paralelas são eqüidistantes” e contudo, assumiu de forma implícita que o Lugar Geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a uma reta dada é outra reta, o que só poderia ser demonstrado com o próprio postulado, o que invalidou sua demonstração.

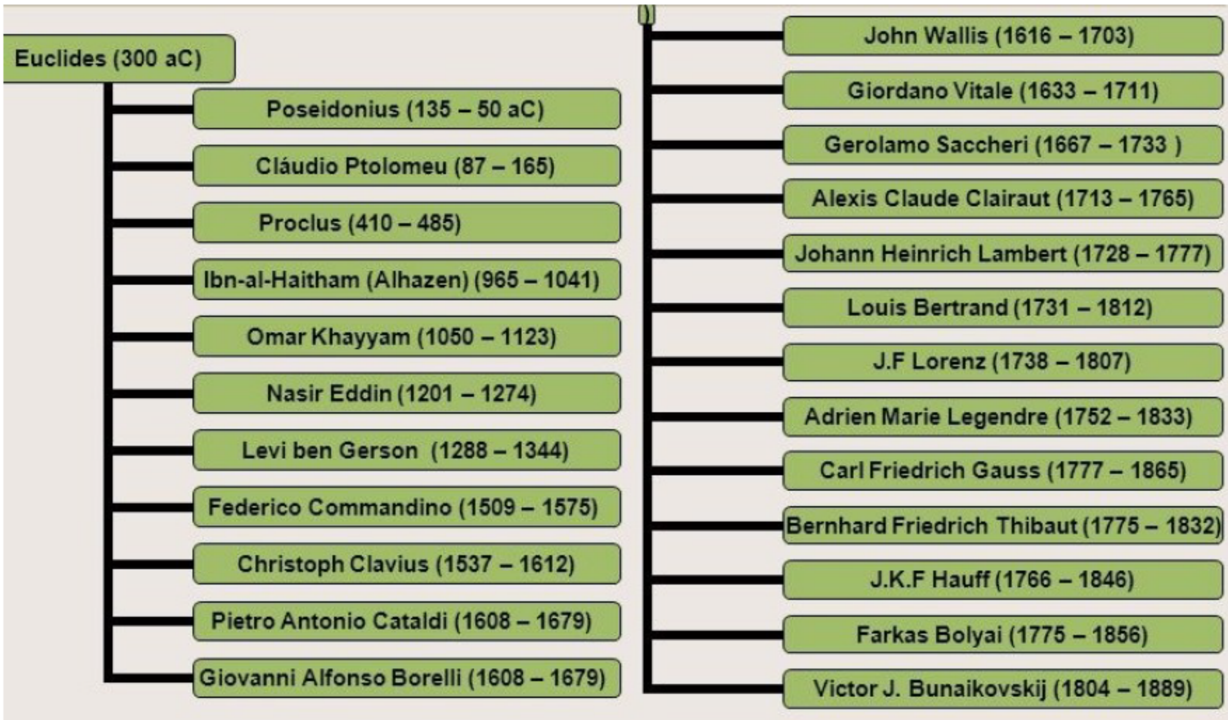
Proclo Diádoco (412-485) também embarcou nesta missão impossível, mas antes de tudo, corrigiu um erro no trabalho de Ptolomeu e usou esse fato em sua prova. Ele usou duas retas paralelas e supôs que se uma transversal intersecta uma dessas, então intersecta a outra, admitindo então que retas paralelas são equidistantes, que é uma propriedade válida na Geometria Euclidiana, porém é um resultado do Postulado V.

Proclo considerava este Postulado muito problemático, ressaltando que ele devia ser riscado da lista pois é repleto de dificuldades.

> O fato de que as retas convergem quando os ângulos retos são diminuídos é certo e necessário; mas a afirmação de que chegarão a se encontrar é apenas verossímil, mas não necessária, na falta de um argumento que prove que isso é verdade para duas linhas retas. Pois o fato de que existam algumas linhas que se aproximam indefinidamente mas permanecem sem se tocar [asýmptotoi], por mais improvável e paradoxal que pareça, também é certo e está comprovado em relação a linhas de outro tipo. Por que, no caso das retas, não é possível ocorrer o mesmo que ocorre com as linhas mencionadas?. Proclo, citado por (EUCLIDES. . . , 2010).

Percebe-se então que ele tinha noção de que não seria impossível que as duas retas citadas por ele não se intersectassem. As tentativas de demonstrar o postulado não pararam por aí. Muitos outros matemáticos se dedicaram à ele sem obter sucessos. A figura 2.3 é uma cronologia de algumas delas.

Figura 2.3: Cronologia das tentativas de prova do quinto postulado.



Fonte: Schenna (2019)

Como se percebe no esquema acima, muitos foram os Matemáticos que se empenharam na tentativa de transformar este postulado em um teorema, e muitos acreditavam que o próprio Euclides deve ter relutado em aceitá-lo, já que ele parece evitá-lo nas suas demonstrações, fazendo isso pela primeira vez apenas na 29^a proposição. A figura B.1 do Anexo B apresenta uma relação de definições, postulados e noções comuns utilizadas nas demonstrações de cada uma das proposições feita por Euclides na sua obra, confirmando que nas primeiras 28 proposições o Postulado V não foi utilizado.

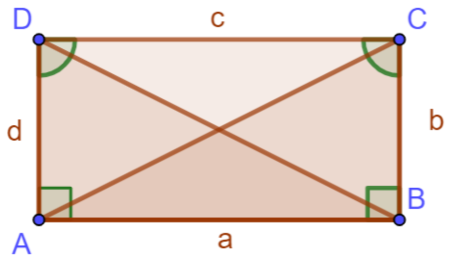
2.5.1.1 As tentativas de Saccheri

O padre jesuíta Italiano e matemático Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) apresentou uma tentativa de demonstração do Postulado V de Euclides mais desenvolvida do que seus predecessores. Em 1733 publicou um livro, Euclides *Ab Omni Naevo Vindi-*

catus (Euclides com toda falha retirada) que foi descoberto somente em 1889 sendo hoje considerado uma das primeiras obras de Geometria não Euclidiana, embora o intuito dele não fosse este e sim apenas demonstrar um postulado da Geometria Euclidiana. Saccheri[7] já conhecia as tentativas de demonstrações anteriores e enunciou o Postulado da seguinte forma: Por um ponto P passa uma única paralela a uma reta dada, que é exatamente a forma que Playfair enuncia. Mas para demonstrá-lo, supôs que o mesmo era falso para usar a técnica de redução ao absurdo, sendo o primeiro a propor este método na prova do último postulado.

Com isso, usou as hipóteses de que "por um ponto P passam infinitas retas paralelas a uma reta dada" e "por um ponto P não passa nenhuma reta paralela a uma reta dada". Para sua demonstração, usou um quadrilátero (atualmente conhecido como *quadrilátero de Saccheri*) com dois ângulos consecutivos retos (ângulos da base) e dois lados opostos congruentes (b e d), como exemplifica a figura 2.4 a seguir:

Figura 2.4: Quadrilátero de Saccheri.



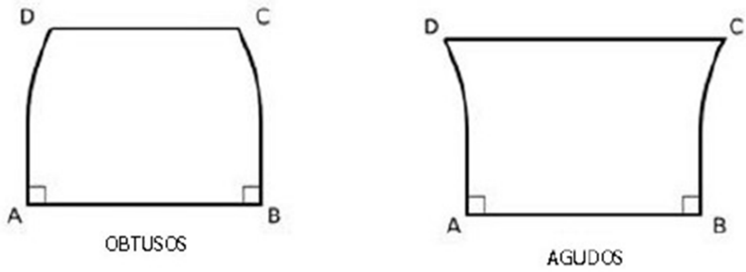
Fonte: Elaborado pelo autora, 2020

O fato de que os dois ângulos superiores são iguais segue de uma demonstração por congruência de triângulos: Nos triângulos DAB e CBA, $\overline{DA} = \overline{CB}$, $\angle DAB = \angle CBA = 90°$, e como o lado $\overline{AB}$ é comum, estes triângulos são congruentes pelo caso LAL (Lado Ângulo Lado) donde segue que as diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são congruentes. Analisando os triângulos ADC e DCB, temos o lado $\overline{CD}$ comum a ambos, $\overline{DA} = \overline{CB}$ e como $\overline{BD} = \overline{AC}$, conclui-se que estes triângulos, pelo caso LLL (Lado Lado Lado), também são congruentes e dessa forma, prova-se que $\angle ADC = \angle BCD$.

A ideia de Saccheri era mostrar que na hipótese de os dois ângulos do topo serem ambos obtusos ou agudos, como na figura 2.5, seria gerada uma contradição, o que levaria a concluir que eles seriam retos, demonstrando então sua teoria por redução ao absurdo e consequentemente o quinto Postulado estaria provado.

[7]Vale detacar que os trabalhos de Saccheri são idênticos aos de Thabit ibn-Qurra que, também, tentou demonstrar o Postulado das Paralelas, a partir de movimento de partículas no espaço.

Figura 2.5: Hipótese do ângulo obtuso e agudo, respectivamente.



Fonte: Schenna (2019)

Porém, em suas tentativas de demonstração, encontrar contradições na hipótese dos ângulos serem obtusos não foi difícil, pois como ele assumiu a infinitude da reta como propõe os próprios postulados de Euclides, Saccheri concluiu que "a hipótese do ângulo obtuso é absolutamente falsa, pois destrói a si mesma". Vale aqui salientar que essa é a ideia da Geometria esférica, onde as "retas" são finitas, como será explicado posteriormente.

Na hipótese de os ângulos serem agudos, não encontrou contradições satisfatórias, apesar de mergulhar em teoremas- que segundo ele eram "estranhos"- e demonstrações de forma incansável. Ele então forçou uma contradição, recusando aceitar na veracidade da hipótese, mas mal sabia ele que teria acabado de descobrir outra Geometria e que muitos dos seus resultados seriam usados posteriormente para definir as Geometrias Esféricas e Hiperbólicas.

Ele foi o primeiro matemático a chegar tão perto de uma nova teoria, mas a Geometria de Euclides era vista por ele como a única e inquestionável e isso o impediu de enxergar além do que se via. Nas palavras de Boyer (1974, p. 321):

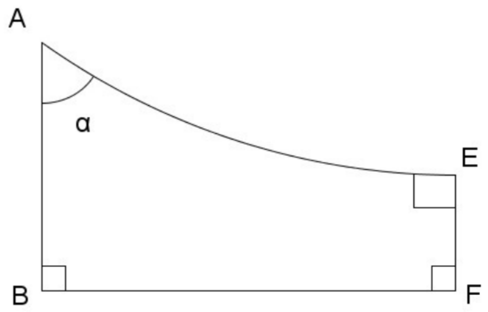
> Sabemos agora que ele estava construindo uma geometria não euclidiana perfeitamente consistente; mas Saccheri estava tão completamente convencido de que a geometria de Euclides era a única valida que permitiu que esse preconceito interferisse em sua lógica. Onde não havia contradição ele torceu o raciocínio ate pensar que a hipótese 3 levava a um absurdo. Por isso deixou de fazer o que teria sido sem dúvida a descoberta mais importante do século dezoito - a geometria não euclidiana. Assim seu nome permaneceu desconhecido por mais um século, pois a importância de sua obra não foi reconhecida pelos que o seguiram.

De acordo com Berlinski, Carina e Moriconi (2018) Saccheri conseguiu demonstrar muitas proposições interessantes e apesar de não alcançar seus objetivos quanto ao Postulado V, seus admiradores italianos como Beltrami lhe deram tantos créditos por suas falhas quanto daria a um matemático por triunfar. Berlinski completa: "Saccheri era astuto, capaz e penetrante. Mas nunca encontrou a contradição que antecipava."

2.5.1.2 As tentativas de Lambert

De acordo com Boyer (1974), Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), Matemático Suíço, tentou completar as ideias de Saccheri também por redução ao absurdo, usando um quadrilátero parecido com o dele em suas investigações, porém, utilizando como ponto de partida três ângulos retos como pode ser observado na figura 2.6.

Figura 2.6: Quadrilátero de Lambert.



Fonte: Bianconi, 2018

A intenção de Lambert era mostrar que para o quarto ângulo, vale as seguintes hipóteses e suas possíveis teses:

- Igual a um ângulo reto, que implica soma dos ângulos de um triângulo igual a dois retos, caso equivalente ao quinto postulado;
- Obtuso, que implica que a soma dos ângulos de um triângulo é maior do que dois retos;
- Agudo, que implica que a soma dos ângulos de um triângulo é menor do que dois retos.

À maneira de Saccheri, Lambert associou essas hipóteses aos caso de soma dos ângulos internos de um triângulo, que pode ser respetivamente igual, maior ou menor do que dois ângulos retos. Segundo Boyer (1974) ele foi além e mostrou que o quanto que essa soma é menor que, ou excede, dois ângulos retos é proporcional a área do triângulo, especulando que o caso da soma ser maior que 180° (caso do ângulo obtuso), a área do triângulo é proporcional ao seu excesso esférico [8], que é um teorema clássico da Geometria Esférica que será melhor explicado posteriormente.

[8] É o resultado que se obtém quando se retira da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico, dois ângulos retos.

Lambert conjecturou que o caso do ângulo agudo seria possível em uma superfície esférica de raio imaginário, mas de acordo com Freitas (2014) (p. 21) “essa hipótese foi provada tempos depois por Beltrami quando propôs um modelo para representação desses triângulos e de outros resultados decorrentes da negação do quinto postulado.” Portanto ele cometeu um equívoco ao propor o modelo de uma esfera para essa hipótese, já que tempos depois, Beltrami mostrou que o modelo era, na verdade, uma *pseuso-esfera*, como será explicado posteriormente.

Assim como Saccheri, Lambert rapidamente conseguiu contradição em relação à alguns dos postulados de Euclides a respeito da hipótese de o quarto ângulo ser obtuso, mas sobre a hipótese de ser agudo não conseguiu nenhuma falha ao relacionar com os demais postulados, porém, ao contrário de Saccheri, Lambert não forçou uma contradição, mas permaneceu insatisfeito com seus resultados ao parecer ter se convencido de seu fracasso, pois, segundo ele, citado por Boyer (1974, p. 240):

> Provas do postulado de Euclides podem ser levadas até um ponto tal que aparentemente só falta uma bagatela. Mas uma análise cuidadosa mostra que nesta aparente bagatela está o cerne da questão: usualmente ela contém ou a proposição que se quer provar ou um postulado equivalente a ele.

E assim, mais um matemático se aproximou da descoberta das Geometrias não Euclidianas, mas não prosseguiu com a ideia. O grande erro era querer demonstrar uma proposição que só é possível na visão Euclidiana, e o motivo é de, assim como tantos outros, possuir nítida a visão de apenas uma geometria possível, a de Euclides.

2.5.1.3 As tentativas de Bolyai e as considerações de Gauss

No século XIX, as ideias defendidas por Saccheri voltaram à tona. Carl Friedrik Gauss (1777-1855) suspeitava de uma Geometria que não fosse Euclidiana, mas não publicou nenhum trabalho a respeito pois pensava que a comunidade acadêmica da época não iria concordar tendo em vista que era uma ideia completamente fora dos padrões de uma Geometria que permaneceu firme por tanto tempo.

Janos Bolyai (1802 - 1860) era um tenente húngaro que possía muita aptidão pela Matemática. Filho de um amigo de Gauss, Bolyai trabalhou na demonstração do Postulado V adotando ideias de Saccheri e Lambert e como postulado a afirmação de que dada uma reta r, passa mais de uma reta paralela à r por um ponto P não pertencente à r. Ele não chegou a publicar suas análises sobre o caso a não ser em um pequeno apêndice em um livro de seu pai, Farkas Bolyai, apesar de ele próprio ter reconhecido seus erros.

Mesmo sem o apoio de seu pai, J. Bolyai continuou suas tentativas e de acordo com Schenna (2019) fez grandes descobertas, mas dessa vez, apesar de continuar usando o método dedutivo, negou a validade do Postulado V e tratou o caso Euclidiano como um caso particular dentro de outras possibilidades existentes. Reconheceu ainda que o Postulado V poderia ser demonstrado se conseguisse mostrar que um *paraciclo* [9] fosse uma linha reta.

Ciente da grandiosidade de suas descobertas, Bolyai elaborou um manuscrito e encaminhou a Gauss suas ideias sendo que o mesmo elogiou seu trabalho mas não demonstrou muito apoio ao retratar dizendo que, tudo o que mencionara já havia sido descoberto por ele coincidindo exatamente com suas investigações.

De acordo com Boyer (1974) J. Bolyai não ficou satisfeito com a resposta do "Príncipe dos Matemáticos" e aliado à este desapontamento, foi abalado pelas publicações de Lobachevsky em 1940, se retratando de uma descoberta extremamente semelhante a que ele fizera, mas de forma independente. Mas como Bolyai não havia publicado seus resultados, sua descoberta ficou esquecida por alguns anos, sendo relembrada por Riemman ao publicar um trabalho sobre Geometria com profundas consequências para a descrição matemática do espaço.

2.5.1.4 As tentativas de Lobachevsky

Na segunda década do século XIX Gauss conclui que as tentativas de Saccheri, Lambert e Bolyai tinha sido em vão e que havia outras Geometrias que não fosse a Euclidiana, porém ele não compartilhou essas ideias publicamente cabendo então ao russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) ser um dos principais responsáveis pela origem da Geometria não Euclidiana. Lobachevsky apresentou desde cedo uma tendência em Matemática e com apenas 21 anos já era professor em uma universidade na qual lecionou também disciplinas de Física e Astronomia e além disso, posteriormente foi nomeado reitor da mesma.

Em 1829, três anos após ter lido um livro sobre os princípios da Geometria, ele publicou o artigo *On the principles of geometry* (Sobre os princípios da geometria) marcando o surgimento da Geometria não Euclidiana. De acordo com Boyer (1974), ele havia se convencido que o Postulado V de Euclides não poderia ser demonstrado com o auxílio dos outros 4, se tornando o primeiro a publicar uma Geometria com suas bases construídas sob uma hipótese que contraria o postulado das paralelas, concluindo que a segunda parte de sua negação resultaria em um modelo diferente do Euclidiano e ele nomeou esse modelo de *Geometria imaginária*. Ao ficar sabendo de suas publicações, Gauss, da mesma forma que fez no caso de Bolyai, o elogiou mas nunca demonstrou apoio impresso, apesar

[9] Curva obtida no limite de uma família de círculos, de acordo com (SCHENNA, 2019) (p. 52)

de tê-lo recomendado em 1842 na eleição para a Sociedade Científica de *Gottingen*.

Segundo Schenna (2019) em 1955, um ano antes de sua morte, Lobachevsky publicou um livro chamado *Pangeometrie*, no qual ele fez uma exposição completa de seu sistema de Geometria. Sobre a *Pangeometria*, a autora afirma que "é uma ciência lógico-dedutiva fundamentada nas 28 proposições de Euclides sobre a negação do 5º postulado, com resultados decorrentes logicamente um do outro e livres de contradições internas." (p. 57).

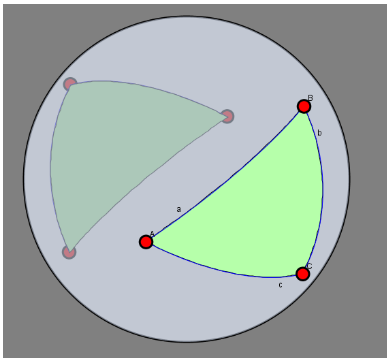
A Geometria que Lobachevsky descobriu juntamente com Bolyai, mas de forma independente, é o que chamamos de Geometria Hiperbólica e é Fundamentada no Teorema resultante de uma das negações do Postulado V de Euclides, a teoria de que existem infinitas retas paralelas à uma reta dada e que contenha o ponto *P* não pertencente a essa reta.

2.5.1.5 As contribuições de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi o Matemático que integrou completamente as ideias da Geometria não Euclidiana que até então estava às margens na comunidade científica, apesar das contribuições anteriores de Bolyai e Lobachevsky. De acordo com Boyer (1974), Riemann era filho de um pastor de uma aldeia que mesmo vivendo sob condições modestas o incentivou e permitiu que ele tivesse boas instruções. Riemann fez doutorado em *Gottinger* no qual sua tese foi sobre as funções de variável complexa.

Na Geometria Plana que se deduz a hipótese de Saccheri sobre os ângulos obtusos, se abandona também a Hipótese de infinitude da reta e Riemann propõe um modelo para essa nova Geometria no qual o plano é substituído pela superfície da esfera e as retas pelos círculos máximos dessa esfera, como na figura 2.7.

Figura 2.7: Modelo da Geometria Esférica.



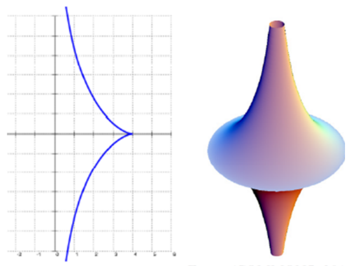
Fonte: Elaborado pelo autora, 2020

Neste caso, a soma dos ângulos internos de um triângulo excede dois retos e na Geometria Hiperbólica (a Hipótese do ângulo agudo), essa soma é menor que dois retos.

Como o modelo apresentado por Riemann é a superfície de uma esfera, esta Geometria não Euclidiana é chamada de Geometria Esférica ou Elíptica ou também de Geometria Riemaniana cujo teorema que a sustenta é uma das negações do Postulado V de Euclides: dada uma reta r e um ponto P fora dela, não existe nenhuma reta paralela à reta r passando por P.

Como relata Boyer (1974, p. 399), "Ao mostrar que a Geometria não Euclidiana com a soma dos ângulos maior que dois retos é realizada sobre a superfície de uma esfera Riemann essencialmente provou a consistência dos axiomas de que a geometria deriva." Da mesma forma, Eugênio Beltrami (1835-1890) constatou que havia disponível um modelo para a Geometria Hiperbólica, que é obtido por meio da rotação de uma curva chamada *tratriz* em torno de sua assíntota obtendo assim uma *pseudo-esfera*, como na figura 2.8, que possui curvatura negativa constante.

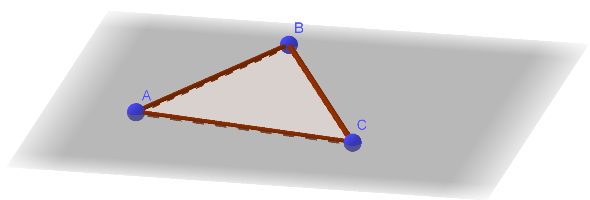
Figura 2.8: Modelo da Geometria Hiperbólica.



Fonte: Adaptado de Schenna (2019)

De maneira intuitiva, a curvatura de uma superfície diz respeito à um valor numérico que traduz o quão ela difere do plano euclidiano, o qual possui curvatura nula, como pode ser visto na figura 2.9.

Figura 2.9: Modelo da Geometria Euclidiana.



Fonte: Elaborado pelo autora, 2020

Pode-se dizer então que a Geometria Hiperbólica é um sistema consistente de proposições Geométricas que se trata de ponto, reta e plano, por dedução a partir de um conjunto de postulados no qual o postulado das paralelas é abandonado dando espaço a uma negação do mesmo. Nesta Geometria, a soma das medidas de um triângulo é menor do que dois ângulos retos. (COURANT; ROBBINS, 2000).

No caso da superfície esférica, que é o modelo da Geometria Esférica, estamos supondo que a curvatura é constante em todos os pontos e inversamente proporcional ao raio da esfera, isto é, a curvatura é igual a $\frac{1}{r}$. Note que a medida que raio da esfera aumenta, a curvatura da superfície esférica tende à zero, o que indica que neste caso a superfície se assemelha, em termos da curvatura, ao plano euclidiano.

Vimos então como se deu a origem da Geometria não Euclidiana[10], de forma lenta e através da dedicação constante e frustrações contínuas de vários Matemáticos que, ao longo de quase dois mil anos, ao tentar demonstrar o Postulado V de Euclides- existe uma única reta paralela a uma reta dada- se viram fracassados. Na verdade, estavam certos em atribuir tanta importância à um único postulado, mas ao mesmo tempo estavam errados em querer demonstrá-lo, pois não existia demonstração. A verdade veio a tona após muitos esforços: o tão perturbador postulado somente é válido em modelos plano e espacial, ambos euclidianos, ao passo que sua negação fundamenta o sistema das Geometrias não Euclidianas: Esférica e Hiperbólica.

Ao falar sobre este processo tão duvidoso e necessário, que culminou na descoberta de outras geometrias, Berlinski, Carina e Moriconi (2018, p. 11) afirma: "os matemáticos descobriram geometrias não euclidianas, com a geometria euclidiana tornando-se uma entre muitas [11], e os matemáticos quase enlouqueciam com possibilidades que os absorviam, com espaços que inchavam como bolas de basquete, curvados como selas de cavalo, ou que seguiam eternamente sem chegar a lugar algum."

Em seu livro sobre os elementos de Euclides, Berlinski, Carina e Moriconi (2018), ao refletir sobre esse lento descobrimento, ressalta ainda que esse desenvolvimento deveria ter ocorrido bem antes do século XIX, já que os capitães de navios ingleses, espanhóis e portugueses, navegando nos imensos oceanos já sabiam que a distância entre dois pontos não era necessariamente o comprimento de um segmento de reta. Isso já poderia ter sido uma pista para o descobrimento da Geometria Esférica.

[10] É importante frisar que a Geometria Projetiva (o mundo que vemos), também não é considerada Euclidiana (o mundo em que vivemos), e ela surgiu no século XVI. Contudo, o intuito dessa seção é falar sobre o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas que se fundamentam na negação do Postulado de Euclides. Dessa forma nos limitamos a falar apenas da Geometria Esférica e da Geometria Hiperbólica.

[11] Vale ressaltar que há uma interpretação de que a Geometria Euclidiana não seria uma entre outras, mas sim um campo isolado da qual se deriva as outras.

Reflexões à parte, é melhor pensar que toda esta trama serviu para mostrar o quanto a Matemática é surpreendente e como “pensar fora da caixa” nunca fez tanto sentido.

Contudo, uma questão é apresentada: se existem Geometrias que não seja a Euclidiana, qual delas é a mais correta? A resposta parece ser bem simples: depende da necessidade. Cada Geometria se encaixa em determinados tipos de problemas. A Geometria Euclidiana pode ser útil e suficiente para um mestre de obras enquanto que a Geometria Esférica é imprescindível no cálculo de rotas aéreas pelo fato de nosso planeta ser um modelo praticamente esférico. Portanto, tendo uma noção do processo histórico que culminou com o surgimento da Geometria Esférica, bem como algumas das suas possíveis aplicações, temos o embasamento necessário para prosseguir com o trabalho, destacando agora um estudo Matemático sobre seu modelo bem como os axiomas que a fundamenta.

3 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo são apresentados os elementos fundamentais do estudo da Geometria Esférica, bem como suas definições e propriedades, tendo como objetivo criar noções prévias para a compreensão dessa nova Geometria bem como da trigonometria esférica e outras relações importantes. Os resultados aqui apresentados são baseados nos autores: Todhunter (1863), Salema (2018) e Freitas (2014).

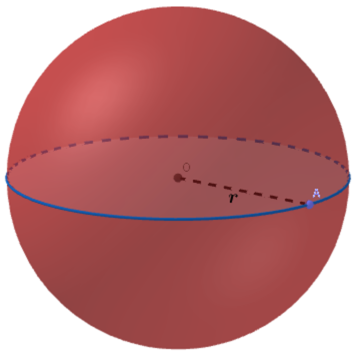
É importante destacar que as medidas dos ângulos considerados nesta seção estão em radianos, mas omitiremos esta notação para efeitos práticos. Então, por exemplo, onde deveria ser πrad, escreveremos apenas π.

3.1 Elementos e definições

Definição 3.1.1. Superfície esférica- Seja um ponto O e r um número real positivo. Uma superfície esférica de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos tais que sua distância a partir de O seja igual a r. Chamamos r de raio. Ver figura 3.1

.

Figura 3.1: Superfície esférica de centro O e raio r .

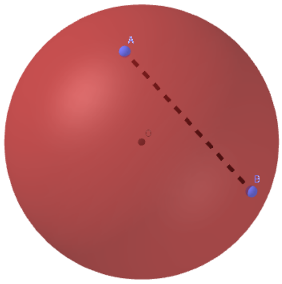


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

A Geometria Esférica é a geometria cujo modelo é a superfície esférica, como visto no capítulo que discorreu sobre o surgimento da Geometria não Euclidiana. Portanto, todos os elementos, definições, teoremas e as propriedades estarão relacionados a uma superfície esférica, equivalente ao plano da Geometria Euclidiana.

Definição 3.1.2. Corda - Chama-se corda de uma esfera ao segmento de reta que une quaisquer dois pontos sobre a superfície esférica correspondente, como na figura 3.2 a seguir.

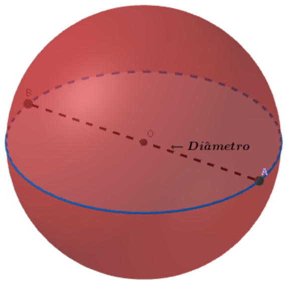
Figura 3.2: Corda.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Definição 3.1.3. Diâmetro - É a corda que passa pelo centro da esfera e cujas extremidades estão contidas na superfície esférica. Ver figura 3.3.

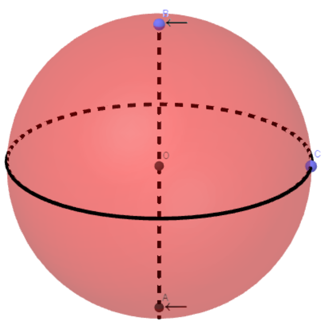
Figura 3.3: Diâmetro.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Definição 3.1.4. Antípodas - Interseção do diâmetro com a superfície esférica. São os pontos opostos em relação ao centro. Ver figura 3.4.

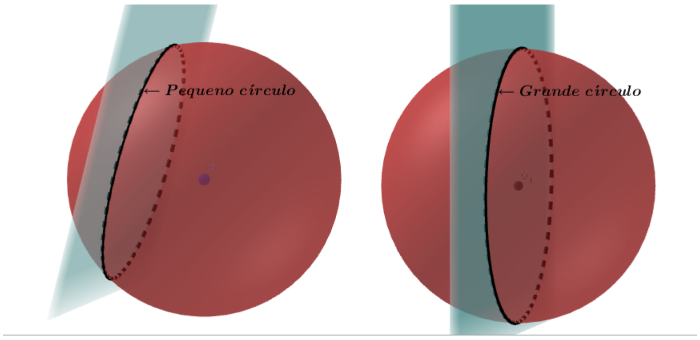
Figura 3.4: Antípodas.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Definição 3.1.5. Pequenos e grandes círculos - A interseção da superfície esférica com qualquer plano gera círculos. Estes são chamados de grandes círculos, ou círculos máximos, quando o plano em questão passa pelo centro da esfera, e de pequenos círculos quando isso não acontece. Ver figura 3.5.

Figura 3.5: Círculo Máximo.

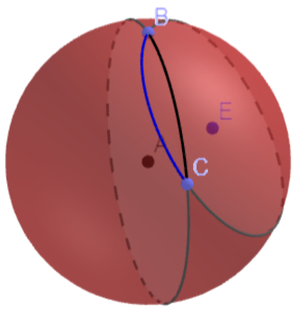


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

O círculo máximo em uma superfície esférica é equivalente a uma reta no plano. Por isso, neste novo modelo, as "retas" são finitas, porém ilimitadas. Perceba, por exemplo que se um ponto for deslocado em torno de um círculo máximo, em algum momento ele retorna ao ponto de partida.

Definição 3.1.6. Arco - É uma das partes de uma circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Como exemplo temos a figura 3.6 a seguir.

Figura 3.6: Arco.

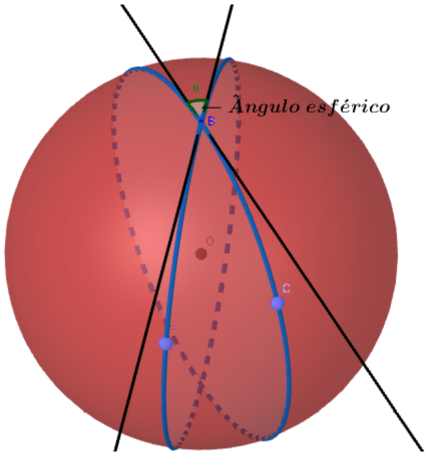


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Observe que temos dois arcos na figura: o de cor preta é arco de um círculo máximo da esfera, que é definido pelo centro da própria esfera. Já o arco azul faz parte de um pequeno círculo da esfera, portanto seu centro não coincide com o centro desta.

Definição 3.1.7. Ângulo esférico - É o ângulo formado por dois arcos de circunferência máxima e possui a mesma medida do ângulo plano formado pelas retas tangentes a esses arcos no ponto comum. Ver figura 3.7.

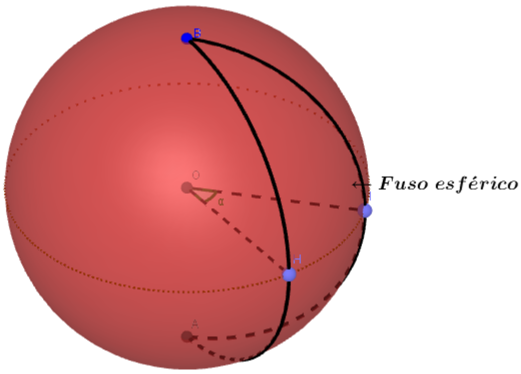
Figura 3.7: Ângulo esférico.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Definição 3.1.8. Fuso esférico - É a superfície obtida pela rotação de α $(0 < \alpha < 2\pi)$ de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro, como pode ser visualizado na figura 3.8.

Figura 3.8: Fuso esférico.



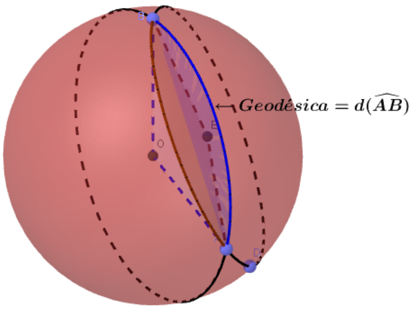
Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Definição 3.1.9. Geodésica - É a distância entre dois pontos na superfície esférica.

Para determiná-la, basta encontrar o menor arco [1] que contém o círculo máximo que passa por estes dois pontos, como na figura 3.9, onde o arco destacado de azul representa a distância entre os pontos A e B.

[1]A rigor, do ponto de vista de Geometria Riemmanniana, essa é uma geodésica minimizante. O outro arco também é uma geodésica, no entanto, não é minimizante.

Figura 3.9: Geodésica.

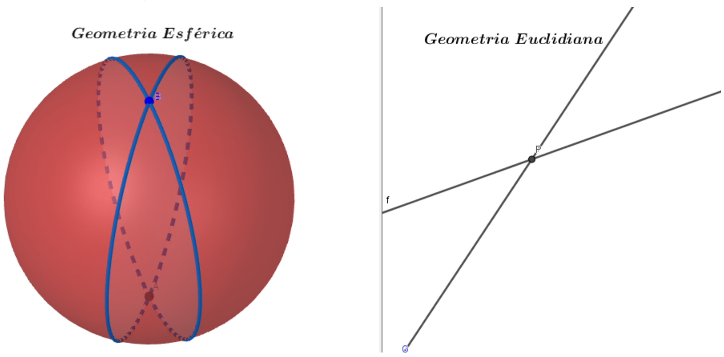


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Isso acontece porque como um arco é medido pela amplitude do ângulo que o define, ele tende a ser menor na medida que seu raio se torna maior. E na esfera um arco possui raio máximo quando este é o raio da própria esfera, que é portanto o círculo máximo.

Na Geometria Euclidiana, duas retas se intersectam segundo um único ponto, já neste modelo, a interseção entre elas se dá sempre por dois pontos, os antípodas, como pode ser visualizado na figura 3.10.

Figura 3.10: Interseção de duas retas.



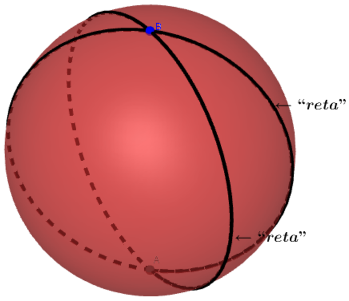
Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Isso acontece porque círculos máximos estão contidos em planos que passam pelo centro da esfera, e como sabemos da Geometria Euclidiana, dois planos que possuem um ponto em comum tem que conter um segundo ponto e em consequência uma reta, que neste caso, passa pelo centro da esfera e intersecta a superfície esférica em dois pontos, os antípodas. Além disso, esses dois pontos pertencem aos dois círculos máximos, o que nos diz que na Geometria Esférica duas retas distintas se intersectam em dois pontos, como podemos observar na figura 3.11.

Na sequência, registramos este fato como uma propriedade.

Propriedade 3.1.1. *Na Geometria Esférica duas retas distintas intersectam-se em dois pontos.*

Figura 3.11: Interseção entre duas “retas’.

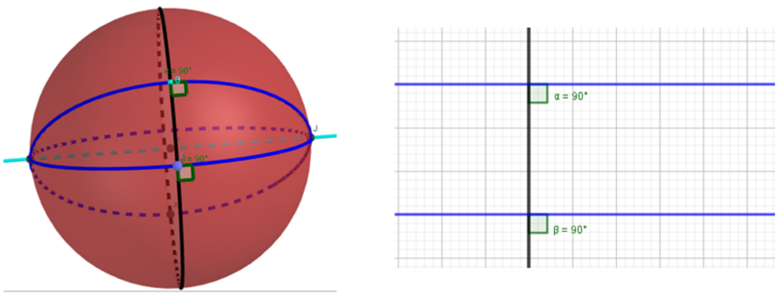


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Pela Propriedade 3.1.1, como duas “retas” sempre se intersectam segundo dois pontos, como na 3.11, então não existem retas paralelas na Geometria Esférica. Este foi o ponto central que fez emergir a Geometria não Euclidiana, sendo portanto uma das negações do postulado V de Euclides discutido no capítulo 2. Nele, considera-se que por um ponto P fora de uma reta r existe uma única reta que passa por este ponto, que seja paralela a reta dada. Há duas formas de negá-lo: 1) Existe mais de uma reta paralela a r passando por P; 2) Não existe nenhuma reta paralela a r que passa por P. E esse modelo que estamos considerando é proveniente exatamente dessa segunda negação.

Propriedade 3.1.2 (Retas perpendiculares)**.** *Na Geometria Esférica, duas retas perpendiculares a uma terceira reta, nunca são paralelas entre si, como por exemplo na figura 3.12.*

Figura 3.12: Duas retas perpendiculares a uma terceira reta.



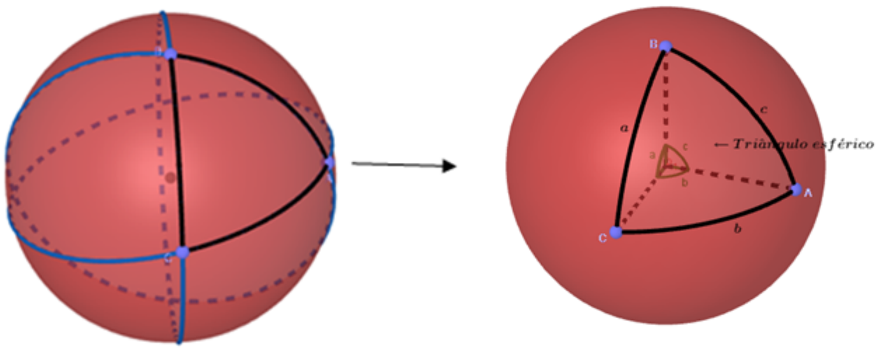
Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Essa proposição é uma consequência direta da negação do postulado das paralelas. Por essa razão, não existem retângulos esféricos e consequentemente, não existem quadrados esféricos.

3.2 Triângulo Esférico

Definição 3.2.1. Triângulo esférico - Sejam A, B e C três pontos distintos e não pertencentes ao mesmo círculo máximo, o que equivale a dizer que esses pontos são não colineares. A figura formada pelas geodésicas minimizantes que unem esses pontos dois a dois é denominada triângulo esférico, como na figura 3.13, onde temos um triângulo esférico de vértices, A, B e C e seus lados são as geodésicas a, b e c, correspondentes aos arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AB}$ respectivamente.

Figura 3.13: Triângulo esférico.

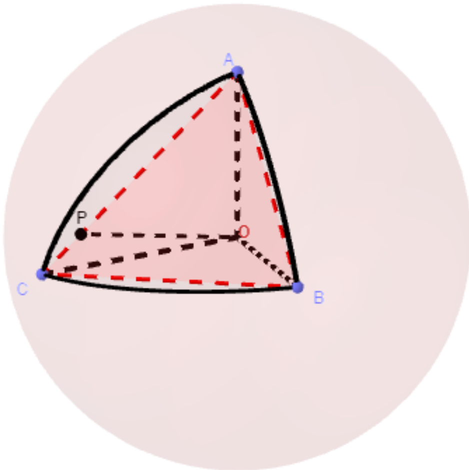


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Teorema 3.2.1 (Desigualdade triangular)**.** *Em um triângulo esférico ABC, a medida de um lado é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.*

Demonstração. Um lado de um triângulo esférico pode ser medido como sendo a amplitude do ângulo determinado pelos segmentos que unem seus extremos ao centro da esfera. Portanto, para demonstrar este teorema, basta verificar se a propriedade vale para os ângulos mencionados. Para isso, considere o triângulo da figura 3.14 a seguir e considere também o triângulo formado pelas cordas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$:

Figura 3.14: Desigualdade triangular.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Para o caso em que todos os ângulos são iguais, a relação é trivialmente satisfeita. Vamos analisar o caso em que todos são diferentes e tomemos o ângulo $A\widehat{O}C = \widehat{AC}$ como sendo o maior deles. Seja um ponto P, pertencente a $\overline{AC}$, de forma que $\overline{PA} = \overline{AB}$, o que implica que $A\widehat{O}P = A\widehat{O}B$. Da Geometria Euclidiana, sabemos que é válida a desigualdade:

$$\overline{AC} = \overline{PC} + \overline{PA} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

E como $\overline{PA} = \overline{AB}$, segue que

$$\overline{PC} < \overline{BC}$$

O que é equivalente a:

$$P\widehat{O}C < B\widehat{O}C \Rightarrow$$

$$A\widehat{O}P + P\widehat{O}C < A\widehat{O}P + B\widehat{O}C \Rightarrow$$

$$A\widehat{O}C < A\widehat{O}P + B\widehat{O}C \Rightarrow$$

$$A\widehat{O}C < A\widehat{O}B + B\widehat{O}C$$

Daí conclui-se que $\widehat{AC} < \widehat{AB} + \widehat{BC}$. Para os demais lados a demonstração é análoga, basta considerar o ponto P nas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e portanto a desigualdade é satisfeita. $\square$

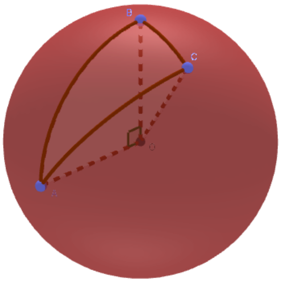
Essa desigualdade pode ser estendida para polígonos com quantidade maior de lados. Ou seja, em um polígono esférico qualquer, a medida de um lado é sempre menor do que a soma das medidas dos demais lados, bastando portanto dividir este polígono em triângulos e aplicar o mesmo procedimento anterior repetidas vezes.

3.2.1 Tipos de triângulos quanto aos lados

Na Geometria Esférica, os triângulos podem ser classificados quanto às medidas dos lados, lembrando que neste caso, os lados dos triângulos correspondem a amplitude do ângulo formado pelos segmentos de reta que unem seus extremos ao centro da circunferência. Logo, podem ser:

Retilátero- Quando o triângulo possui um lado cujo arco corresponde à medida de um ângulo reto, como na figura 3.15

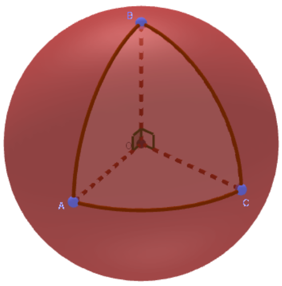
Figura 3.15: Triângulo retilátero.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Birretilátero- Quando o triângulo possui dois lados cujos arcos correspondem à ângulos retos, como na figura 3.16

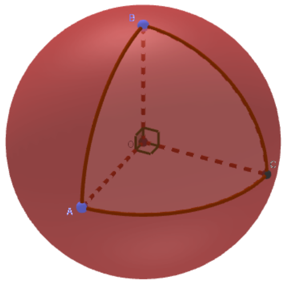
Figura 3.16: Triângulo birretilátero.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Trirretilátero- Quando o triângulo possui três lados cujos arcos correspondem à ângulos retos, como na figura 3.17

Figura 3.17: Triângulo trirretilátero.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

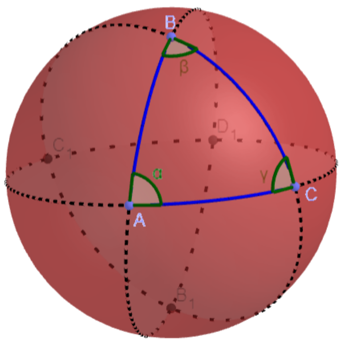
Antes de apresentar os demais tipos de triângulos, apresentamos um dos principais resultados da Geometria esférica, que é utilizado para demonstrar um teorema que diz respeito à soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

3.2.2 Relação de Girard e o excesso esférico

Teorema 3.2.2 (Relação de Girard)**.** *Sejam α, β e γ, as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC, então $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\dfrac{A_{Te}}{r^2}$, sendo A_{Te} a área desse triângulo esférico e r é o raio da esfera.*

Demonstração. Para demonstrar essa relação, vamos calcular a área do fuso (A_{fuso}) determinado pelo prolongamento dos lados $\widehat{AC}$ e $\widehat{AB}$, de ângulo α, do triângulo esférico da figura 3.18.

Figura 3.18: Relação de Girard.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Como a área de um fuso esférico é proporcional a área da superfície esférica (A_e), podemos montar a seguinte relação:

$$\frac{A_e}{A_{fuso}} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow$$

$$A_{fuso} = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} \Rightarrow$$

$$A_{fuso} = 2\alpha r^2$$

Logo, a área do fuso completo, isto é, a área de dois fusos determinado pelo prolongamento dos lados citados, será igual a $4\alpha r^2$. Analisando o prolongamento dos lados $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ teremos um segundo fuso completo. E o prolongamento dos lados $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$ gera um terceiro fuso completo. Mas estes prolongamentos geram um triângulo $A_1B_1C_1$ de mesma área que o triângulo ABC já que os pontos que os determinam são antípodas de A, B e C. Então, a área da superfície esférica é dada pela soma das áreas dos três fusos completos, subtraída da área de quatro triângulos de mesma área. Portanto,

$$A_e = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4A_{Te} \Rightarrow$$

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4A_{Te} \Rightarrow$$

$$\alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2 = \pi r^2 + A_{Te} \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{Te}}{r^2}.$$

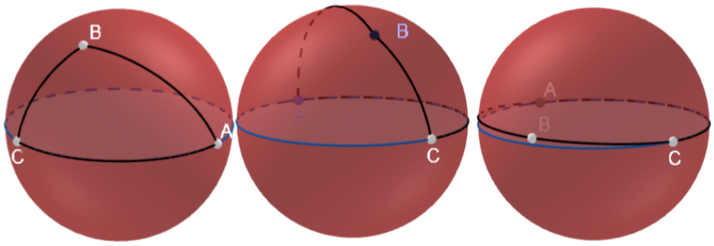
□

Essa relação explica um fato citado no Capítulo 2, que fala que na Geometria Esférica, a área de um triângulo é proporcional ao seu excesso esférico, e este excesso esférico é a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo e o valor de π. Ela é utilizada para calcular a área de um triângulo esférico dado as medidas dos ângulos internos e o raio da esfera que o contém.

Teorema 3.2.3 (Somas dos ângulos internos de um triângulo esférico)**.** *Sejam α, β e γ, medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC, então $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, vimos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{Te}}{r^2}$, logo conclui-se de imediato que $\pi < \alpha + \beta + \gamma$, já que r, $A_{Te} > 0$. Para a outra parte da desigualdade, vamos considerar o maior triângulo que se pode obter em uma esfera. Seja este triângulo formado pelo equador e outros dois círculos máximos, de forma que sua área tende á área de um hemisfério (metade da área da superfície esférica), como na figura 3.19.

Figura 3.19: Área máxima de um triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pela autora, 2021

Observe que movendo o ponto B da primeira esfera da figura acima, até obtermos um triângulo de área máxima, como na terceira esfera da mesma figura, a área deste triângulo (A_{Te}) tende a $2\pi r^2$, mas nunca atingirá este valor. Portanto, usando novamente o Teorema 3.2.2, temos:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{A_{Te}}{r^2}, \text{ com } r>0 \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi+\frac{2\pi r^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi+2\pi \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma<3\pi$$

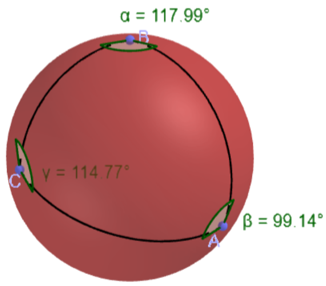
Juntando as duas desigualdades, concluímos então que $\pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$. □

Este teorema expõe uma das principais diferenças entre a Geometria Euclidiana e Esférica, já que na primeira, é sabido que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre π, o que é uma consequência direta do Postulado V de Euclides, o postulado das paralelas. Este fato justifica uma indagação feita na Introdução deste trabalho. Ao tentar sobrepor um triângulo plano em uma superfície esférica, como uma bola de futebol, este é completamente deformado. Isso acontece porque são dois modelos de Geometria diferentes e portanto a soma dos ângulos de um polígono não obedecem o mesmo padrão.

Uma observação importante a ser feita é que essa soma tende a ser igual a π quando tem-se um triângulo de área extremamente pequena, algo que é quase irrelevante se comparado com a esfera que o contém. Isso explica o fato de utilizarmos a Geometria Euclidiana para calcular área de superfícies como um lote, por exemplo, já que o mesmo, ao ser comparado com a superfície terrestre é praticamente insignificante, logo a figura tende a ser plana. Mas por outro lado, para calcular por exemplo a área do triângulo que possui como vértice três cidades distantes do planeta terra, deve-se recorrer à Geometria esférica, caso contrário, a diferença será muito notável.

Como exemplo do Teorema 3.2.3, temos um triângulo esférico na figura 3.20, cuja soma dos ângulos é $331,9^\circ$.

Figura 3.20: Soma dos ângulos de um triângulo esférico.



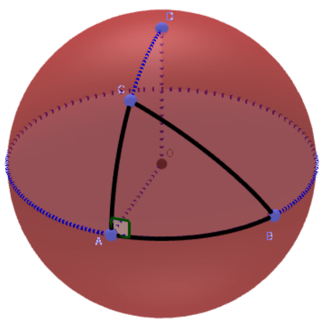
Fonte: Elaborado pela autora, 2020

3.2.3 Tipos de triângulos quanto aos ângulos

Como foi visto anteriormente, um triângulo na superfície esférica pode ter a soma dos ângulos entre π e 3π. Logo, não é de se estranhar que um triângulo esférico possa ter, além de um, dois, e até três ângulos retos. Por isso, os mesmos podem ser classificados como:

Triângulo retângulo-Possui um ângulo reto, como na figura 3.21.

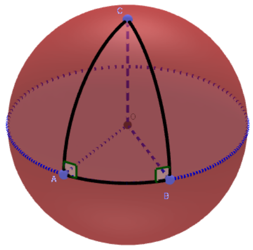
Figura 3.21: Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Triângulo birretângulo- Possui dois ângulos retos, como na figura 3.22.

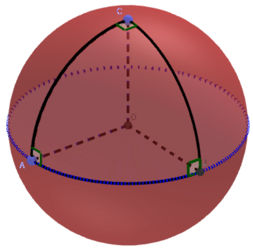
Figura 3.22: Triângulo birretângulo.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Triângulo trirretângulo- Possui três ângulos retos, como na figura 3.23.

Figura 3.23: Triângulo trirretângulo.

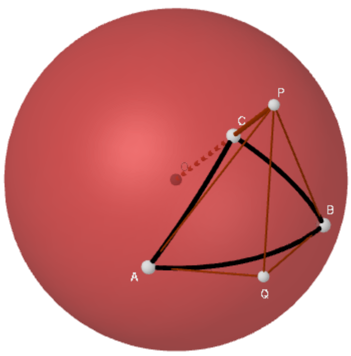


Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Teorema 3.2.4 (Triângulo esférico isósceles)**.** *Os ângulos da base de um triângulo esférico isósceles possuem a mesma medida.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico tendo os lados $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, em uma superfície esférica de centro O. Trace as retas tangentes aos lados $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$ nos vértices A e B respectivamente, como na figura 3.24.

Figura 3.24: Triângulo isósceles.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Estas tangentes encontrarão $\overrightarrow{OC}$ em P, e então os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ serão iguais já que os triângulos OAP e OBP são congruentes pelo caso Lado, Ângulo, Lado (LAL). Traçando também as tangentes $\overline{AQ}$ e $\overline{BQ}$ ao arco $\widehat{AB}$ nos pontos A e B respectivamente, temos que $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ já que os triângulos AOQ e BOQ são congruentes pelo caso especial de congruência entre triângulos retângulos. Como $\overline{PQ}$ é lado comum, segue que por LLL os triângulos APQ e BPQ são congruentes e finalmente $P\widehat{A}Q = P\widehat{B}Q$, que são exatamente, por construção, os ângulos da base do triângulo esférico. □

3.2.4 Semelhança de triângulos esféricos

Sabemos da geometria euclidiana que triângulos semelhantes possuem a mesma razão entre as medidas dos lados correspondentes, o que é equivalente ao fato de seus ângulos, também correspondentes, serem iguais.

Vamos analisar o que acontece na Geometria Esférica. Para isso, lembramos que dois arcos de círculos são semelhantes se os ângulos centrais definido por eles possuírem a mesma medida. Se isso acontece, então a razão entre suas medidas são iguais a razão entre seus raios. Mas como os lados de um triângulo esférico estão determinados por círculos de mesmo raio (o raio da esfera), então obrigatoriamente as medidas desses lados devem ser iguais. Ou seja, a semelhança apenas acontece quando os triângulos são congruentes.

3.3 Introdução à trigonometria esférica

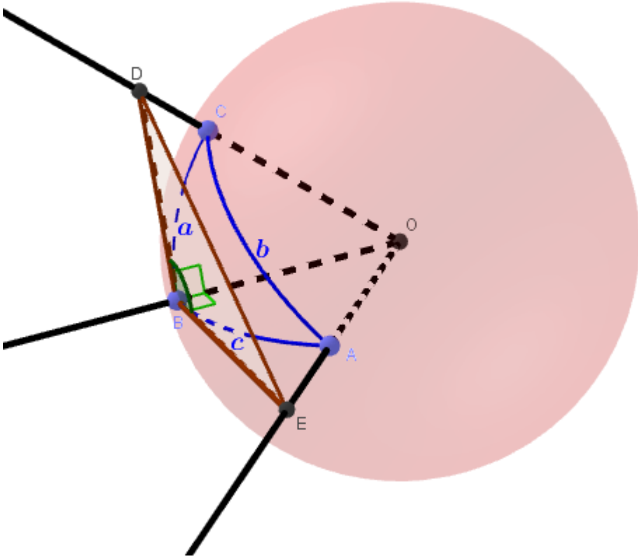
A trigonometria esférica investiga as relações existentes entre os lados e ângulos de um triângulo esférico. A seguir, apresentamos seus principais Teoremas: a Lei dos Cossenos e Lei dos Senos.

Teorema 3.3.1 (Lei dos cossenos para triângulos esféricos)**.** *Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c, e ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Então,*

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A} \\ cosb &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \widehat{B} \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstração. Amparados pela figura 3.25, sejam as retas $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$ tangentes ao triângulo esférico no ponto B.

Figura 3.25: Lei dos cossenos.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Portanto, o raio $\overline{OB} \perp \overline{BD}, \overline{BE}$. Por definição de ângulo esférico, $\widehat{B} = D\widehat{B}E$. Além disso, o triângulo OBD é retângulo em B e $B\widehat{O}D$ corresponde ao arco $\widehat{BC}$ que por sua vez foi designado como a. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo OBD,

$$\tan a = \tan B\widehat{O}D = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{r} \Rightarrow$$

$$\overline{BD} = r \tan a$$

No mesmo triângulo,

$$\cos a = \cos B\widehat{O}D = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{r}{\overline{OD}} \Rightarrow$$

$$\overline{OD} = \frac{r}{\cos a} = r \sec a \Rightarrow$$

$$\overline{OD} = r \sec a$$

No triângulo OBE, retângulo em B, temos,

$$\tan c = \tan A\widehat{O}B = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}} \Rightarrow$$

$$\overline{BE} = r \tan c$$

No mesmo triângulo,

$$\cos c = \cos B\widehat{O}E = \frac{\overline{OB}}{\overline{EO}} = \frac{r}{\overline{EO}} \Rightarrow$$

$$\overline{EO} = \frac{r}{\cos c} \Rightarrow$$
$$\overline{EO} = r \sec c$$

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo BDE, temos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 - 2\overline{BD} \times \overline{BE} \times \cos E\widehat{B}D \Rightarrow$$
$$\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 - 2\overline{BD} \times \overline{BE} \times \cos \widehat{B}$$

Substituindo $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$ na equação acima, temos:

$$\overline{DE}^2 = r^2 \tan^2 a + r^2 \tan^2 c - 2r \tan a \times r \tan c \times \cos \widehat{B} \Rightarrow$$

$$\overline{DE}^2 = r^2 \times (\tan^2 a + \tan^2 c - 2 \tan a \times \tan c \times \cos \widehat{B}) \tag{3.2}$$

E aplicando a lei dos cossenos no triângulo DOE,

$$\overline{DE}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{EO}^2 - 2\overline{DO} \times \overline{OE} \times \cos D\widehat{O}E$$

E substituindo $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ nesta equação, temos:

$$\overline{DE}^2 = r^2 \sec^2 a + r^2 \sec^2 c - 2r \sec a \times r \sec c \times \cos b \Rightarrow$$

$$\overline{DE}^2 = r^2 \times (\sec^2 a + \sec^2 c - 2 \sec a \times \sec c \times \cos b) \tag{3.3}$$

Igualando 3.2 e 3.3, temos:

$$r^2 \times (\tan^2 a + \tan^2 c - 2 \tan a \times \tan c \times \cos \widehat{B}) = r^2 \times (\sec^2 a + \sec^2 c - 2 \sec a \times \sec c \times \cos b)$$

Dividindo a equação por r^2 e sabendo que $\sec^2 c = 1 + \tan^2 c$ e ainda que $\sec^2 a = 1 + \tan^2 a$, temos finalmente:

$$\tan^2 a + \tan^2 c - 2 \tan a \times \tan c \times \cos \widehat{B} = 1 + \tan^2 a + 1 + \tan^2 c - 2 \sec a \times \sec c \times \cos b \Rightarrow$$

$$2 \sec a \times \sec c \times \cos b = 2 + 2 \tan a \times \tan c \times \cos \widehat{B} \Rightarrow$$
$$\cos b = \frac{1 + \tan a \times \tan c \times \cos \widehat{B}}{\sec a \times \sec c} \Rightarrow$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \widehat{B}$$

Os demais casos são análogos, basta considerar as retas tangentes nos pontos A e C. Feito isso, temos a lei dos cossenos para um triângulo esférico:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \widehat{B}$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C}$$

□

Observação 3.3.1. *É importante frisar que quando se escreve, por exemplo,* $\cos(a)$*, esta expressão refere-se ao cosseno do ângulo correspondente ao arco cuja medida seja a.*

Observação 3.3.2. *Na demonstração do Teorema 3.3.1, consideramos um caso geral em que os lados do triângulo são menores do que um quadrante (um quarto do grande círculo que o contém), o que possibilitou o encontro das tangentes em B com a semirreta que parte do centro e passa pelos outros dois vértices. Mas este caso não abrange todos, já que um triângulo esférico pode ter, considerando o vértice B: (1) apenas um dos lados que contém B maior do que um quadrante; (2) os dois lados que contêm B maiores do que um quadrante; (3) um dos lados que contêm B igual a um quadrante; (4) todos os lados que contêm o ângulo B são iguais a um quadrante. Mas deixamos a cargo do leitor que, caso queira, pode conferir esta análise em Todhunter (1863).*

As relações em 3.1 são consideradas as equações fundamentais da trigonometria esférica, utilizadas para deduzir outras relações trigonométricas. Usando este resultado, podemos analisar o que acontece se o triângulo esférico em questão for retângulo. Assim, supondo um **triângulo** ABC **retângulo em** A, de lados a, b e c, temos o seguinte:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A} \Rightarrow$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\cos a = \cos b \cos c + 0 \Rightarrow$$

$$\cos a = \cos b \cos c$$

A lei dos cossenos permite, por exemplo, calcular a medida de um lado de um triângulo esférico tendo a medida do ângulo oposto a este e as medidas dos outros dois lados.

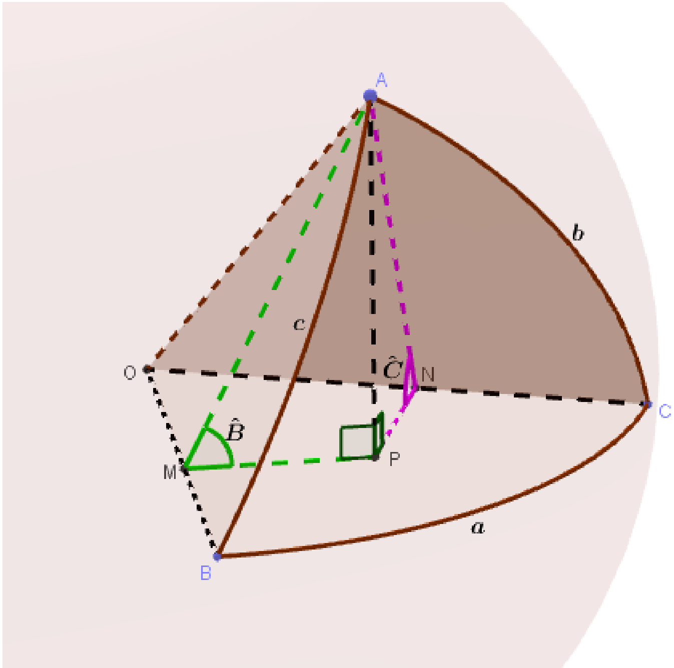
Teorema 3.3.2 (Lei dos senos para triângulos esféricos)**.** *Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c, e ângulos* $\widehat{A}$*,* $\widehat{B}$ *e* $\widehat{C}$*. Então*

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$$

Obs.: Novamente, vale destacar que quando se escreve, por exemplo, $\sin(a)$*, isto refere-se ao seno do ângulo correspondente ao arco cuja medida seja a.*

Demonstração. Observe a figura 3.26.

Figura 3.26: Lei dos senos.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

Considere os pontos, P, M e N, tais que P seja a projeção ortogonal de A sobre o plano BOC, e M e N sejam as projeções ortogonais de P sobre os lados $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, respectivamente. Estes pontos definem os triângulos APM e APN, ambos retângulos em P. Como $\overline{PM} \perp \overline{OB}$ e $\overline{PN} \perp \overline{OC}$, segue que APM e APN são perpendiculares a $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ respectivamente, de onde conclui-se que, como $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ pertencem à APM e APN, segue que $\overline{AM} \perp \overline{OB}$ e $\overline{AN} \perp \overline{OC}$, o que implica que o ângulo esférico $A\widehat{B}C = A\widehat{M}P$ e da mesma forma, $A\widehat{C}B = A\widehat{N}P$.

Portanto, no triângulo retângulo APM, temos:

$$\sin A\widehat{M}P = \sin\widehat{B} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} \Rightarrow$$
$$\overline{AP} = \overline{AM}\sin\widehat{B}$$

e de forma análoga, no triângulo retângulo APN, temos:

$$\sin A\widehat{N}P = \sin\widehat{C} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} \Rightarrow$$
$$\overline{AP} = \overline{AN}\sin\widehat{C}$$

E juntando os dois resultados,

$$\overline{AM}\sin\widehat{B} = \overline{AN}\sin\widehat{C} \tag{3.4}$$

Além disso, nos triângulos retângulos AMO e ANO, temos

$$\sin A\widehat{O}M = \sin\widehat{AB} = \sin c = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} \Rightarrow$$

$$\overline{AM} = \sin c\overline{AO}$$

e,

$$\sin A\widehat{O}N = \sin\widehat{AC} = \sin b = \frac{\overline{AN}}{\overline{AO}}$$

$$\overline{AN} = \sin b\overline{AO}$$

Agora, substituindo estes resultados em 3.4, segue que:

$$\sin c\overline{AO}\sin\widehat{B} = \sin b\overline{AO}\sin\widehat{C} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin\widehat{C}}{\sin c}$$

Por analogia, poderíamos escolher o vértice B ou o vértice C para para fazer a projeção, como foi feito com o vértice A da figura acima e assim teríamos:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin\widehat{C}}{\sin c}$$

E finalmente, basta juntar as igualdades para obter a relação:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin\widehat{C}}{\sin c}$$

$\square$

E estas são as relações básicas a respeito da trigonometria esférica.

A abordagem aqui apresentada seguiu um tratamento menos formal tendo em vista que este trabalho propõe a difusão da Geometria Esférica na formação de professores de Matemática e não de matemáticos que atuam na pesquisa em matemática pura. Portanto, finalizamos este capítulo sugerindo ao leitor que tem interesse em aprofundar nos estudos de Geometria não Euclidiana sobre um tratamento mais formal, que leia o livro “Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica”, de Doria (2019). Nele o autor propõe uma abordagem analítica no estudo das Geometrias Euclidiana, Esférica e Hiperbólica através de modelos de espaços munidos com uma métrica riemanniana. Assim, ele introduz cada uma das geometrias através de modelos, estuda as suas propriedades geométricas e as relações métricas.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PERSPECTIVA METODOLÓGICA

Como foi percebido no decorrer deste trabalho, o surgimento da Geometria Esférica foi consequência da busca incessante de matemáticos por demonstrar um dos postulados de Euclides. Eles se viram diante de um problema e a sua solução permitiu a criação e a formalização de um tipo de conhecimento que, a princípio, não faziam ideia da sua existência. Portanto, o que se observa na história da Matemática e é claro, na história de outras ciências, é que conhecimentos foram construídos e formalizados graças a alguém que buscou solução para resolver algum tipo de problema, como reforça Allevato (2005, p. 38):

> Quantos não são os casos, na História da Matemática, em que constatamos a construção de conhecimento a partir da busca pela solução de um problema específico? Muitos resultados matemáticos não teriam sido obtidos não fosse a persistência e criatividade de pessoas motivadas por uma dúvida, por um problema e pela ânsia de resolvê-lo.

Contudo, o que se percebe no ensino de Matemática é que os diversos conhecimentos são passados para os estudantes sem que eles percebam como se deu essa construção, sendo que geralmente o problema é empregado pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Então, não seria mais natural, atentando para a história das ciências, que inicialmente os alunos se confrontassem com o problema para então se ver na necessidade de buscar meios ou ferramentas para sua solução? Assim, na busca por essas soluções, seria possível que ele descobrisse novos conceitos, novas propriedades e dessa forma, estaria fazendo Matemática.

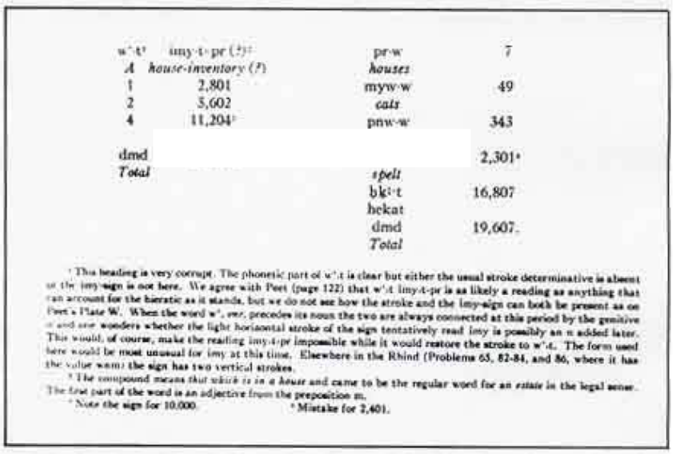
Pensando nisso, esta pesquisa apresenta a construção de uma sequência didática que utiliza como recurso metodológico a Resolução de Problemas de forma a dar protagonismo aos alunos ao permitir que eles, baseado no que já sabem sobre Geometria Euclidiana e com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, investiguem e explorem as relações entre os objetos geométricos com o objetivo de criar novas relações e propriedades acerca do novo conteúdo, a Geometria Esférica. É uma abordagem que foge do padrão convencional, ou seja, os alunos se confrontarão com o problema e na busca por possíveis soluções, irão se deparar com um novo conteúdo.

E para respaldar esta abordagem, apresenta-se neste capítulo os tipos de problemas, o processo histórico que fez emergir a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino de Matemática, no qual o problema é considerado como um ponto de partida, como um meio pelo qual se descobre novos conhecimentos. Neste estudo, se destacam autores como Onuchic (2011, 2013 e 2019), Allevato (2005), Allevato e Onuchic (2009, 2011), Shoenfeld (1996) e Stanic (1989), que pesquisam e defendem esta abordagem nas salas de aula, sendo as duas primeiras pesquisadoras brasileiras. Além disso, como parte integrante do percurso histórico, se discute as diferentes concepções adotadas sobre Resolução de Problemas em um período em que orientou-se que esta deveria ser o foco do ensino escolar, porém, foi concebida e trabalhada de diferentes formas neste processo.

4.1 Tipos de problemas

Resolver problemas é uma atividade natural e instintiva do ser humano que o acompanha diariamente e o auxilia em tomada de decisões que pode, ou não, mudar o curso da sua rotina. E a ideia de os problemas matemáticos se apresentarem no currículo, de acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), remonta ao tempo dos antigos egípcios, chineses e gregos, como por exemplo no famoso papiro de Rhind/Ahmes, cerca de 1650 a. c. que contém uma série de problemas matemáticos.

Figura 4.1: Tradução de um problema de da progressão geométrica do Papiro de Ahmes.



w'·t[1]	imy·t·pr (?)[2]	pr·w	7
A	*house-inventory (?)*	*houses*	
1	2,801	myw·w	49
2	5,602	*cats*	
4	11,204[3]	pnw·w	343
dmd			2,301[4]
Total		*spelt*	
		bk3·t	16,807
		hekat	
		dmd	19,607.
		Total	

[1] This heading is very corrupt. The phonetic part of w'·t is clear but either the usual stroke determinative is absent or the imy-sign is not here. We agree with Peet (page 122) that w'·t imy·t-pr is as likely a reading as anything that can account for the hieratic as it stands, but we do not see how the stroke and the imy-sign can both be present as on Peet's Plate W. When the word w', *one*, precedes its noun the two are always connected at this period by the genitive n and one wonders whether the light horizontal stroke of the sign tentatively read imy is possibly an n added later. This would, of course, make the reading imy·t·pr impossible while it would restore the stroke to w'·t. The form used here would be most unusual for imy at this time. Elsewhere in the Rhind (Problems 65, 82-84, and 86, where it has the value wnm) the sign has two vertical strokes.

[2] The compound means *that which is in a house* and came to be the regular word for an *estate* in the legal sense. The first part of the word is an adjective from the preposition m.

[3] Note the sign for 10,000.

[4] Mistake for 2,401.

Fonte: Chase (1979, p. 16), citado por Stanic e Kilpatrick, 1989

O exemplo acima, parte do papiro, (figura 4.1) pede ao leitor que encontre a soma dos 5 termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo e razão são ambos iguais a 7. Além deste, Stanic e Kilpatrick (1989, p. 4) apresentam outros problemas semelhantes, afirmando que neles "é assumida uma visão muito estreita da aprendizagem", tendo em vista que os problemas eram simplesmente apresentados como exemplos para resolver problemas parecidos. Neste sentido, quando se fala em problemas, é possível perceber que há diversas concepções sobre o que vem a ser um problema, mas aquela defendida por Onuchic e Allevato (2011) e Van de Walle (2001), como apresentado a seguir, expressa a ideia defendida neste trabalho.

Onuchic e Allevato (2011)[1] conceituam problema como sendo "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer." Em seguida, elas esclarecem que problema não é um exercício onde o aluno aplica de forma mecânica uma certa fórmula ou algoritmo. Concordando com esta ideia, Van de Walle (2001) citado por Allevato e Onuchic (2009, p. 139) acredita que "um problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta." Em ambas as definições, pode-se perceber que o que pode ser considerado um problema para algumas pessoas, pode não ser um problema para outras, já que vai depender da bagagem de conhecimento que cada indivíduo carrega.

Tendo essa definição de problemas, busca-se agora discorrer sobre a classificação dos problemas matemáticos, que são muitas, mas será discutido a principal delas, que diz respeito ao problema ser *aberto* ou *fechado*. O primeiro se caracteriza por permitir a existência de várias respostas corretas ou vários métodos de resolver um problema em questão. Já o segundo, que são os mais comumente utilizados, são aqueles que permite apenas uma resposta correta, ou seja, não abre possibilidades para diferentes interpretações. Essa divisão é proposta por Shimada (1997) citado por Allevato (2005).

Neste sentido, Allevato (2005) afirma que os problemas abertos devem ser usados quando se tem o objetivo de realizar explorações matemáticas sendo portanto uma abordagem que enriquece mais o ensino mediado pela Resolução de Problemas. Nas considerações finais de sua tese, essa autora aponta algumas limitações em seu trabalho pelo fato de ter utilizado problemas fechados com os alunos, afirmando que essa abordagem restringiu os estudantes no sentido de os limitar a usarem o computador apenas como uma ferramenta, entre as várias disponíveis, perdendo a oportunidade de oferecê-los experiências que os permitissem mais possibilidades de aprendizagem. Em uma de suas falas, ela relata que:

> O fato de os problemas resolvidos com o Winplot apresentarem funções com coeficientes decimais, ou dados por números demasiadamente grandes para serem resolvidos com lápis e papel, não é o bastante para estimular, nos alunos, as atitudes de exploração que poderiam ser estimuladas nestes ambientes. Allevato (2005, p. 144)

Retomando as ideias de Stanic e Kilpatrick (1989), os mesmos relatam que, inicialmente os problemas possuíam uma visão limitada no que diz respeito a aprendizagem, sendo recente a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de Resolução de Problemas merece especial atenção. E para compreender este processo, buscamos algumas referências que serão analisadas na próxima seção.

[1]Lourdes de La Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato fazem parte do GTERP, Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas da UNESP, se destacando como principais estudiosas sobre Resolução de Problemas no Brasil.

4.2 As diferentes concepções sobre resolução de problemas

Ao situar historicamente a Resolução de problemas, Onuchic (2011), referenciando Lambdin e Walcott (2007, p. 3) destaca que o ensino de Matemática vivenciou seis fases, sendo elas: (1) Exercício e prática; (2) Aritmética significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) Resolução de problemas; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade. A seguir, na figura 4.2 produzida pela autora, temos uma tabela com as relações entre estas fases bem como alguns aspectos sobre as características de cada uma delas.

Figura 4.2: Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem.

Fases	Principais Teorias e Teóricos	Foco	Como atingir
Exercício e prática (aprox. 1920 – 1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com cálculo.	• Rotina, memorização de fatos e algoritmos. • Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos.
Aritmética significativa (aprox. 1930 – 1950s)	Teoria da Gestalt (Brownell, Wertheimer, van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da matemática em problemas do mundo real.	• Ênfase nas relações matemáticas. • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. 1960 – 1970s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex: Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina.	• Estudo das estruturas matemáticas. • Currículo em espiral. • Aprendizagem por descoberta.
Volta às bases (aprox. 1970s)	(Retorno ao) coneccionismo.	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.
Resolução de problemas (aprox. 1980s)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	• Retorno à aprendizagem por descoberta. • Aprendizagem através da resolução de problemas.
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL[3])	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	• NSF[4] – desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Lambdin e Walcott (2007, p. 5), citado por Onuchic e Allevato (2011, p. 77)

Embora esta tabela apresenta as experiências ocorridas nas escolas americanas, vale ressaltar que boa parte dessas mudanças influenciaram o resto do mundo, por exemplo, na terceira fase, período em que aconteceu o movimento da Matemática Moderna, citado no capítulo 2, o movimento citado ocorreu também no Brasil e influenciou o nosso sistema de ensino de Matemática.

Considerando o trabalho de Onuchic (2011) e estas mudanças apresentadas no quadro, as ideias de Polya se encaixam na fase da aritmética significativa (fase 2), pela forma com que ele expõe sobre a resolução de problemas, sendo que o mesmo se preocupava muito em descobrir estratégias de como resolver problemas, de procurar caminhos para resolve-los. Isto pode ser percebido em seu livro, a arte de resolver problemas (*How to Solve it*), no qual Polya (1978) apresenta as heurísticas da resolução de problemas elencando quatro passos para resolver diversos tipos de problemas, sendo eles: (1) Compreensão do problema; (2) estabelecimento de um plano; (3) execução do plano e (4) retrospecto.

Na visão de D'Ambrósio (2008), uma interpretação limitada do trabalho de George Polya permitiu que os currículos da época abordassem a resolução de problemas como uma sequência de passos a serem seguidos. A autora fala que a real proposta de Polya, que era a de oportunizar os alunos a se comportarem como matemáticos, ficou perdida. Ainda sobre este fato, Onuchic credita a iniciativa de considerar a resolução de problemas como forma de ensino à George Polya ao considerar o mesmo como sendo o pai dessa perspectiva de ensino.

Analisando a fase 3 do quadro 4.2, observa-se que o advento do Movimento da Matemática Moderna enfatizou o estudo das estruturas matemáticas por meio da teoria de conjuntos e tinha um tratamento puramente abstrato. Porém, o movimento fracassou pela falta de preparo dos professores para desempenhar esta abordagem e falta de apoio dos pais, já que os mesmos a desconheciam. Shoenfeld (1996, p. 3) relata que "As crianças não estavam a aprender as abstracções e as suas habilidades básicas tinham-se perdido na mal sucedida pressa de ensinar a crianças muito jovens, coisas como a nova teoria numérica". Diante do resultado negativo que o movimento provocou, houve a necessidade de se pensar em outras formas de ensino.

De acordo com Schoenfeld (1996), o resultado deste fracasso foi a "volta as bases", fase de exercício e prática da figura 4.2 no qual o ensino era pautado na "instrução focada, em larga escala, via lápis-e-papel e algoritmos básicos." No entanto, novamente presencia-se um fracasso dos estudantes no campo da matemática, bem como a falta de adeptos a este modelo. E o resultado foi que, ainda nas palavras de Schoenfeld (1996):

> não só os estudantes eram incapazes de pensar matematicamente e resolver problemas (o que não era surpresa nenhuma visto que isso não estava incluído no currículo), como ainda os estudantes que fizeram os exercícios e a prática eram, de facto, piores no básico do que aqueles que tinham tido a Matemática moderna. (p. 3)

Portanto, em 1980, nos Estados Unidos, educadores matemáticos preocupados com um ensino de Matemática que envolvesse compreensão e fosse significativa não desistiram de suas ambições, e de acordo com Schoenfeld (1996) ainda na década de 80, o Conselho Nacional de Professores de Matemática [2] (na sigla em inglês NCTM) publica um documento cujo título é: *Uma Agenda de Ação: Recomendações para Matemática Escolar na década de 1980* [3], com a indicação de que a "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar". Inicia-se a fase da resolução de problemas baseada no processo de pensamento matemático e da aprendizagem por descoberta, segundo Onuchic e Allevato(2011) e passou a ser um dos mais importantes temas na área do ensino de Matemática.

Mas como atestam Stanic e Kilpatrick (1989, p. 1), "A agenda assume que há uma relação directa entre a resolução de problemas, nas aulas de Matemática e a resolução de problemas noutras partes da nossa vida. Não há uma clarificação adequada do que é resolução de problemas, porque deveremos fazê-la ou que posição assume no contexto histórico." Percebe-se então uma confusão quanto a concepção de resolução de problemas, como confirma Onuchic (2011, p. 78) na qual relata que:

> Entretanto, não havia coerência e clareza na direção necessária para se atingir bons resultados com o ensino de Matemática apoiado na resolução de problemas; ou seja, não havia concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado.

Neste âmbito, Schoenfeld (1996) salienta que alguns Matemáticos possuíam uma concepção do que viria a ser a Resolução de Problemas de forma muito superficial, considerando o tema como simples técnicas de resolução de problemas. Para ele, "Tais práticas podem ser mais valiosas que o exercício e a prática da tabuada, mas não muito mais. Há muito mais na resolução de problemas do que isso, e muito mais na Matemática do que a resolução de problemas que outras pessoas te dão para resolver." (p. 4). Já outros matemáticos viam e trabalhavam com a resolução de problemas como uma simples aplicação do que se acabara de aprender da Matemática formal, ou seja, apresentava-se o conteúdo e em seguida aplicava os conceitos na resolução de problemas.

Para resumir as diferentes concepções adotadas no trabalho com resolução de problemas e ajudar na reflexão sobre estas diferenças, Schroeder e Lester (1989) citados por Onuchic e Allevato(2011) o faz dividindo em três grupos: Ensinar *sobre* resolução de problemas; ensinar Matemática *para* resolver problemas; ensinar Matemática *através* da resolução de problemas, sendo que os mesmos serão abordados nos itens a seguir.

[2]National Council of Teachers of Mathematics

[3]An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980

4.2.1 Ensinar *sobre* resolução de problemas

Esta concepção corresponde a considerar a resolução de problemas como um novo conteúdo e tem sido associada às opções de ensino feitas após a Matemática Moderna. Polya se destaca nesta concepção com a arte de resolver problemas, de acordo com Allevato (2005). Neste modelo, os problemas são colocados para os estudantes resolverem, e os mesmos o fazem usando estratégias pré estabelecidas, muitas vezes apresentadas como uma "receita" pelos livros didáticos, baseados nas heurísticas descritas por Polya que, como retratou D'Ambrósio (2008) anteriormente, é uma visão limitada de seus trabalhos.

Um dos problemas apontado por Allevato (2005) neste estilo no qual a resolução de problemas era baseada na adoção e domínio de estratégias, é que se percebeu no ensino de Matemática "o fato de que muitos entenderam que esse domínio seria atingido pela repetição." (p. 52). A autora afirma ainda que embora esta concepção acerca de resolução de problemas seja uma resposta ao Movimento da Matemática Moderna, o processo de ensino de resolução de problemas como se fosse um novo conteúdo e de forma repetitiva acabou por enraizar o caráter genérico que foi tanto criticado pelo Movimento da Matemática Moderna. E nesta perspectiva a autora conclui que o ensino de Matemática continuou sem oportunizar o aluno de descobrir a Matemática por si só, já que neste modelo, os problemas possuem sempre o mesmo estilo, bastando aos estudantes apenas memorizar os procedimentos e técnicas, o que não garante a apropriação dos conhecimentos então desejados.

Corroborando com esta análise, Shoenfeld (1992) atesta que as tentativas de ensinar os estudantes a usarem as heurísticas e processos no estilo de Polya, em geral não haviam provado serem bem sucedidas. Apesar disso, assim como reconhece D'Ambrósio, Stanic e Kilpatrick (1989) afirma que houve uma distorção inevitável nas ideias apresentadas por Polya sobre Resolução de Problemas, distorções essas ocasionadas pelos manuais escolares. Segundo Pólya (1966), citado por Stanic e Kilpatrick (1989, p. 124-125):

> Se o ensino da Matemática dá só uma perspectiva unilateral, incompleta, do pensamento de um matemático, se se suprime totalmente aquelas actividades informais de conjecturar e extrair conceitos matemáticos do mundo visível à nossa volta, ela negligencia aquilo que pode ser a parte mais interessante para a generalidade dos alunos, a mais instrutiva para o futuro utilizador da Matemática e mais inspiradora para o futuro matemático.

4.2.2 Ensinar *para* resolução de problemas

Nesta concepção, considera-se a utilidade da Matemática, ou seja, através do conhecimento teórico do conteúdo exibido aos alunos, são propostos problemas que permitem aos mesmos aplicar estes conhecimentos pré adquiridos. Mas um problema observado por Allevato (2005) nesta concepção, é a de que o aluno pode considerar que um problema só pode ser resolvido após a introdução de um novo conceito ou após o treinamento de uma habilidade de cálculo ou algoritmo. Dessa forma, os estudantes podem ser levados a pensar em uma Matemática utilitária, ou seja, um conteúdo matemático só possui importância quando possui aplicação imediata, o que é visto constantemente em salas de aula onde os alunos geralmente enquadram o professor na famosa pergunta: "onde vou usar isso na minha vida?" Isso acarreta, portanto, uma visão superficial sobre resolução de problemas.

Allevato (2005) relata que embora alguns autores expressem a importância em utilizar a resolução de problemas como aplicação do conhecimento matemático, a autora conclui que "a Matemática não pode ser ensinada como um acessório, subordinada a seus campos de aplicação. Os conceitos, as relações entre eles e os princípios que os unificam devem ser compreendidos." (p. 55).

Neste contexto o aluno capta o conteúdo, aceita os processos e resultados, e sua atividade se limita a assimilar o que acabara de aprender aplicando-os e reconstruindo processos, como ainda relata Allevato (2005). Dessa forma, este ponto de vista ignora o poder formador da Matemática no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de analisar, conjecturar, tomar decisões e descobrir relações.

Na tentativa de orientar os professores ao propor aspectos considerados essenciais para o ensino de Matemática, o NCTM iniciou no final dos anos 80 e durante os anos 90 uma série de publicações, os chamados *Standards*, que culminou com o *Princípios e Padrões para Matemática Escolar* [4], conhecido *como Standarts 2000* (padrões 2000).

Essa série de publicações causou uma mudança nas fases de ensino que até então era a fase 5, portanto, o ensino baseado em padrões está em acordo com a fase 6 descrita por Lambdin e Walcott (2007) na figura 4.2, aquela descrita como "Padrões, avaliação, responsabilidades" que teve início por volta de 1990 e é usada até então.

Onuchic (2019) explica que "A publicação do *Standarts 2000* nos Estados Unidos desempenhou um papel importantíssimo na implementação, sistematização e divulgação da RP [5] no currículo escolar americano, com reflexos em currículos do mundo inteiro." E no Brasil não foi diferente, já que segundo Onuchic (2013) os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram apoiados nas ideias dos *Standards 2000*, no qual sugere a resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática, ou pode-se dizer, a ideia de ensinar Matemática *através* da resolução de problemas.

[4]No original: Principles and Standards for School Mathematics

[5]Maneira como Onucchic abrevia Resolução de Problemas

4.2.3 Ensinar *através* da resolução de problemas

De acordo com Allevato (2005), apoiada em Schroeder e Lester, 1989, devido as "confusões" acerca das diferentes concepções de resolução de problemas, os trabalhos apresentados nos anos 80 não demonstraram resultados satisfatórios. A partir disso, emerge a possibilidade de Resolução de problemas como meio de ensinar Matemática, destacada pelos *Standards 2000* que como foi visto, influenciou o ensino de Matemática no Brasil quando passou a ser uma abordagem adotada pelos PCNs. Ao expor as estratégias para a ação, relacionadas ao ensino dos eixos estruturadores abordados, o documento apresenta a Resolução de Problemas como um método de ensino de Matemática ao esclarecer que:

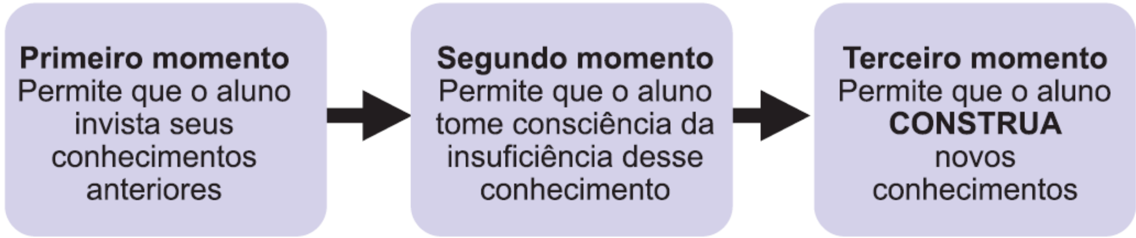
> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM [a] privilegia o tratamento de situações problema, preferencialmente tomadas em contexto real. **A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida** nesta proposta e deve ser entendida como a **postura de investigação** frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (PCN, 1998, p. 129, grifo nosso).
>
> [a]Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio

Percebe-se neste trecho, que o uso de problemas deve ser encarado, não apenas como uma forma de aplicar conhecimentos matemáticos ou com o simples intuito de treinar técnicas de resoluções, mas sim, como um meio de se ensinar Matemática, e além disso, é visto como uma proposta que permite desenvolver nos estudantes uma atitude de investigação, habilidade tão falada e requerida, principalmente nos dias atuais. Nessa nova concepção, Onuchic e Allevato (2011, p. 80) afirmam que "o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo." Neste aspecto, ao utilizar este método de ensino, o estudante percorre o caminho natural da construção do conhecimento científico, como atesta Santos (2002, p. 154):

> Esse modelo coloca o aluno na situação de alguém que precisa resolver um certo problema mas que não possui a ferramenta necessária (ou mais econômica) para fazê-lo; nessa situação, não existe outra solução, para o sujeito, que [não seja] construir essa ferramenta que permite a resolução de seu problema, numa situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos.

Então a ideia é que seja proposto ao estudante um problema que o permita dispor de conhecimentos anteriores para soluciona-lo e coloque em evidência a insuficiência de determinados conceitos, de forma que o aluno se veja na necessidade de criar novos conhecimentos, como ilustra o esquema na figura 4.3.

Figura 4.3: modelo de como acontece a construção do conhecimento nesta perspectiva.



Fonte: Santos (2002, p. 156)

É como que inverter o processo de ensino de Matemática, como sugere Allevato (2005, p. 60) ao escrever que "o ensino de Matemática deve ocorrer em um ambiente caracterizado pela investigação, e que essa deve ser orientada pela resolução de problemas. Segundo esse enfoque, o ponto de partida das atividades matemáticas deixa de ser a definição e passa a ser o problema."

Essa concepção assumida permite encarar a Resolução de Problemas como uma perspectiva metodológica, ou seja, ela encaminha, conduz e orienta o processo de aprendizagem sendo portanto uma concepção que abrange e engloba todas as demais citadas, vista que possui um poder maior, completando a visão superficial e limitada no qual se viu a Resolução de Problemas adotada por alguns matemáticos e criticada por outros.

4.3 Uma perspectiva metodológica

A Resolução de Problemas pode ser vista como uma perspectiva metodológica no momento em que quem a adota, encara como objetivo ensinar Matemática *através* dela. Shoenfeld (1996) apresenta um trabalho no qual usa problemas como ponto de partida para discussões matemáticas com seu grupo de alunos, e garante que esta concepção vai além de ensinar um conteúdo, ele afirma que "Quando as coisas funcionam bem, os cursos servem como um *microcosmos* de (uma selecção de aspectos de) cultura matemática, lugares onde os alunos são membros de uma comunidade matemática que **faz Matemática**" (grifo nosso, p. 9). E este **fazer Matemática**, implica dar sentido ao aprendizado, que por sua vez, deveria ser a principal atividade da escola, em todas as áreas de conhecimento.

Mas trabalhar com resolução de problemas exige mudança de postura do professor, que precisa preparar e/ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir e além disso deve atribuir aos estudantes a maior responsabilidade pela aprendizagem que deseja adquirir. Mas, de acordo com Onuchic e Allevato (2011), exige mudança de postura também dos alunos que precisam compreender e assumir essas responsabilidades, o que nem sempre é fácil de conseguir. Contudo, tendo em vista todos os benefícios que essa perspectiva proporciona, Allevato (2005, p. 61) apresenta um resumo de Van de Walle (2001) e Schroeder e Lester (1989) com boas razões que justificam "investir" nessa metodologia.

> - a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as idéias e sobre o "dar sentido";
> - a resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos Standards (2000): resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação;
> - a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e auto-estima dos estudantes;
> - a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permite tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem; e
> - os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento da capacidade de compreensão que experimentam através de seu próprio raciocínio.

Ciente de todos esses benefícios que a resolução de problemas pode gerar, é necessário uma boa compreensão de como utiliza-la como metodologia, como devem agir, professores e alunos. Uma dessas propostas é de Van de Walle (2001), citado por Allevato (2005), que sugere alguns procedimentos para trabalhar com a Resolução de problemas baseado em três fases, como mostra a figura 4.4.

Figura 4.4: Fases propostas para trabalhar resolução de problemas.

FASE	OBJETIVO	PROCEDIMENTOS
Antes	Preparação	• Preparar mentalmente os estudantes para trabalhar no problema. • Certificar-se de que os estudantes entenderam a tarefa. • Certificar-se de que os estudantes entenderam suas responsabilidades.
Durante	Trabalho dos estudantes	• Deixar os alunos trabalharem sozinhos demonstrando respeito e confiança em suas habilidades. • Ouvir ativa e cuidadosamente. • Observar e avaliar o trabalho dos alunos. • Encorajá-los a testar suas idéias. • Fornecer apenas dicas e sugestões. • Não corrigir erros.
Depois	Discussão com a classe	• Aceitar as sugestões dos alunos sem avaliá-las. • Conduzir as discussões à medida que os estudantes justificam e avaliam seus resultados e métodos.

Fonte: Allevato (2005, p. 63)

Este quadro traz alguns aspectos gerais quanto aos procedimentos e para complementar, apresentando algumas questões mais específicas, Onuchic e Allevato (2011,

p. 84) propõe uma sequência de passos sobre formas de trabalhar com a resolução de rroblemas, fruto de um trabalho realizado com diversos professores participantes de um Programa de Educação Continuada, e o primeiro deles se refere ao que acontece antes da aula.

> - *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

Sobre este primeiro item, Van de Walle (2001), citado por Allevato (2005) recomenda que um problema a ser proposto aos alunos para orientar a aprendizagem da Matemática via resolução de problemas deve considerar os conhecimentos que os alunos já possuem, além de apresentar como ponto mais problemático aquele que está relacionado ao conteúdo que se pretende ensinar e por fim, deve exigir justificativas e explicações para as respostas e métodos apresentados. Dando continuidade aos procedimentos, temos:

> - *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
> - *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
> - *Resolução do problema* - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
> - *Observar e incentivar*- Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo.
> - *Registro das resoluções na lousa* - Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
> - *Plenária* - Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
> - *Busca do consenso* - Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
> - *Formalização do conteúdo*- Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação formal - organizada e estruturada em linguagem matemática - padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Mas as pesquisadoras citadas ressaltam que este não deve ser um roteiro rígido, ou seja, pode sofrer mudanças, dependendo das necessidades e realidades no qual será feito o trabalho. Destacam ainda que para o funcionamento da resolução de problemas como Metodologia, é imprescindível que os alunos não tenham tido contato com o novo conteúdo, sendo que a descoberta deve acontecer durante o processo, pois assim estarão sendo protagonistas e agentes da própria aprendizagem.

> A resolução de problemas representa, da forma como trabalhamos, um contexto bastante propício à construção de conhecimento matemático a partir da observação e percepção de padrões, especialmente se considerada como metodologia de ensino, ou seja, se o problema for proposto como gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos. (p. 90)

4.4 O que os trabalhos anteriores dizem sobre o tema da pesquisa

Para finalizar essa seção, é importante relatar ainda que, ao relacionar as ideias de pesquisas que versam sobre o tema Geometria Esférica com estudantes da Educação Básica, percebeu-se algumas lacunas no que diz respeito ao uso de metodologias de ensino que possibilite aos alunos a participação na construção do conhecimento. Aliado à isso, vamos considerar as reflexões de Allevato (2005) em sua Tese de Doutorado, na qual ela analisou "De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?" Ao apontar possibilidades de novos estudos que poderiam ser realizados em função deste, ela relata o seguinte:

> [...] não conheci nenhum estudo que analisasse as decorrências de adotar a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas com tecnologias informáticas, ou seja, que lançasse mão de problemas geradores para introduzir conteúdos a partir de problemas que seriam resolvidos com a mediação do computador (no caso do que tinha em mente) ou qualquer outra TI [a]. (p. 325)
>
> [a] Tecnologia da Informação

Allevato (2005) também pontua a necessidade de conhecer melhor os desdobramentos ao se colocar os estudantes para resolver problemas abertos com o uso das tecnologias informáticas, já que em seu estudo, ela trabalhou com problemas fechados, o que de certa forma limitou algumas possibilidades de discussões.

Por esse motivo e por todas as discussão delineadas ao longo do capítulo, o cenário no qual se desenvolveu a Resolução de Problemas como uma Metodologia de Ensino; os benefícios que essa perspectiva pode gerar no Ensino de Matemática; o poder de permitir aos estudantes que sejam protagonistas do próprio processo de construção de conhecimentos, esta pesquisa apresenta a aplicação de uma sequência didática tendo a Resolução de Problemas como metodologia no ensino de conceitos básicos de Geometria Esférica com o uso de tecnologias informáticas, especificamente o *software* GeoGebra.

Contudo, frisamos que será feita uma adaptação à proposta sugerida por Onuchic e Allevato (2011), visto que a ideia é utilizar um *software* de geometria dinâmica, com o intuito de facilitar a visualização dos entes geométricos e suas características, além de fazer possíveis investigações com as ferramentas, como vislumbra Allevato (2005) e portanto não será trabalhado com grupos, mas sim individualmente, para que cada aluno possa fazer as verificações propostas pela sequência didática. Além disso, por se tratar de um minicurso virtual, pelo fato das aulas estarem acontecendo de forma remota emergencial devido à pandemia de Coronavírus, fica limitada a questão da interação entre os colegas da turma e a própria interação entre professor e estudante.

Dessa forma, o próximo capítulo expõe uma análise acerca da aplicação dessa sequência didática no qual se discute as contribuições da resolução de problemas usada como forma de aprender um novo conteúdo, que no caso serão conceitos iniciais de Geometria Esférica.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES: ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A análise da aplicação da sequência didática ocorrerá em quatro momentos, nos quais os três primeiros abordará sobre os encontros síncronos que ocorreram na plataforma *Google Meet*, e o quarto será uma discussão dos resultados do questionário que os participantes preencheram por meio do *Google Forms* (*Google Formulários*), logo após o término da aplicação.

Para manter o sigilo sobre os dados dos participantes, os mesmos serão referidos como participante A, participante B, participante C e assim por diante. O termo pesquisadora será abreviado por P na descrição dos diálogos ocorridos nos encontros.

5.1 Primeiro encontro

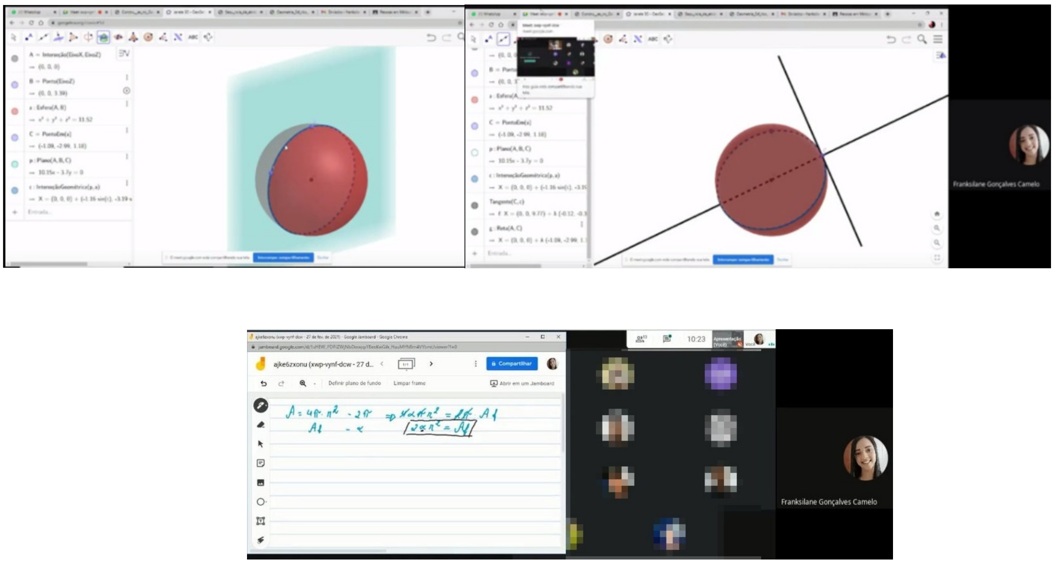
O primeiro encontro se iniciou com a apresentação da pesquisadora e dos respectivos participantes, onde foi conversado sobre como ocorreria o minicurso, quais seriam os recursos metodológicos adotados, no caso a Resolução de Problemas, além da ferramenta de auxílio para os momentos investigativos, que foi o *software* de Geometria dinâmica GeoGebra. Neste momento alguns participantes relataram as expectativas sobre o minicurso no qual demonstraram estar curiosos sobre o que seria esta “nova Geometria”.

A pesquisadora deixou bem claro para os participantes que eles deveriam ficar à vontade para abrir o microfone para falar, discutir, responder ou questionar. Além disso foi ressaltado a importância do trabalho em conjunto, no qual a pesquisadora iria fazer as mediações necessárias nos momentos oportunos. Dessa forma, antes do encontro foi disponibilizado para todos os participantes o material que seria utilizado de forma que os mesmos pudessem usá-los para acompanhar o processo, no qual a pesquisadora solicitou que eles não lessem os problemas antes dos encontros para que as descobertas acontecessem nos momentos adequados, já que inicialmente nenhum dos participantes informaram já saber o que seria a Geometria Esférica e nem algumas de suas definições.

Sendo assim, foi compartilhado a tela do computador da pesquisadora com os participantes onde o GeoGebra foi acessado de forma online para que todos pudessem acompanhar em momento real a manipulação das ferramentas. Foi solicitado que cada um dos participantes abrissem uma janela do *software* em seu computador para eles terem a oportunidade de fazer suas próprias construções, construções essas que seriam fundamentais para a consecução das atividades posteriores. As construções estão disponíveis no Apêndice B.

Este momento de construções no GeoGebra foi importante porque apesar de todos os participantes terem relatado que já tinham tido ao menos um contato inicial com este *software* em algum momento da graduação, esta atividade permitiu que eles revessem alguns conceitos de Geometria Euclidiana já estudados, como as condições de existência de retas, planos e circunferências; tangência entre retas e circunferências; interseção entre plano e esfera, reta e esfera; área da esfera e área do fuso esférico, que inclusive foi demonstrada. Como exemplo temos as figuras a seguir que foram construída pela pesquisadora.

Figura 5.1: Algumas construções no 1° encontro



Fonte: Dados do 1° encontro, 2021

As construções foram finalizadas e deu-se início às atividades que possuíam como objetivo introduzir conceitos iniciais de Geometria Esférica. Como a perspectiva adotada é a resolução de problemas, um problema motivador foi colocado para dar início às reflexões e induzir os participantes a construírem conceitos usando os conhecimentos que já possuem, como propõe Onuchic e Allevato (2011) e Allevato (2005).

***Atividade* 1. Problema do urso**

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direção e caminhou 10 Km sempre em direção a Leste. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

1. Faça um desenho no caderno para representar essa situação;

2. Baseado em seus estudos sobre Geometria Euclidiana, há respostas para este problema?

3. Por que, de acordo com conhecimentos sobre Geometria Euclidiana, este problema não possui solução?

Análise da Atividade 1. **Problema do urso**

Este problema inicial foi para introduzir a discussão sobre a Geometria Esférica. Cada participante possuía seu material com as atividades, como dito anteriormente, mas como a ideia era que o trabalho fosse realizado em conjunto, a pesquisadora leu em voz alta o primeiro problema e foi dado uns poucos minutos para os participantes refletirem sobre o mesmo, como indica Onuchic e Allevato (2011) ao apresentar procedimentos com os passos a serem seguidas ao trabalhar com a perspectiva aqui adotada. Neste momento inicial ela indica que é importante deixar os alunos tentarem resolver o problema sozinhos para demonstrar respeito e confiança em suas habilidades.

Passados uns cinco minutos a pesquisadora, nomeada aqui por ***P***, fez uma pergunta que deu origem o seguinte diálogo:

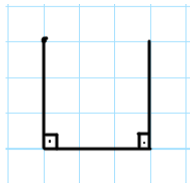
P: *Então, que conclusões vocês chegaram?*
Participante A: *Se ele (o urso) andou em linha reta, é impossível de o urso retornar à toca;*
P: *Alguém mais concorda com ele?*
Participante B: *Eu concordo;*
Participante C: *eu cheguei na mesma conclusão;*
Participante A: *a trajetória dele vai formar um triângulo;*
P: *Como seria um triângulo se ao mudar de direção deveria se formar ângulos retos?*

Silêncio...

Participante D: *Professora, eu cheguei a conclusão de que isso só vale se considerarmos a superfície como sendo esférica.*
Participante F: *Isso, eu também considerei a esfera;*
P: *Uma conclusão interessante, participantes C e D.*
Participante E: *Professora, então já estamos em Geometria não Euclidiana?*
P: *Sim, mas por enquanto, guardem esta reflexão que vamos retornar nela posteriormente; então podemos concluir que este problema não possui solução de acordo com o que vocês já estudaram sobre Geometria. Vamos à ilustração para representar a trajetória do urso no plano:*

Então a pesquisadora fez o desenho da figura 5.2 a seguir, no plano euclidiano, que justifica visualmente o fato de o problema não ter solução de acordo com os preceitos de Geometria Euclidiana, já que com três lados dos quais dois pares são perpendiculares, é impossível formar um triângulo, que seria a única forma do urso retornar ao ponto inicial.

Figura 5.2: Percurso do urso no plano.



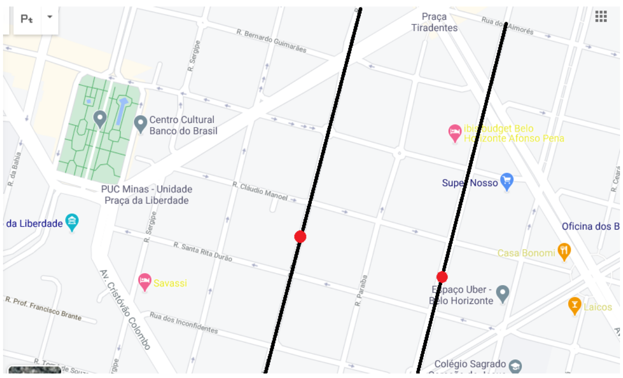
Fonte: Dados do 1° encontro, 2021

Ainda sem uma resposta formalizada para este problema, já que até o momento não havia ferramentas para tratar deste assunto, a pesquisadora relembrou com os participantes o Postulado das paralelas e em seguida apresentou a segunda atividade.

Atividade 2. **Paralelismo- parte 1**

1. Duas pessoas que percorrem as ruas destacadas na figura 5.3, na mesma direção e sentido, em algum momento se encontrarão, considerando o fato de que elas estão caminhando em ruas que nunca se cruzam?

Figura 5.3: Duas pessoas em ruas paralelas.



Fonte: adaptado pela autora do *Google Maps*

Análise da Atividade 2. **Paralelismo- parte 1**

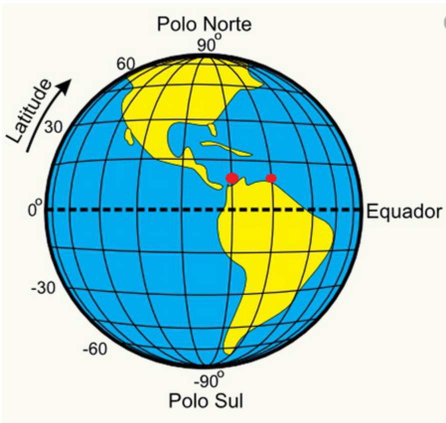
Participante A: *Não, elas não vão se encontrar.*
P: *Por que?*
Faz-se silêncio.
P: *Isso acontece porque para efeitos práticos, nesta situação se considera que o lugar em questão representa uma superfície plana, onde as retas (ruas) são paralelas.*

Esta atividade foi proposta para os participantes compararem com a atividades seguinte, cujo problema é semelhante, mas apresenta um resultado completamente diferente.

Atividade 2. **Paralelismo-parte 2**

1. Por outro lado, o que acontece se dois objetos percorrerem lado a lado em uma superfície esférica, cada um em um meridiano (arco de um grande círculo que passa pelos polos), como na figura 5.4 a seguir, destacado pelos pontos em vermelho?

Figura 5.4: Dois objetos que percorrem lado a lado na superfície esférica.



Fonte: adaptado pela autora

Análise da Atividade 2. **Paralelismo-parte 2**

P: *E então, eles (os objetos) vão se encontrar em algum momento?*
Participante E: *Sim.*
P: *Por que?*

De acordo com as etapas descritas por Onuchic e Allevato (2011), este é o momento do professor deixar de lado o papel de transmissor de conhecimento e se colocar na posição daquele que incentiva, instiga a busca por respostas. Dessa forma o diálogo continua:

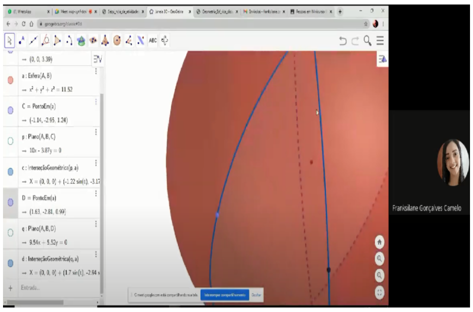
Participante E: *Eles vão se encontrar nos polos.*
P: *Olha que incrível: neste caso os objetos, apesar de não mudarem de sentido, se encontrarão em um ponto. Então, se considerarmos que os meridianos em questão são retas, podemos dizer que nesta situação há retas paralelas?*

Silêncio... a pesquisadora refaz a pergunta e acrescenta:
***P:** Mas vocês podem pensar: "mas professora, isso não é reta, isso é um arco". Então eu respondo: "E se dermos um zoom no arco? Vamos fazer isso pra gente ver o que acontece?"*

Quando a pesquisadora nota que os participantes ficaram confusos, ela percebe que é o momento de intervir, como prevê Allevato (2005), que afirma que diante da Resolução de Problemas como uma estratégia de Ensino, o professor se coloca como mediador, observador, questionador. Ou seja, se os participantes ainda não possuem respostas, é necessário criar situações para conduzi-los ao objetivo final.

Então a pesquisadora apresenta a construção da figura 5.5.

Figura 5.5: Um arco qualquer.

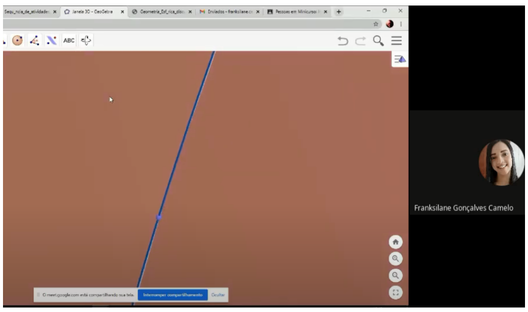


Fonte: Dados do 1° encontro, 2021

Em seguida, se referindo a figura 5.6 ela questiona:

***P:** O que acontece se eu dar um grande zoom assim?*

Figura 5.6: Zoom no arco anterior.



Fonte: Dados do 1° encontro, 2021

P: *O que está acontecendo?*
Participante E: *Está virando uma reta.*
P: *Exatamente!*
Participante E: *Nunca parei para perceber isso!*
P: *Então os arcos são considerados como retas. Portanto, neste problema, podemos verificar que mesmo não mudando de direção, como na atividade anterior, em algum momento os objetos vão se encontrar e assim, ao contrário do que afirma o Postulado V de Euclides, não há nenhuma reta paralela a uma reta dada quando estamos lidando com a superfície esférica. É exatamente neste ponto que vamos introduzir uma Geometria que provavelmente vocês nunca tenham ouvido falar: A Geometria Esférica, que usa como retas os grandes círculos e cujo plano é substituído pela superfície da esfera.*

Nestas investigações, foi importante observar que os participantes demonstraram surpresa ao fazerem esta descoberta. Foi o ponto onde eles perceberam que o que conheciam de Geometria não era suficiente para explicar tais problemas, no qual se configura como cenário ideal para introduzir o que se pretende, como discutido no referencial teórico deste trabalho.

E então, para dar continuidade, a pesquisadora apresentou um vídeo do link: ⟨https://youtu.be/PNqH8pT-czs⟩. Este vídeo apresenta uma breve história do desenvolvimento da Geometria Esférica, onde se fala do matemático Euclides e de sua grande obra *Os Elementos*, além das tentativas frustradas, que perdurou por mais de dois mil anos, de demonstrar o Postulado V, ou o postulado das paralelas. O vídeo foi finalizado e discutido com os participantes, que demonstraram muita surpresa e outros consideraram "incrível". Esta contextualização se fez necessária visto que é importante que os participantes compreendam como se deu este desenvolvimento, e como o simples ato de se ter questionado a veracidade de um Postulado causou tal reviravolta na Geometria Euclidiana, que até então reinava absoluta.

P: *Muito interessante, não é pessoal? Então, a negação do postulado V deu origem à duas outras Geometrias, a Esférica, que é a que vamos estudar, onde não há retas paralelas a uma reta dada e a Geometria Hiperbólica, onde há infinitas retas paralelas passando por um ponto exterior à uma reta dada . E no próximo encontro veremos mais algumas definições e propriedades resultantes da negação deste postulado, além de voltarmos no problema do urso. Espero que vocês estejam gostando do minicurso.*
Participante H: *Amei a aula!*
Participante A: *Estou gostando muito da aula!*
Participante E: *Nós agradecemos, professora, está sendo muito gratificante participar!*

Participante D: *Gostei bastante!!*
Participante B: *Ameii*
Participante I: *Muito bom!*
Participante G: *Gostei bastante, obrigada!*
Participante A: *Cada dia mais, vou aprendendo a amar a matemática e seus mistérios!*

Como pôde ser visto nas considerações acima, os participantes manifestaram bastante entusiasmo pela proposta. O primeiro encontro, além das ricas discussões e descobertas, foi um momento em que participantes e pesquisadora puderam se conhecer para assim, firmarem um "contrato" em que ambas as partes participam ativamente do processo e estabelecem uma relação de confiança.

Como previsto, as construções no GeoGebra cobriu a maior parte do tempo, mas estas desempenharam um papel muito importante nos encontros posteriores.

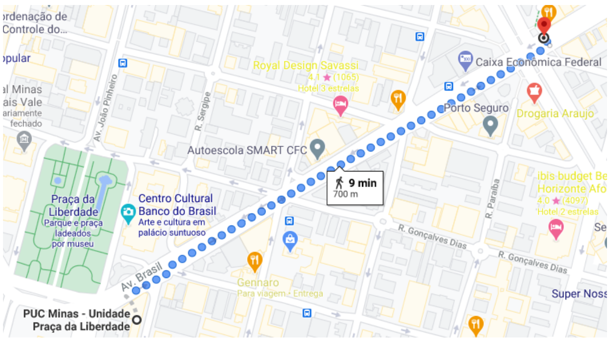
5.2 Segundo encontro

O segundo encontro iniciou-se com um breve apanhado das discussões realizadas no encontro anterior, como o postulado da paralelas e o consequente surgimento da Geometria não Euclidiana, além de como a Geometria Esférica se comporta, no caso das retas que não são mais paralelas. Em seguida, foi colocada a próxima atividade:

Atividade 4. **Menor distância entre dois pontos- parte 1**

1. Considere a seguinte situação: Queremos calcular a distância (na figura 5.7) entre a Puc Minas- Unidade, que fica na Praça da Liberdade, e a Praça Tiradentes , ambas na cidade de Belo Horizonte, com o mapa extraído do *Google Maps*. Como essa distância é calculada?

Figura 5.7: Distância no mapa.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

Análise da Atividade 4. **Menor distância entre dois pontos- parte 1**

Em resposta à esta pergunta, um participante disse que a distância seria dada pela dife-rença entre o ponto final e o ponto inicial da localidade. Outro participante disse que seria pela fórmula de distância entre dois pontos e em seguida a citou. Em ambas as respostas, percebe-se que os conceitos utilizados são aqueles comumente estudados em geometria analítica. Mas como ainda não era a resposta esperada para dar continuidade, a pesquisadora insistiu:

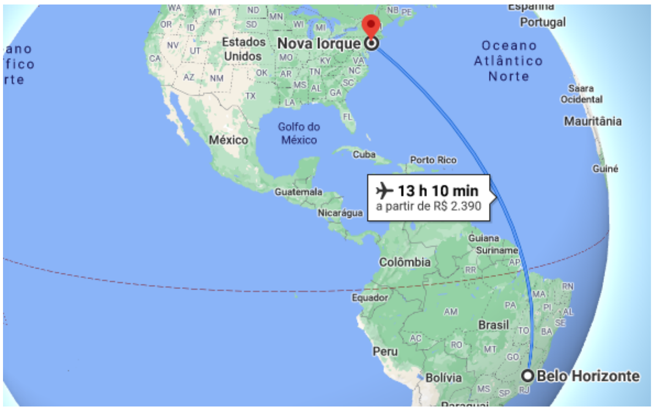
P: *Tudo bem, sim, pode ser dessa forma. Mas por enquanto, esqueçam fórmulas, quero saber o conceito envolvido. No exemplo dado, são vários os caminhos que podem ser percorridos de um ponto à outro. Mas quando se fala em distância, como ela é dada?*
Participante F: *Será o menor caminho existente do início até o ponto de chegada?*
P: *E essa distância é dada pelo quê?*
Participante E: *Por uma reta?*
Participante J: *Por uma diagonal?*
P: *Isso, por uma reta! Poderia ser uma diagonal também, vai depender da situação.*
P: *Ótimo, chegamos no ponto que eu queria. Somos habituados, desde o Ensino Fundamental, a considerar que a menor distância entre dois pontos é sempre um segmento de reta que os une. Nesta situação, essa análise é parcialmente válida, já que temos uma superfície que para efeitos práticos pode ser considerada plana e o espaço em questão é um pequeno recorte, ou um grande zoom, da imensidão do planeta em que vivemos. Mas e se pensarmos agora na Geometria da esfera? E se tivermos um problema como este?*

Novamente, esta atividade foi utilizada para se fazer um confronto entre duas situações semelhantes, no qual este problema é facilmente resolvido com as noções de Geometria Euclidiana. Neste momento oportuno a pesquisadora apresentou a próxima situação, já que os conhecimentos prévios dos participantes seriam insuficientes para alcançarem o objetivo proposto, sendo necessário introduzir novos conceitos, o que remete às ideias de Santos (2002) ao apresentar o esquema da figura 4.3 do capítulo 4.

Atividade 4. **Menor distância entre dois pontos- parte 2**

2 Mas se quisermos calcular a distância entre as cidades de Nova York, nos Estados Unidos e Belo Horizonte no Brasil, como na figura 5.8 por exemplo? Faz sentido pensar de forma análoga à situação anterior, ou seja, considerando um segmento de reta que une as cidades?

Figura 5.8: De Belo Horizonte para Nova York.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

Dessa forma, inicia-se a discussão.

P: *Então, alguém faz ideia?*
Participante J: *Neste caso aí parece que é um arco agora.*
P: *Exatamente, participante J! E por que deve ser um arco? Por que não faz sentido ser uma reta?*

As perguntas são sempre necessárias, visto que segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 84), "O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem." E dessa forma prosseguem as discussões:

Participante J: *Se fosse uma reta, em algum momento ela iria para debaixo da terra. Na minha opinião, não sei se está certo (risos).*
P: *Isso! Logicamente que não, já que neste caso, por representar uma distância muito grande e se comparado ao formato do nosso planeta seria uma atitude um tanto quanto desastrosa, já que uma reta representaria um "furo" na superfície da terra. Portanto, a distância deve ser dada pelo comprimento de um arco.*

Nesta situação, ficou claro para os participantes que neste problema a Geometria Euclidiana por si só não é suficiente para resolver o problema. E isso foi descoberto por eles próprios, já que a pesquisadora se mantinha na função de encorajá-los, ouvir, fornecer dicas, "conduzir as discussões à medida que os estudantes justificam suas ideias", como sugere Allevato (2005).

A pesquisadora acrescenta:

P: *Mas seria um arco qualquer? Vamos fazer uma construção no GeoGebra para nos auxiliar a compreender um pouco mais sobre este problema.*

1. Insira um ponto C na superfície esférica de centro A e raio $\overline{AB}$ e insira também um terceiro ponto, o ponto D;

2. Trace um círculo que passe por estes três pontos;

3. Construa o centro E deste círculo com a opção "Ponto médio ou centro";

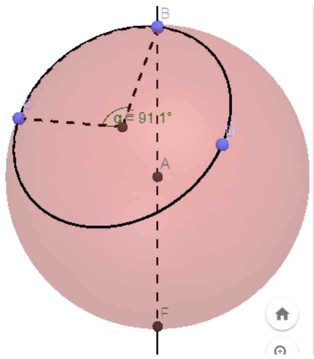
4. Construa os segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{EC}$;

5. Calcule a medida do ângulo $\angle BEC$ com a opção "ângulo definido por três pontos";

6. Construa o ponto F, antípoda de B. Para isso, construa a reta que passa por $\overline{AB}$ e em seguida marque o ponto F na interseção desta reta com a esfera;

7. Agora, com a ferramenta "mover", arraste o ponto D para qualquer direção e observe os valores do ângulo $\angle BEC$. Um exemplo pode ser observado na figura 5.9;

Figura 5.9: Encontrando a menor distância entre dois pontos.

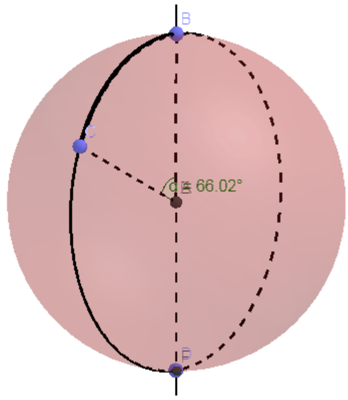


Fonte: elaborado pela autora, 2021

8. O que acontece com a medida deste ângulo quando o ponto D (O centro da circunferência) se aproxima cada vez mais de F?

9. Agora faça o ponto D coincidir com o ponto F de forma que o centro E da circunferência coincida com o centro da esfera. O que se pode observar em relação a medida do ângulo $\angle BEC$? Na figura 5.10 temos um exemplo dessa situação;

Figura 5.10: Exemplo de construção de menor distância entre dois pontos.



Fonte: elaborado pela autora, 2021

10. Lembe-se de que a medida do arco $\widehat{BC}$ também pode ser calculada pela medida do ângulo que o descreve, no caso $\angle BEC$;
11. Assim sendo, o que podemos dizer quanto à distância entre os pontos B e C?

Na construção, por meio da ferramenta mover objeto, os participantes verificaram, já que eles próprios estavam fazendo suas construções, que quando o arco $\widehat{BC}$ tendia a fazer parte do círculo máximo que contêm B e C, então a medida de $\widehat{BC}$ era a menor possível. Assim a pesquisadora concluiu:

P: *Esta menor distância é o que chamamos de Geodésica. Por isso, na Geometria Esférica, os círculos máximos são equivalentes as "retas" da Geometria Euclidiana, já que aqui, a menor distância entre dois pontos é um arco de um círculo máximo que contém estes dois pontos. Por isso, no problema anterior, a distância entre as cidades devem ser dadas pelo comprimento do grande círculo que passa por elas.*

Na descrição dos procedimentos indicados por Onuchic e Allevato (2011) o momento da formalização do conteúdo deve ocorrer, onde se apresenta a definição formal organizada e estruturada em linguagem matemática.

E tendo a ferramenta necessária, neste momento, voltou-se ao problema do urso para resolvê-lo, agora utilizando o conceito de retas (geodésicas) abordado.

P: *Obviamente o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar caminhando em uma superfície plana. Portanto, se pensarmos que ele está andando sobre a superfície terrestre, que é praticamente esférica, ele conseguirá fazer tal percurso, veja o por quê.*

P: *O urso, ao mover-se para Norte ou para Sul, descreve um arco de um meridiano e, quando caminha para Leste, descreve um arco de um paralelo. O urso parte do ponto* *inicial P e caminha para Sul por um meridiano, caminha para o Leste e, quando anda para Norte, regressa por um meridiano diferente. Como dois meridianos diferentes só se intersectam no Polo Norte e no Polo Sul, o ponto de partida terá que ser um dos polos. Como o urso se move de Norte para Sul, o ponto P deve ser o Polo Norte. De fato, partindo do Polo Norte é possível fazer um tal percurso. Neste caso, a cor do urso é branca.*

Com esta atividade, os participantes aprenderam que o problema do urso só possui solução se pensarem no modelo não euclidiano, especificamente o modelo esférico. Para eles, foi uma quebra de paradigmas, já que inicialmente não possuíam uma solução para o problema.

Atividade 5. Triângulo esférico

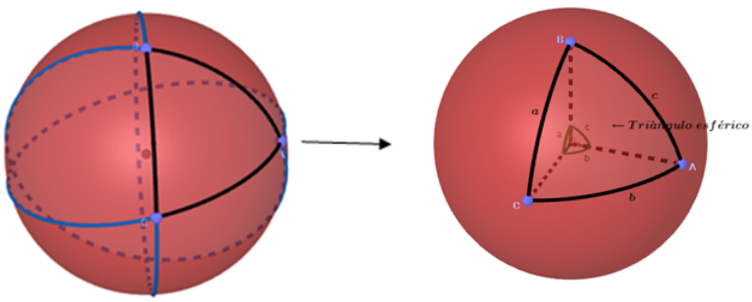
1. Trace dois pontos C e D na superfície de uma esfera de centro A e raio $\overline{AB}$;

2. Com os três pontos, forme um triângulo esférico BCD unindo os vértices dados;

3. Como isso deve ser feito? Lembre-se de como ficou definido a menor distância entre dois pontos no momento de traçar os lados do triângulo;

Este é o que chamamos de triângulo esférico, ou seja, um triângulo cujos lados estão sobre círculos máximos da esfera que o contém, como pode ser verificado na figura 5.11.

Figura 5.11: Triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

É importante ressaltar que o triângulo pode ser construído utilizando apenas a ferramenta “arco dados centro e o dois pontos”, ou ainda utilizando a ferramenta “setor circular dados centro e dois pontos”, como feito na segunda imagem da figura acima.

Obs.: Note que na primeira imagem, quando se constrói o triângulo esférico, é gerado, automaticamente um outro triângulo na esfera cujos vértices são os pontos antípodas em relação aos vértices originais, congruente ao triângulo em destaque.

Análise da Atividade 5. **Triângulo esférico**

Para a atividade 5, os 3 vértices do triângulo foram traçados na esfera. Em seguida a pesquisadora perguntou:

P: *E agora, como vamos traçar um triângulo esférico com estes três pontos?*
Fez-se silêncio...
P: *Sabemos que para construir um triângulo plano, basta unir seus três vértices tomados dois a dois por um segmento de reta. Isso na Geometria Euclidiana. Mas e agora na Geometria Esférica? Como seriam estes lados?*
Participante D: *Agora nós vamos ter que formar o triângulo a partir de três é...como é que chama gente...ah esqueci o nome...*
Participante J: *Arcos!*
Participante D: *Isso, três arcos!*
P: *Isso mesmo, devem ser arcos de grande círculo. Então vamos fazer isso.*

Assim sendo, o triângulo foi construído de duas formas, utilizando a interseção de planos com a esfera, e usando a ferramenta "arco circular" do GeoGebra. E então ficou definido que um triângulo esférico é um triângulo sobre a superfície da esfera, cujos lados são arcos cujo centro é a esfera. E assim, segue o seguinte diálogo:

P: *Com o triângulo pronto, pergunto a vocês: como eu poderia calcular a medida do lado $\widehat{BC}$ deste triângulo por exemplo?*
Participante E: *Eu teria que ter o ângulo, né?*
P: *Isso mesmo, participante E, basta eu calcular a medida do ângulo central definido por este arco. Se eu fizer aqui no GeoGebra com a ferramenta "medida de ângulo", vou encontrar este valor. Depois disso é só comparar com o comprimento do círculo que o contêm.*
P: *Agora vou colocar um probleminha para vocês pensarem: e se, hipoteticamente, eu recortar este triângulo aqui e colar em uma folha de caderno, o que acontece?*
Silêncio...
Participante J: *Não sei direito, mas acho que ele não ficará totalmente contido na folha.*

P: *Isso, Participante J, isso mesmo que eu queria ouvir, o triângulo com certeza ficará todo amassado, ou deformado, assim como se pensarmos o contrário, da folha de papel para uma superfície esférica. Mas vocês imaginam por quê isso acontece?*
Participante R: *Não...*
Participante T: *Ah...sei não...*
P: *Olha, vamos lá...isso vai acontecer por causa dos ângulos do triângulo. Lembrando da Geometria Euclidiana: quanto é a soma dos ângulos internos de um triângulo?*
Vários participantes responderam: 180°*!*
P: *Certo, e na Geometria Esférica, será que isso também acontece? Para continuarmos esta duscussão, vamos à próxima atividade.*

Atividade 6. **Ângulo esférico**

1. No triângulo desenhado anteriormente, como podemos medir um de seus ângulos internos? O que está no vértice B por exemplo?

2. Precisamos de segmentos de retas que partem do vértice em questão;

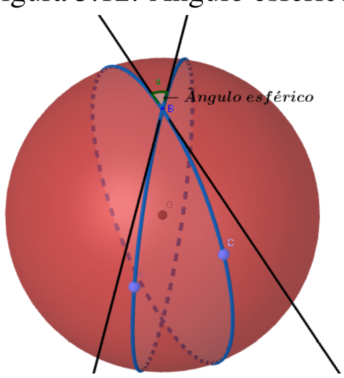
3. Mas não são segmentos quaisquer, os mesmos devem ser tangentes aos lados do triângulo que forma este vértice.

4. Para isso, com a ferramenta "reta tangente a uma circunferência" clicando no ponto B e nos arcos $\widehat{BC}$ e $\widehat{BD}$ construa as retas que formarão o ângulo.

5. Com a opção de medir ângulos, selecione as duas retas concorrentes para verificar a amplitude do ângulo.

   E portanto ângulo esférico é definido como sendo a medida do ângulo plano entre as tangentes dos dois arcos que o formam, como na figura 5.12.

Figura 5.12: Ângulo esférico.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

6. Faça isso com os outros dois vértices do triângulo esférico;

Análise da Atividade 6. **Ângulo esférico**

P: *E então, como posso medir o ângulo definido pelo vértice B deste triângulo aqui desenhado? Alguém faz ideia de como isso pode ser feito?*
Participante R: *Não.*
P: *Pensem aqui comigo. Para ter um ângulo formado por dois lados, preciso de duas retas que partem deste vértice. Mas não podem ser quaisquer retas, devem ser tangentes ao lado em questão. Vamos fazer isso?*

Então, assim como a pesquisadora, os participantes definiram o ângulo $\widehat{B}$ do triângulo em questão.

P: *Deu certinho aí o ângulo de vocês?*
Participante D: *Sim.*
Participante E: *Legal!*

Então, nesta atividade foi definido o que é ângulo esférico e deixado para cada participante construir cada um dos ângulos do triângulo esférico traçado. Feito isso, retornamos a discutir a respeito dos ângulos de um triângulo. Para isso foi proposta a atividade que segue.

Atividade 7. **Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico**

1. Calcule a soma dos ângulos internos do triângulo anterior;

2. Arraste os pontos e faça o cálculo novamente;

3. Faça isso quantas vezes desejar;

4. O que você pode observar em relação à soma dos ângulos de um triângulo da Geometria Esférica?

Análise da Atividade 7. **Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico**

A pesquisadora pediu para os participantes somarem as medidas dos ângulos do triângulo construído por eles.

P: *Então, o que vocês observaram nesta soma?*
Participante J: *No meu deu maior do que* 180°*.*
Participante E: *O meu também deu mais do que* 180°*.*
P: *Se movermos os pontos, aqui no meu, por exemplo, está dando mais de* 210°*. Então, na Geometria Esférica, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a* 180°*, um resultado bem diferente daquele que já conhecemos da Geometria Euclidiana, muito incrível né? Vocês se lembram de quando falamos de um triângulo recortado do papel e colado em uma esfera? Então, é por causa dos ângulos, eles são o motivo da deformação.*
Participante G: *Legal, gostei!*
Participante E: *Fantástico!*

Nesta atividade, assim como em outras, podemos observar a importância do GeoGebra para a consecução das atividades propostas, já que neste ambiente, os participantes puderam facilmente manipular as ferramentas de forma a fazer as verificações solicitadas. Esta experimentação da soma dos ângulos de um triângulo esférico em uma aula apenas de quadro e giz se tornaria uma tarefa muito trabalhosa, se não impossível, no qual os participantes poderiam até perder o interesse pela aprendizagem.

Dessa forma, conseguimos dar atenção ao que tem de mais importante, que é a soma dos ângulos em questão, e não o processo para se realizar tal soma. Além disso, o fato de a pesquisadora não trazer de imediato o resultado, permitindo que os próprios participantes descobrissem, é o que gerou a sensação de descoberta e surpresa.

***Atividade 8.* Qual é o maior valor que podemos obter ao somar as medidas dos ângulos de um triângulo esférico?**

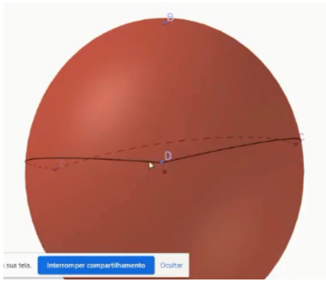
1. Construa um triângulo esférico *ABC* usando necessariamente a ferramenta “arco circular”;

2. Mova os pontos deste triângulo de forma a obter a maior área, ou a maior região possível, mas de maneira que a figura continue sendo um triângulo esférico;

3. O que podemos dizer quanto ao maior valor que podemos obter ao somar as medidas dos ângulos de um triângulo esférico, considerando esta construção?

De acordo com as instruções, foi feita a construção pedida, até que chegou na seguinte imagem da figura 5.13:

Figura 5.13: Valor que tende o ângulo $\widehat{D}$.



Fonte: Dados do segundo encontro, 2021

P: *A medida que obtenho o maior triângulo possível, o que acontece com a medida do ângulo $\widehat{D}$, por exemplo?*
Participante E e F falam juntos: *Tende a* $180°$.
P: *Beleza, e isso ocorre com os outros ângulos também?*
Participante F: *Parece que sim*
Participante J: *Sim.*
P: *Se cada um tende a* $180°$*, qual é o valor que tende a soma?*
Participante D: $360°$*?*
P: *Este valor corresponde a soma de dois apenas né? Mas são três ângulos.*
Participante D:*Acabei de falar bobagem.*
Participante J: *Tende a* $540°$.
P: *Portanto, a maior soma sempre tende a* $540°$ *mas nunca é igual a* $540°$ *e é sempre maior do que* $180°$.

Nesta atividade, assim como nas demais, a pesquisadora atua sempre como aquele que motiva, instiga o participante a chegar em um resultado válido. Assim, a sala de aula (no caso o *Google Meet*) se torna em um ambiente investigativo, no qual o ponto de partida deixa de ser a definição e passa a ser o problema. É exatamente o que propõe Allevato (2005) sobre ensinar *através* da Resolução de Problemas, quando fala da postura investigativa que o estudante deve assumir.

Neste momento foi discutido sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo nas três Geometrias, a Euclidiana, a Esférica e a Hiperbólica, onde na esférica está entre $180°$ e $540°$, na Euclidiana é sempre igual $180°$ e na Hiperbólica é inferior a $180°$.

P: *Agora, será que existe triângulo com dois de seus ângulos sendo retos?*
Participante D: *Acredito que sim, já que a soma é sempre maior do que* $180°$*, então penso ser possível que dois deles sejam retos.*
P: *Vamos à mais uma construção:*

Atividade 9. **Existe triângulo que possui dois dos seus ângulos internos retos?**

1. Em uma esfera de raio $\overline{AB}$, construa um grande círculo que seja perpendicular à $\overline{AB}$. Marque sobre qualquer lugar deste círculo, os ponto C e D;
2. Construa agora um outro grande círculo, mas que passe por B e C. Por construção, qual é a sua posição relativa ao primeiro?
3. Construa um terceiro grande círculo que passe por B e por D. Por construção, ele também é perpendicular ao primeiro;
4. O que podemos dizer sobre os ângulos do triângulo esférico BCD?
5. E se movermos os pontos C e D sobre o primeiro grande círculo construído?
6. Portanto, existe triângulo que possui dois dos seus ângulos internos retos?

Análise da Atividade 9. **Existe triângulo que possui dois dos seus ângulos internos retos?**

O triângulo acima foi desenhado, e em resposta ao item 6, a participante K disse que o mesmo possui dois ângulos retos. Assim a pesquisadora questiona:

P: *Será que podemos ter um triângulo com os três ângulos retos?*
Participante E: *Eu acho que não.*
Participante G: *Professora, quando estávamos construindo o triângulo anterior, eu pensei na mesma coisa: será que pode ter um triângulo de três ângulos retos?*

Assim, o triângulo foi representado e então ficou formalizado que quando um triângulo possui dois ângulos retos, este é chamado de birretângulo, e o que possui os três ângulos retos é o trirretângulo. O encontro foi então finalizado com um breve resumo dos pontos principais abordados no dia. Seguem algumas considerações dos participantes:

Participante G: *Gostando muito dessas novas descobertas, pois é algo diferente do que tínhamos noção, coisas que eu nem imaginava que seria possível. Incrível viu, a matemática é toda linda!*
Participante E: *Muito bom! Adorei!*
Participante J: *Achei muito interessante.*
Participante D: *Muito bom mesmo!!*
Participante I: *Muito bom.*
Participante D: *Antes seria insano pensar num triângulo com 3 ângulos retos kkkkk.*

5.3 Terceiro encontro

O início do terceiro encontro se deu, novamente, com uma reflexão dos principais conceitos discutidos nos dois encontros anteriores, como o triângulo esférico e os valores assumidos pela soma de seus ângulos internos. Em seguida deu-se início a próxima atividade.

Foram construídos os tipos de triângulo quanto às medidas dos seus lados. Esta atividade foi importante para compreensão de que os lados de um triângulo esférico pode ser definido como a medida do ângulo que subentende o arco formado por seus vértices. Esta atividade não estava prevista, mas foi realizada para auxiliar na compreensão do conceito citado. A seguir foi colocada atividade 11.

Atividade 11. **Retângulos**

1. Sabemos que na Geometria Euclidiana, no caso da Geometria plana, duas retas que são paralelas a uma terceira reta são paralelas entre si;

2. Na Geometria Esférica, duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas entre si?

3. Para isso, na esfera de centro A e raio $\overline{AB}$, trace a reta definida por este segmento;

4. Com a opção “Plano perpendicular”, construa o plano que passe pelo centro A da esfera e que seja perpendicular ao seu eixo;

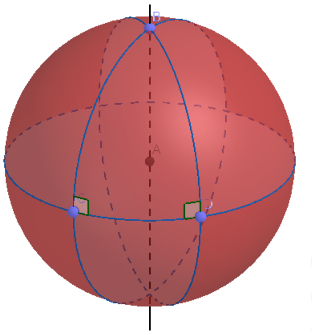
5. Com a opção “Interseção de Duas Superfícies”, clique na esfera e no plano para obter uma circunferência;

6. Com o cursor do mouse sobre o plano e clicando com o botão direito do mesmo, desmarque a opção “Exibir objeto”;

7. Construa dois pontos quaisquer C e D sobre o grande círculo obtido anteriormente e em seguida, construa com a opção “Plano definido por três pontos” os planos definidos por ABC e ABD.

8. Construa as circunferências de interseção entre estes planos e a esfera, e em seguida desmarque a opção “Exibir objeto”.

Figura 5.14: Duas retas perpendiculares a uma terceira.



Fonte: Elaborado pela autora, 2021

Por construção temos duas "retas", $\widehat{BC}$ e $\widehat{BD}$, ambas perpendiculares a "reta", grande círculo, construída inicialmente, como pode ser visto na figura 5.14 acima.

9. Mas o que podemos dizer quanto às duas "retas" definidas por $\widehat{BC}$ e $\widehat{BD}$?

10. Elas podem ser paralelas entre si?

11. Então, o que podemos dizer sobre duas retas perpendiculares a uma terceira reta?

12. E sobre retângulos? Eles existem nesta Geometria? Por que?

Análise da Atividade 11. **Retângulos**

Foram construídas duas retas perpendiculares a uma terceira reta no plano Euclidiano do GeoGebra. A pesquisadora, como pedido no item 2 acima, perguntou a posição relativa às duas primeiras retas e os participantes responderam prontamente que elas são paralelas, como era previsto.

Por outro lado, foram construídas duas retas, também perpendiculares a uma terceira reta, como na figura 5.14, porém neste caso, foi realizado na superfície esférica. Então a pesquisadora perguntou:

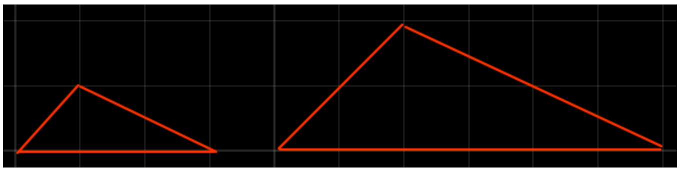
P: *Estas duas retas são perpendiculares à esta terceira reta. Mas elas são paralelas entre si?*
Participante D: *Eu acho que não porque elas se intersectam.*
Participante E: *Não.*
P: *Exatamente, meninos, elas se intersectarão nos polos, então elas não são paralelas, o que vai contra a construção da mesma situação representada no plano Euclidiano anteriormente.*

P: *O que podemos dizer então a respeito de retângulos? Eles existem nesta Geometria? (Esférica)*
Participante E: *Não, porque eu precisaria de retas paralelas. As propriedades do retângulo inclui retas paralelas entre si.*
P: *Exatamente, participante E! É impossível, já que para termos retângulos devemos ter lados opostos paralelos, o que nunca acontecerá aqui na Geometria Esférica. Portanto não existem retângulos, e consequentemente não existem quadrados e ainda não existem trapézios.*

E mais uma vez, os participantes construíram outro conceito da Geometria Esférica que difere completamente da Euclidiana.

Antes da atividade 12, a pesquisadora relembrou com os participantes as características e propriedades de figuras semelhantes. Para isso desenhou os dois triângulos da figura 5.15 seguir e perguntou:

Figura 5.15: Dois triângulos semelhantes.

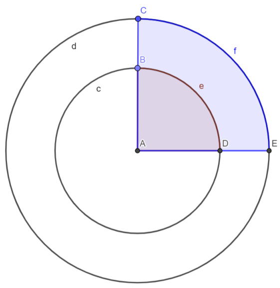


Fonte: Dados do terceiro encontro, 2020

P: *Estes triângulos são semelhantes?*
Participante D: *Sim*
P: *Por que, participante D?*
Participante D:*Porque as medidas do triângulo maior é como se fosse uma ampliação do triângulo menor, os lados tem uma relação.*
P: *Isso mesmo, os lados correspondentes são proporcionais. Neste caso os lados do triângulo maior é o dobro dos lados correspondentes no triângulo menor. E a respeito dos ângulos, qual é a relação entre eles?*
Participante A: *Eles também são proporcionais?*
P: *Proporcionais, participante A?*
Participante E e Participante D: *Eles são iguais.*
P: *Isso mesmo, os ângulos correspondentes possuem a mesma medida.*

Após esta atividade, foi discutido a questão da semelhança entre arcos circulares. Esta atividade foi necessária porque percebeu-se que os participantes demonstraram uma certa dificuldade de relembrar este conceito de semelhança. Foi então desenhado a figura 5.16 a seguir no GeoGebra.

Figura 5.16: Semelhança de arcos.



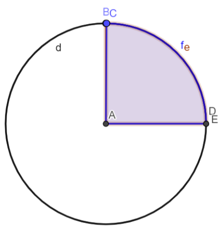
Fonte: Dados do terceiro encontro, 2020

P: *Os arcos e e f são semelhantes?*
Participante A: *Não.*
P: *Por que não, participante A?*
Participante A: *Porque um está em formato de triângulo, o outro já está em quatro partes.*

Percebe-se que o participante A apresenta uma dificuldade em relação ao tema semelhanças ao apresentar esta resposta confusa. Mas antes que ele tivesse terminado, o participante E o interrompeu:

Participante E: *Sim.*
P: *E por que sim, participante E?*
Participante E: *Porque o ângulo do menor é o mesmo ângulo do maior.*
P: *Isso, os ângulo centrais são os mesmos e além disso, como estamos lidando com raios, estes lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são proporcionais aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$. Logo os triângulos ABD e ACE são semelhantes e consequentemente, os arcos e e f também o são. Certo, mas e se os raios forem iguais? Vai haver semelhança?*
P: *Olhem, vou mover o círculo maior e sobrepor ao círculo menor, como na figura 5.17.*

Figura 5.17: Semelhança de arcos-parte 2.



Fonte: Dados do terceiro encontro

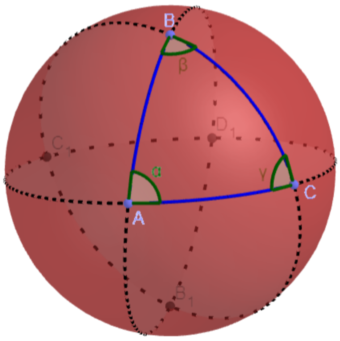
Participante D: *Acho que sim.*
Participante G: *Congruentes*
P: *Serão semelhantes, participante D. Mas de forma especial são congruentes, como disse o Participante G.*

Apenas após retomar estes conceitos é que foi possível prosseguir com a atividade 12, que foi apresentada.

Atividade 12. **Triângulos semelhantes**

1. Seria possível obter um triângulo esférico semelhante ao da figura 5.18?

Figura 5.18: Triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

2. Qual é a definição de triângulos semelhantes na Geometria Euclidiana?

3. Agora, para ajudar a responder a pergunta inicial, recorde-se do caso de semelhança entre arcos de uma circunferência. Como se dá? Qual a condição necessária e suficiente para haver semelhança neste caso?

4. Então o que podemos dizer a respeito da semelhança de triângulos esféricos, já que seus lados são arcos de grande círculos cujos raios serão sempre iguais?

Os itens 2 e 3 da atividade acima foram discutidos e então a pesquisadora introduziu o item 4 na discussão.

P: *Então, pessoal, para haver semelhança entre arcos, preciso ter raios diferentes, mas como os lados (arcos de grandes círculos) do triângulo estão sobre uma mesma esfera, vai acontecer apenas a congruência. Tranquilo isso, participantes? Ou ficou confuso?*

Os participantes indicaram que sim e então deu-se continuidade ao encontro.

Atividade 13. **Área sobre a superfície esférica**

O triângulo das bermudas, como o próprio nome indica é uma área triangular, no qual seus vértices são formados por Fort Lauderdale, cidade da Flórida, Porto Rico e pela Ilha das Bermudas. É uma região caribenha localizada no Oceano Atlântico, como pode ser visto na figura 5.19.

Figura 5.19: Triângulo das Bermudas.

Fonte: disponível em: https://www.cemiteriomaldito.com/terror/misterios-do-triangulo-das-bermudas/. Acesso em 2021

É uma região historicamente misteriosa por ser palco do desaparecimento de aviões, barcos, cargueiros e navios no qual se explica por diversas teorias, inclusive a de que estes desaparecimentos misteriosos seriam por motivos sobrenaturais. Uma das ocorrências mais famosas foi o voo 19 [1], no qual desapareceram cinco aviões em uma operação de treinamento. Foi enviado um outro avião para resgatar os homens perdidos, porém, este último também perdeu o contato. O que se sabe é que todas essas pessoas nunca foram encontradas.

Agora pergunta-se:

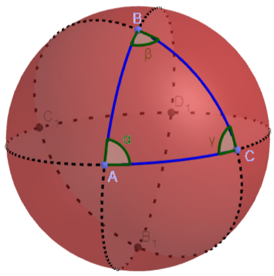
1. Como seria o cálculo da área dessa misteriosa região? Considere o raio da terra de $6.371km$.

   Para resolver este problema, vamos analisar uma figura análoga, porém no GeoGebra para clarear as ideias e tentar estabelecer uma fórmula para o cálculo da área de uma triângulo sobre a superfície de uma esfera.

[1] Mais detalhes, acesse: ⟨https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/reportagem/o-misterioso-caso-do-desaparecimento-do-voo-19.phtml⟩

2. Em uma esfera de centro A, construa um triângulo esférico como na figura 5.20, deixando visível os círculos máximos que formam os lados do triângulo.

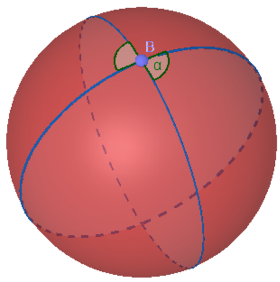
Figura 5.20: Triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020

3. Sabe-se que o cálculo da área da superfície de uma esfera de raio r é dado por $4\pi r^2$ e a área de um fuso esférico **completo**, como na figura 5.21 abaixo, nesta mesma esfera e que tem ângulo α é dada por $4\alpha r^2$.

Figura 5.21: Fuso esférico completo.



Fonte: Elaborado pela autora, 2021

Usando estas informações, qual seria a relação que representa a área de um triângulo esférico (A_{te}) cujos ângulos são α, β e γ?

4. Como pode ser representada a área da esfera em função da área dos fusos esféricos completos determinados pelos três ângulos α, β e γ do triângulo esférico nela representado e a área do próprio triângulo?

5. Lembre-se que os pontos antípodas de cada vértice do triângulo formam juntos um triângulo semelhante ao original.

6. Observe que a área da esfera é dada pela área do fuso completo de ângulo α mais a área do fuso completo de ângulo β mais a área do fuso completo de ângulo γ, subtraído de quatro vezes a área de um triângulo esférico.

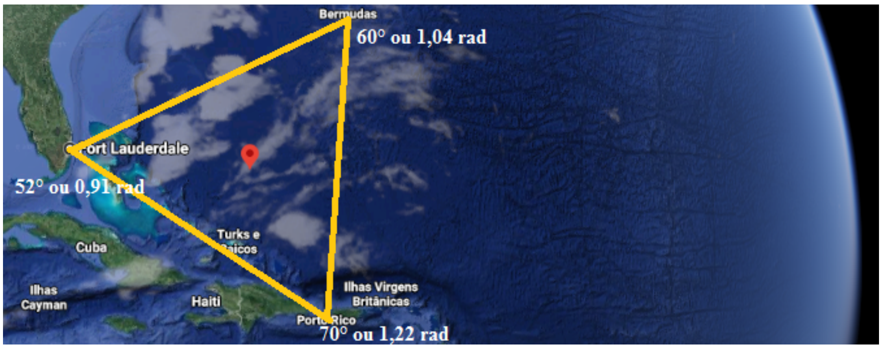
Essa relação indica que ***a área de um triângulo esférico é proporcional ao seu excesso esférico,*** *sendo o excesso esférico a soma dos ângulos subtraído de π.*

Obs.: Por esta relação é possível observar também que, se a área de um triângulo esférico tende a zero, então a soma de seus ângulos internos se aproxima de π rad (180°). Por esta razão, o cálculo de áreas pequenas na superfície da terra, como por exemplo a de um lote, é realizado levando-se em consideração a Geometria Euclidiana, já que essa área comparada com o tamanho da terra é praticamente desprezível.

Agora temos a ferramenta para resolver o problema proposto, mas para isso, precisaremos das medidas dos ângulos internos do triângulo esférico formado. Para calcular estes ângulos, precisaríamos utilizar relações trigonométricas no triângulo esférico, como a lei dos senos e a lei dos cossenos. Mas como elas ainda não foram deduzidas, estes ângulos serão dados, já que os mesmos podem ser deduzidos utilizando as coordenadas geográficas das cidades citadas, o que pode ser facilmente consultado pelo *Google Maps*.

A figura[2] a seguir 5.22 fornece os ângulos por valores aproximados.

Figura 5.22: Vértices do Triângulo das Bermudas.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

Análise da Atividade 13. **Área sobre a superfície esférica**

Posto o item 4 da atividade acima, os participantes tiveram dificuldade em enxergar a relação entre a área da esfera, os fusos completos relacionados a cada ângulo do triângulo esférico e o próprio triângulo esférico. Neste momento, houve necessidade de refazer a construção do triângulo para os participantes compreenderem a relação.

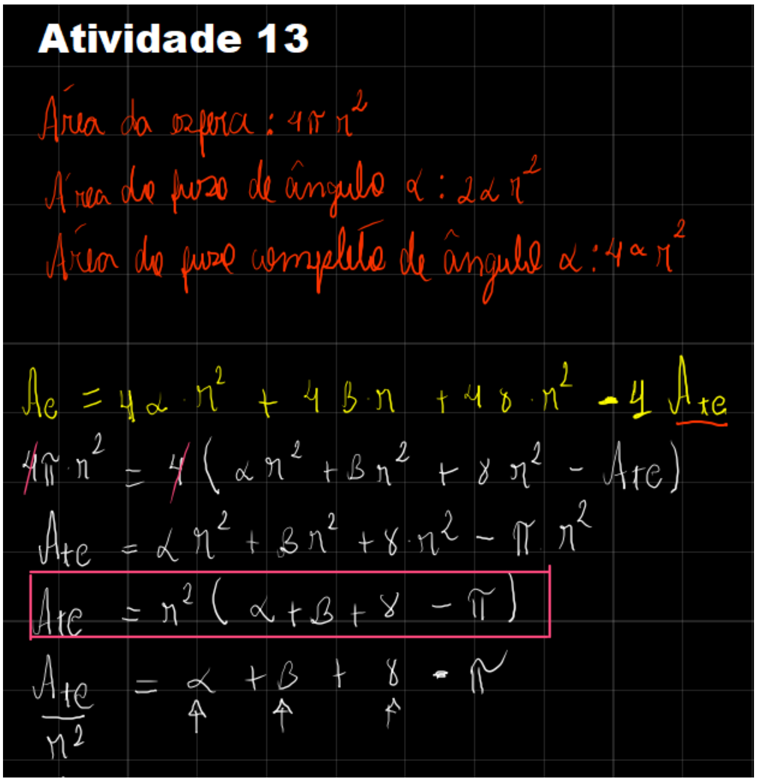
P: *Percebam que cada um dos vértices do triângulo esférico ABC irá definir pra nós um fuso esférico completo. Além disso, cada vez que conto um fuso esférico completo*

[2]O triângulo desenhado, feito para se ter uma noção da área da região, não condiz com o real formato de um triângulo esférico, cujos lados são arcos, e não retas euclidianas.

relacionado a cada ângulo, o triângulo esférico é contado duas vezes. Por isso, eu preciso retirar 4 *triângulos, porque ele foi contado quatro vezes a mais.*
P: *Deu pra entender esta relação, pessoal? Ou ainda está confuso para vocês?*
Participante E: *Deu pra entender sim, professora. Depois que você desenhou ficou mais claro. Sem o desenho eu estava "perdidazinha".*
P: *Mas fiquem tranquilos, é normal essa dificuldade, esta visualização é complicada mesmo.*

E assim a pesquisadora apresentou a relação requerida por meio dos cálculos da seguinte figura 5.23.

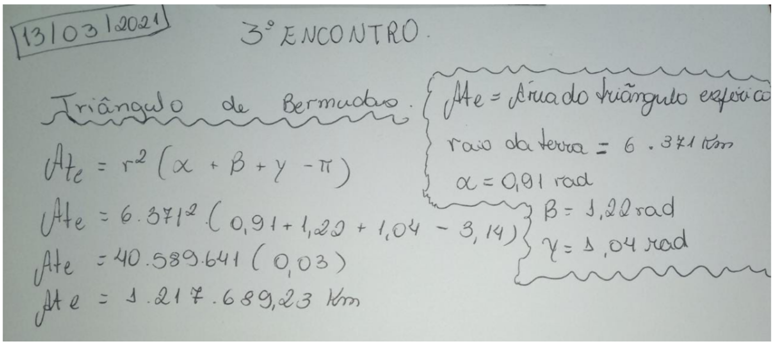
Figura 5.23: Dedução da fórmula da área de um triângulo esférico.



Fonte: Dados do terceiro encontro, 2021

Feito isso, os participantes foram convidados a calcular a área do triângulo das Bermudas, como pedido no item 1. Foi dado 5 minutos para cada um dos participantes fazer em seu caderno, já que foram dados a medida dos ângulos do triângulo e a medida do raio da terra. O participante E apresentou sua resolução que consta na figura a seguir.

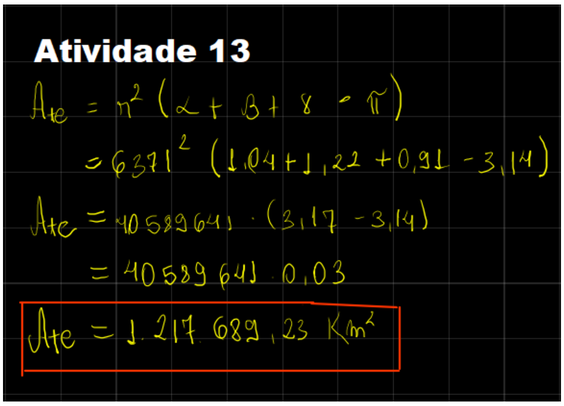
Figura 5.24: Área do triângulo das Bermudas pelo participante E.



Fonte: Dados cedidos pelo participante E, 2021

A pesquisadora faz também o cálculo para todos os participantes verem e corrigir possíveis erros. Foi apresentada a seguinte resolução.

Figura 5.25: Área do triângulo das Bermudas pela pesquisadora.



Fonte: Dados do terceiro encontro, 2021

Atividade 14. **Área de um triângulo trirretângulo**

Um triângulo trirretângulo é um triângulo esférico cujas medidas de cada um de seus ângulos internos é 90°.

1. Qual é a relação entre a área de um triângulo trirretângulo e a área da esfera?

2. Sendo assim, qual é a área de um triângulo trirretângulo?

3. Usando a relação encontrada na atividade anterior, verifique sua resposta;

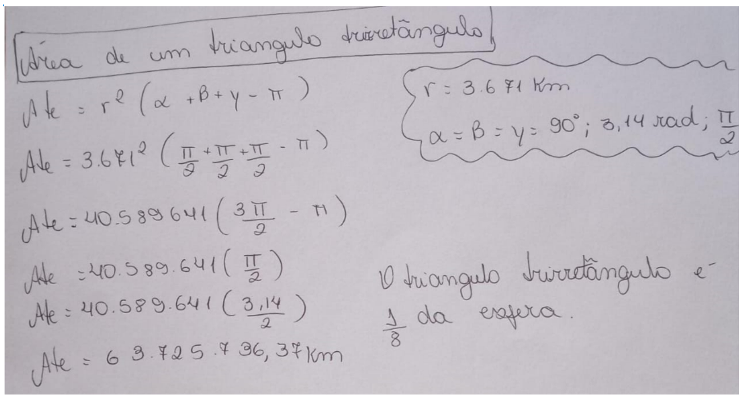
Análise da Atividade 14. **Área de um triângulo trirretângulo**

Foi mostrado um triângulo trirretângulo para os participantes. Para o item 1 da atividade acima o participante D respondeu:

Participante D: *Seria a área da esfera dividida por 8?*
P: *Isso mesmo, participante D. E se a área do triângulo é $\frac{1}{8}$ da área da esfera e sabemos que esta área é $4\pi r^2$, então encontramos o valor de $\frac{\pi}{2}r^2$. E fazendo o cálculo com a fórmula encontrada anteriormente deveremos ter, logicamente, o mesmo resultado.*

O participante E, pensando além do que foi pedido, realizou o cálculo utilizando a medida do raio da terra. Fazendo isso, ele encontrou a área aproximada da superfície de um octante da terra, como pode ser vista na imagem 5.26.

Figura 5.26: Área de um triângulo trirretângulo calculada pelo participante E.



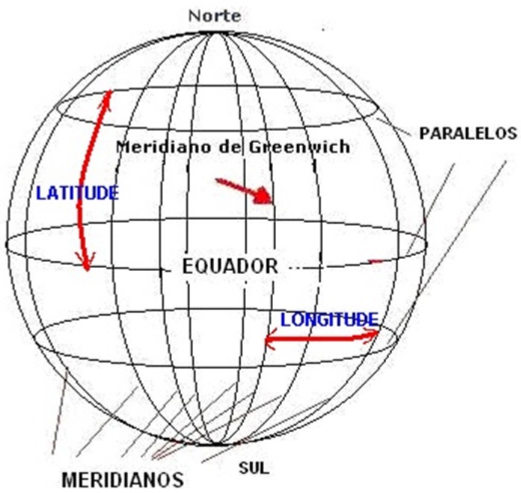
Fonte: Dados cedidos pelo participante E, 2021

Atividade 15. **Cálculo de distâncias sobre a terra**

Já vimos que a menor distância entre dois pontos na superfície de uma esfera é o menor arco de um grande círculo que une os dois pontos. Com esta informação, vamos resolver alguns problemas, e para isso, vamos usar o mais preciso e importante método de localização geográfica.

Os paralelos e meridianos, combinados entre si juntamente com as latitudes e longitudes, dão origem ao sistema de coordenadas geográficas, que é utilizado para definir qualquer ponto da superfície terrestre. Observe o esquema da figura 5.27 a seguir para retomar alguns conceitos.

Figura 5.27: Esquema para coordenadas geográficas.

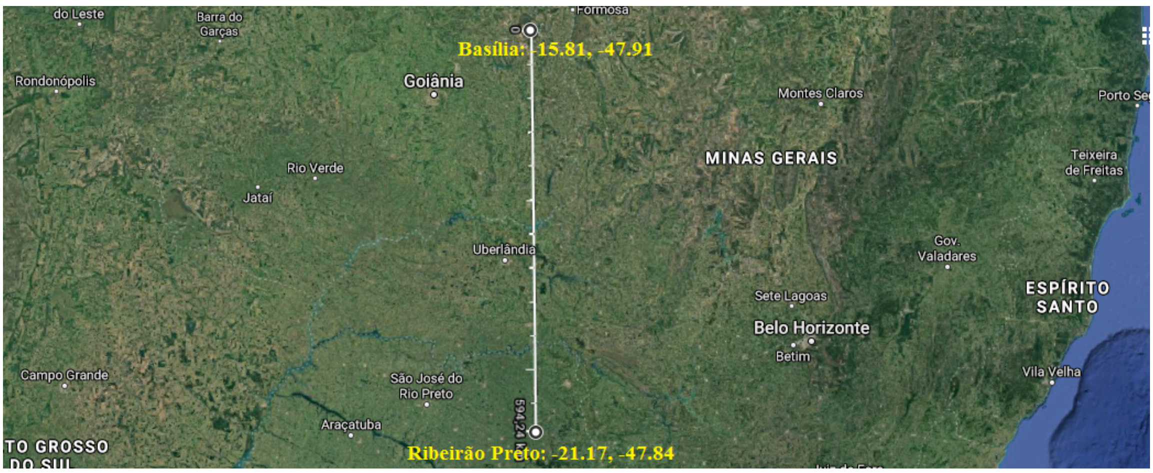


Fonte: disponível em:
https://geografalando.blogspot.com/2011/04/localizacao-linhas-imaginarias.html

1. Vamos calcular a distância entre as cidades de Ribeirão Preto, em São Paulo e Brasília, a capital federal;

2. Uma rápida busca no *Google Maps*, como na figura 5.28 nos dá suas coordenadas geográficas que são: Brasília $(-15.81, -47.84)$, Ribeirão Preto $(-21.17, -47.91)$, com a primeira coordenada como sendo a latitude e a segunda sendo a longitude;

Figura 5.28: Coordenadas de Brasília e Ribeirão Preto.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

3. Como podemos perceber, ambas as cidades pertencem ao mesmo meridiano, devidos às suas longitudes serem praticamente as mesmas. Portanto, ambas pertencem

ao mesmo grande círculo da terra;

4. Dessa forma, como podemos calcular a distância entre elas em graus?

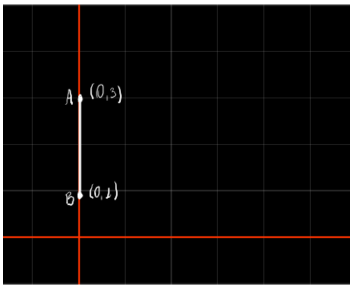
5. Considerando o valor aproximado do raio da terra de 6371km, qual é essa medida em km?

Análise da Atividade 15. **Cálculo de distâncias sobre a terra**

Com o problema posto a pesquisadora explicou como funciona o sistema de coordenadas geográficas. A pergunta do item 4 foi feita, mas neste momento nenhum participante respondeu. Então foi necessário intervir com a colocação de um problema semelhante, mas no plano euclidiano.

P: *Suponhamos que queremos calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, como na figura 5.29.*

Figura 5.29: Distância no plano cartesiano.

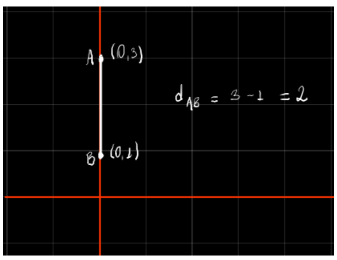


Fonte: Dados do terceiro encontro, 2021

P: *Como eu calculo esta distância entre os pontos A e B?*
Participante D *Subtrai as coordenadas de y.*
P: *Isso, no caso, fazendo este cálculo temos:*

A pesquisadora fez o cálculo da figura 5.30 a seguir.

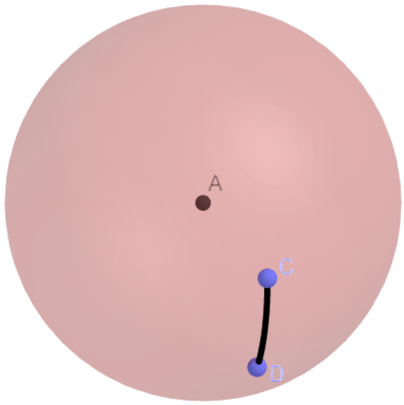
Figura 5.30: Distância no plano cartesiano-parte 2.



Fonte: Dados do terceiro encontro, 2021

A pesquisadora retoma o problema na superfície esférica e representa as cidades na esfera da figura 5.32 a seguir.

Figura 5.31: Distância sobre a terra- parte 2.

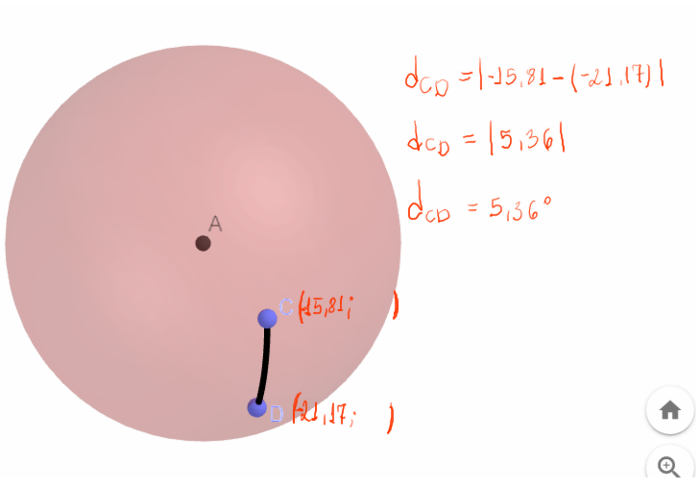


Fonte: Dados do terceiro encontro, 2021

P: *Aqui na esfera, temos as coordenadas da latitude e da longitude. Como os valores da longitude são os mesmos, os pontos estão no mesmo arco de grande círculo, no mesmo meridiano. Como calculamos a distância neste caso?*
Participante D: *Nós vamos subtrair também.*

A pesquisadora então completa os cálculos, como na figura 5.30, salientando a importância do módulo, por se tratar de distância.

Figura 5.32: Distância sobre a terra- parte 2.

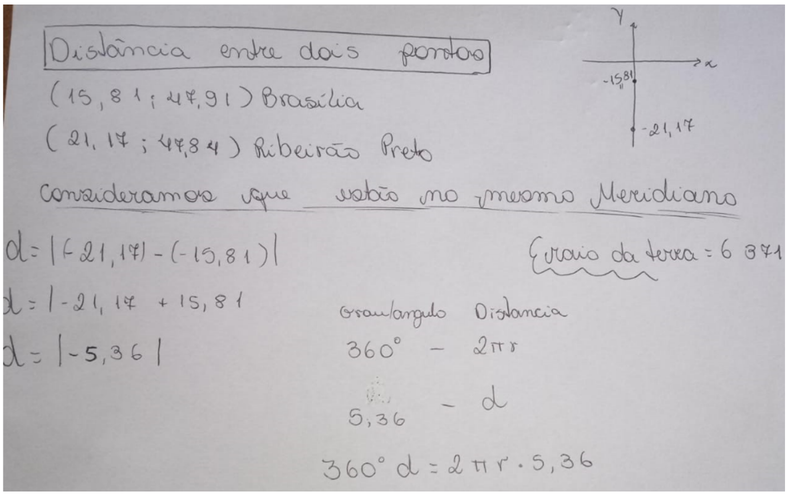


Fonte: Dados do terceiro encontro, 2021

P: *Encontramos a medida em graus, mas como sabemos a medida do raio da terra, temos a medida aproximada de π e sabemos a fórmula do cálculo do comprimento de* *uma circunferência que é $2\pi r$, basta usarmos uma regra de três para encontrar o resultado.*

Temos parte do cálculo da participante E, da distância entre as cidades Brasília e Ribeirão Preto na figura 5.33 a seguir.

Figura 5.33: Cálculo da distância entre as duas cidades pela participante E.



Fonte: Dados da participante E, no terceiro encontro, 2021

A pesquisadora também fez o cálculo para todos os participantes acompanharem e tirarem dúvidas. Assim, ficou formalizado sobre como deve ser realizado o cálculo da distância entre dois pontos que estão no mesmo arco de grande círculo.

A atividade 16[3], sobre distância entre dois pontos quaisquer, que seria a última planejada para o terceiro encontro não foi aplicada porque o tempo estipulado inicialmente foi insuficiente. Mas ficou para os participantes lerem o material e resolverem o problema individualmente, como parte das atividades assíncronas.

Para finalizar, como segunda parte do minicurso, foi pedido que os participantes assistissem a demonstração de algumas fórmulas da Geometria Esférica que a pesquisadora deixou gravado e disponibilizado no YouTube, no qual os links se encontram no apêndice E. Foi pedido ainda para os participantes responderem um questionário para se ter um retorno sobre os momentos síncronos, onde a sequência didática foi aplicada. A análise segue na próxima seção.

[3]Atividade disponível no Apêndice C

5.4 Análise do questionário pós minicurso

O questionário foi disponibilizado para os participantes no *Google Sala de Aula* via link do *Google Formulários* no qual, dos 11 participantes do minicurso, 10 responderam já que um dos participantes relatou dificuldade de acesso por problemas técnicos. É importante ressaltar que o questionário não coletou dados de identificação dos participantes, portanto eles ficaram livres para responderem de acordo com sua opinião sobre o que funcionou e o que não funcionou, sem se deixar influenciar por pressões que poderiam de alguma forma expor os pensamentos deles. Segue a análise dos resultados, que apresenta na íntegra algumas falas dos participantes quando se trata de itens abertos.

1. Antes desse minicurso você já tinha ouvido falar sobre Geometria Esférica, uma Geometria que nega o postulado das paralelas?

Nesta pergunta, verificou-se que a maioria dos graduandos nunca tinham sequer ouvido falar sobre Geometria Esférica. Por outro lado, 40% disseram que tinham pelo menos ouvido falar, o que de certa forma foi uma surpresa, uma vez que no primeiro encontro nenhum participante demonstrou já conhecer esta Geometria não Euclidiana.

2. Você considera que o uso da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica (que usa problemas como ponto de partida para introduzir um novo conceito que é construído valendo-se de conhecimentos já estudados) contribuiu com o processo de apropriação de conceitos sobre Geometria Esférica?

O objetivo deste item era verificar se a Resolução de Problemas contribuiu com o processo ou se o método tradicional seria melhor.

Mas, através das respostas foi possível observar que, quase que por unanimidade (90%), os participantes afirmaram que a Resolução de Problemas, usada como perspectiva metodológica contribuiu com o processo de aquisição de conceitos. Este fato foi confirmado nas últimas perguntas abertas, no qual eles relatam que, apesar do minicurso ter sido ministrado de forma online, a metodologia utilizada foi essencial para um bom aproveitamento do mesmo.

Além disso, nenhum participante respondeu que o método “não fez diferença no processo” ou que foi um “dificultador”, o que demonstra uma boa indicação do recurso metodológico adotado. Uma importante observação a ser feita neste aspecto é que os futuros professores que colaboraram com a pesquisa já possuíam conhecimento deste recurso metodológico, pois é um estudo que frequentemente realizam no curso de Licenciatura do IFMG- *campus* São João Evangelista. Por este motivo, acredita-se que eles detinham embasamento para responder esta pergunta.

Neste sentido, podemos relacionar esta abordagem com os estudos de D'ambrosio (1993) discutido no capítulo 1, quando propõe que a aprendizagem de Matemática na formação de professores deve se basear na resolução de problemas, na investigação e exploração de situações dinâmicas que tiram os futuros professores da zona de conforto. Esta autora aponta também que se queremos que alunos da Educação Básica aprendam nesta perspectiva, começar na formação inicial é essencial.

3. Você considera que o uso do GeoGebra foi uma ferramenta importante para com processo de visualização e investigação?

No resultado desta pergunta, fica evidente o quanto o GeoGebra foi importante no processo, assim como foi verificado na fala de alguns participantes que será visto no decorrer de outras respostas. É importante ressaltar aqui que esta ferramente não foi utilizada apenas para auxiliar na visualização das figuras, mas sim para promover a investigação na busca por possíveis padrões existentes, algo que é defendido por Borba (2010).

4. Como futuro professor de Matemática, você pensa que Geometria Esférica, diante de suas aplicações e relevâncias para compreensão e explicação de fenômenos que nos rodeia e do auxílio à resolução de questões da própria ciência, deveria ser um conteúdo a ser trabalhado nos cursos de Licenciatura em Matemática?

Já as respostas desta pergunta permitiu verificar que sim, todos eles concordam que este conteúdo deve ser ensinado nos cursos de graduação. Esta análise corrobora com as ideias de Fiorentini (2005), apresentadas no capítulo 1 desta pesquisa, que ao falar sobre a formação do conhecimento para o futuro professor, afirma que é importante que ele conheça o processo de como se deu historicamente a produção e a negociação de significados em Matemática. Além disso, ele assegura que o professor de Matemática deve compreender também a relação da Matemática com a realidade.

5. Como futuro professor de Matemática, você pensa que Geometria Esférica, diante de suas aplicações e relevâncias para compreensão e explicação de fenômenos que nos rodeia e do auxílio à resolução de questões da própria ciência, deveria ser um conteúdo a ser ensinado na Educação Básica?

Apesar de considerarem um conteúdo relevante e necessário para a formação de professores, uma pequena parte dos participantes (3 deles), consideram que o conteúdo é complexo para ser abordado no Ensino Básico. Os demais acenaram que deveria sim ser ensinado.

6. Esse minicurso contribuiu com seu processo de formação como futuro professor de Matemática? Se sim, de que forma? Se não, justifique.

Com as respostas dos participantes, foi possível verificar que eles consideraram as atividades muito relevantes no contexto da formação acadêmicas deles, visto que foram unânimes em responder sim. Um dos comentários foi o seguinte: *"Contribuiu bastante. É sempre bom conhecer coisas novas, quão mais profundamente possível. Além disso, em tempos em que se acredita na Terra plana, faz parte do nosso cotidiano conhecimentos assim. Ajudam a explicar nossa realidade."*

Neste trecho podemos associar às ideias de Ponte (2002) ao falar das competências necessárias que os cursos de formação de professor precisam desenvolver na prática do futuro professor. Este autor reforça que o domínio do conteúdo é importante, mas não pode se limitar somente à ele. Assim, ele cita as diversas áreas fundamentais e ao falar do campo relacionado ao *formação pessoal, social e cultural dos futuros docentes*, ele expõe que essas competências estão relacionadas ao desenvolvimento de capacidades de reflexão, autonomia, participação e percepção de princípios, que são fundamentais para o exercício da profissão.

Assim, o que se percebe é que além do conhecimento Matemático, desenvolveu-se aspectos relacionados à conhecimentos da própria ciência.

Nos relatos seguintes, alguns participantes apontaram a importância do estudo desse conteúdo considerando a aplicabilidade da Geometria Esférica como fator importante no processo.

"Sim, muito. É um conteúdo muito relevante, que associa-se de forma concreta à nossa realidade (em relação ao próprio planeta Terra, por exemplo) e que, aparentemente, não é trabalhado de forma consistente na Licenciatura em Matemática - talvez, por não se tratar de um conteúdo cobrado na Educação Básica. Por isso tudo, acredito que foi muito enriquecedor para mim, como licenciando e futura professora de matemática, poder ter um contato inicial e introdutório bem completo, como foi durante o minicurso, com a Geometria Esférica, além de ser um incentivo para um futuro aprofundamento nessa área da geometria."

"Sim, pois como somente a Geometria Euclidiana nos é apresentada, às vezes

pode dar a entender que todo conhecimento geométrico é baseado na Geometria de Euclides. Além disso, os conhecimentos geométricos relacionados a Geometria Esférica possui muitas aplicações que podem ser usadas quando estudamos o planeta terra e, assim como esta, acredito que as outras geometrias possam nos auxiliar em outros estudos."

Outros participantes responderam sim ressaltando a importância de se conhecer os diversos tipos de conhecimentos existentes, visto nos seguintes comentários:

"Sim, pois percebi que existe conceitos que são trabalhados como se fossem uma única verdade e através desse minicurso vi que existe outros horizontes que devemos percorrer."

"Sim, pois me possibilitou conhecer um novo tipo de geometria, bem como conhecer alguns de seus conceitos, além de ampliar o horizonte quanto ao campo das geometrias."

Nestes relatos acima, percebe-se a quebra de paradigmas, discutido no referencial teórico por Kallef (2010), ao trazer para a "sala de aula" algo inesperado, o que foi importante para os participantes romperem com a ideia que carregam da Educação Básica de que existe apenas um tipo de Geometria.

Outro participante confirmou a relevância das atividades no aspecto em que nelas foi possível trabalhar conceitos da própria Geometria Euclidiana, no qual ele ressalta a importância do GeoGebra no processo.

"Esse minicurso contribuiu muito para meu aprendizado da geometria, visto que é uma matéria que possuo bastante dificuldade, tornou-se mais visível alguns conceitos e a utilização do geogebra facilitou bastante a visualização e compreensão do conteúdo."

Portanto, o que se percebe é que devido às especificidades do GeoGebra e das atividades e/ou problemas apresentados, foi possível emergir problemas de natureza secundária que revelaram lacunas presentes no percurso escolar dos graduandos ao mesmo tempo que permitiu sanar estas dificuldades percebidas. Exemplos desta afirmação foram as atividades da própria Geometria Euclidiana, descritas na sessão anterior, que não eram previstas, mas foram necessárias para se retomar conceitos da Geometria Esférica.

7. O fato da aplicação ter ocorrido de forma não presencial , por meio de reuniões síncronas, prejudicou, de alguma forma, o processo de apropriação de conceitos?

De forma geral, os participantes não consideraram que o formato online atrapalhou os estudos, mas a grande maioria relatou que se fosse presencial teria sido mais aproveitado e teria sido mais exitoso. Um exemplo disso é a seguinte fala:

“Não, mas se fosse presencial seria melhor. A aplicação das reuniões não presenciais possui alguns problemas, como as vezes o ambiente em que nos encontramos tira nossa atenção, em alguns momentos a internet falhou dificultando o acesso. Porém, foi muito importante essas reuniões não presenciais, visto que através delas foi possível a utilização do geogebra facilitando a visualização das figuras e de certa forma nos mostrando como utilizar tal ferramenta, além de que, as aulas foram grandes descobertas, muito interessantes de forma a puxar nossa atenção.”

“Acho que não, claro que presencialmente seria mais proveitoso, mas o fato de ter sido online não atrapalhou na apropriação de conceitos”

Outro exemplo desse argumento é de participantes que relataram sobre a interação, que poderia ser melhor se as atividades tivessem ocorrido presencialmente:

“Não. Consegui apropriar os conceitos, mesmo que remotamente, porém se fosse presencialmente poderíamos ter mais interação da turma.”

“Acredito que se a aplicação fosse presencial a apropriação de conceitos poderia ser maior, pois o envolvimento e participação dos participantes seria maior.”

Estas falas corroboram com a suspeita inicial relatada na metodologia, quando acredita-se que o formato online poderia prejudicar o processo de interação entre participante-participante e participante-professor e consequentemente a apropriação dos conceitos pretendidos.

Mas por outro lado, outros participantes não viram problema algum com o formato dos encontros, os quais relataram que a forma com que as atividades foram conduzidas, como os diálogos entre professor e participantes e o uso de uma ferramenta dinâmica (GeoGebra), a apropriação dos conceitos não ficou prejudicada. Isso pode ser percebido nas seguintes falas:

“Acredito que não, ou, pelo menos, não de forma tão perceptível. A forma com que se deram as reuniões síncronas foi bem completa, trazendo dinamicidade e participação de todos, por exemplo, durante as reproduções no GeoGebra. Aparentemente, todos os participantes sentiram-se bem acolhidos durante os encontros e, alguns, livres para opinar sobre os assuntos tratados.”

“Não. As aulas foram muito bem explicadas e dialogadas.”

Com estes relatos é possível verificar que, como recomenda Onuchic (2019), a Resolução de Problemas usada como recurso Metodológico torna as aulas de Matemática mais interessantes. Isso é percebido na medida que esta metodologia oportunizou os participantes a sentirem-se mais à vontade e mais confiantes para expressarem seus pontos de vista e o quanto eles consideraram isto como fator relevante no processo a ponto de compensar o fato das aulas terem ocorrido remotamente.

8. Se possível, deixe aqui suas considerações finais, sugestões e/ou críticas a respeito da proposta da aplicação ocorrida.

Neste item os participantes foram unânimes em dizer que o quanto gostaram do minicurso, com relação à metodologia adotada, com relação às descobertas e também quanto aos recursos utilizados, que permitiu maior dinamicidade e melhor visualização dos objetos Geométricos:

"Foi muito interessante o minicurso, os conceitos foram muito bem explicados, as aulas foram bem dinâmicas, foram feitas muitas descobertas. Além da utilização de plataformas que tornaram ainda mais interessantes os encontros, além da paciência da professora em nos ajudar e tirar todas as dúvidas."

"Particularmente, eu amei o curso. Foi muito bom conhecer algo que não se faz presente no nosso curso mas que possui interessantes aplicações. Embora em alguns momentos tive dificuldade em participar, pelo envolvimento em outras atividades, fui contemplado com situações bastante prazerosos do minicurso. Por fim, acredito que seria muito interessante e pertinente momentos como esse que possibilite ao estudante o estudo de conceitos não presentes na grade curricular do curso."

"Me sinto muito grato por ter feito parte deste projeto e por ter conhecido essa área pouco citada, ao meu ver, da geometria. Foi bem enriquecedor. Também gostei bastante de usar o GeoGebra para as construções propostas, uma vez que eu não tinha tido tanto contato com esta plataforma anteriormente e creio que aprendi a manusear bem as ferramentas que foram trabalhadas. [...]"

"Achei muito bom, a professora nos proporcionou incríveis momentos com o minicurso. A proposta me chamou atenção desde o início, pois não fazia ideia alguma do conteúdo, apesar de já ter ouvido falar."

"Gostei bastante do curso, apesar de ter muita dificuldade em geometria, aprendi conceitos diferentes do que eu já havia visto."

Um participante relatou que este estudo despertou nele o interesse em conhecer mais sobre outros tipos de Geometrias: *"[...] foi muito bom participar desse minicurso ministrado [...], aprendi muito, e ele ainda me deixou a curiosidade de querer conhecer e procurar saber mais sobre essa geometria, que até então por mim era desconhecida. Muito obrigada!"*

Esta fala, a vontade de querer aprender mais sobre o conteúdo, relatada pelo participante, traduz a importância de oferecer aos estudantes atividades com metodologias que oportunizam descobertas e aguçam a curiosidade, que são características fundamentais para continuar na busca por novos conhecimentos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É fato que o Ensino de Geometria em boa parte das nossas instituições de ensino e principalmente na Educação Básica se restringe à Geometria de Euclides. E por este motivo, nos limitamos a resolver problemas de acordo com seus preceitos, mas o que pôde ser verificado ao longo deste trabalho é que nem sempre a Geometria Euclidiana será suficiente para explicar determinadas situações ou resolver certos tipos de problemas. Não tivemos, em nenhum momento, o intuito de exaltar um tipo de Geometria em detrimento de outra. Ao contrário, a proposta consistiu em agregar novos conhecimentos para que dessa forma os estudantes pudessem utilizar e encarar a Matemática, em especial a Geometria, como um todo e não de forma fragmentada e essencialmente abstrata como foi ensinada em um determinado período.

E como é dever de qualquer pesquisa acadêmica a universalização do conhecimento, este trabalho se comprometeu com essa disseminação, uma vez que a Geometria não Euclidiana, e consequentemente a Geometria Esférica, é um campo pouco explorado no meio acadêmico brasileiro, tanto é que a bibliografia deste tema é difícil de se encontrar em nosso idioma, que inclusive foi uma das dificuldades que se apresentou durante esta pesquisa. Dessa forma, esta pesquisa se comprometeu também no sentido de tornar este conteúdo mais acessível aos futuros professores, considerando que ele possui, de certa forma, um grau de complexidade um pouco mais elevado pela linguagem com que é abordado nos referenciais bibliográficos, cuja escrita é direcionada à matemáticos da Matemática pura.

Este trabalho, por se tratar de uma pesquisa de ensino, não possui o intuito de alcançar um resultado específico ou expor uma conclusão final acerca do assunto abordado. O que se propõe é apresentar possibilidades para o Ensino de Matemática no que diz respeito à um tema tão relevante e tão necessário cientificamente e que auxilia na compreensão de fenômenos que nos rodeia. Neste sentido, apresentamos algumas considerações finais acerca dessa pesquisa bem como suas limitações e possibilidades para possíveis trabalhos futuros.

6.1 Retomando alguns percursos da pesquisa

O objetivo desta pesquisa era construir uma sequência didática que fosse capaz de subsidiar a apresentação de conceitos iniciais de Geometria Esférica para alunos da Licenciatura em Matemática de maneira a oportunizar estes estudantes a agirem com mais liberdade e autonomia, com o intuito de os tornar protagonistas no próprio processo de aprendizagem.

E para alcançar este objetivo, foram realizadas leituras e pesquisas sobre a Resolução de Problemas e suas diferentes perspectivas adotadas ao longo dos anos. E diante de todas as contribuições apresentadas e defendidas por vários autores, como abordado no capítulo 4, escolheu-se a perspectiva que a utiliza como recurso metodológico, que encara o problema como ponto de partida para introduzir determinado conteúdo em aulas que podem se tornar um verdadeiro ambiente investigativo.

Além dessa proposta, optou-se pelo uso do *software* GeoGebra para as construções necessárias, que devido à todas as suas potencialidades já conhecidas e reconhecidas, possui o poder de auxiliar efetivamente nas investigações desejadas, além é claro de possibilitar uma visualização mais dinâmica e esteticamente mais atraente.

Ao refletir sobre as discussões dos resultados da aplicação da sequência didática associados aos relatos dos alunos após a realização do minicurso, ambos apresentados no capítulo anterior, podemos concluir que a sequência didática elaborada e aplicada, levando-se em conta a metodologia e as ferramentas adotadas contribuiu de forma positiva e eficaz na apropriação dos conceitos pretendidos.

A utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, mediada pelo GeoGebra, colocou os alunos frente à situações diferentes dos padrões normais, o que trouxe à tona o desafio de resolverem os problemas sem antes terem conhecimento do conteúdo. Aos poucos, as definições foram sendo descobertas e/ou apresentadas e ao mesmo tempo sendo feito um paralelo entre a geometria já estudada por eles, a Geometria Euclidiana, e a nova geometria, a Geometria Esférica, o que permitiu, além de rever alguns conceitos, a descoberta de outros tipos de conhecimentos.

Diante do exposto, considera-se que os objetivos foram alcançados, uma vez que os estudantes puderam formar conceitos que antes não possuíam, o que possibilitou ampliar os horizontes dos mesmos acerca deste estudo. Além disso, como eles são futuros professores, já levarão consigo um conhecimento que poderão compartilhar com seus alunos na Educação Básica. Neste sentido, as contribuições deste trabalho atingem o Ensino Básico diretamente, na formação de professores, e indiretamente, já que estes professores serão responsáveis futuramente por este ensino, especialmente na área de Geometria que possui tantas fragilidades em seu processo de ensino e aprendizagem, como relatado no segundo capítulo. E como a Resolução de Problemas possibilita uma aprendizagem construída e não apenas repassada, os benefícios para a Educação Básica podem ser gerados no sentido que se tem professores mais preparados metodologicamente.

E como foi exposto na introdução, ao professor de Matemática não cabe apenas ensinar conteúdos de Matemática. É importante também que o mesmo atue no sentido de proporcionar aos seus alunos momentos que os permitam refletir sobre aspectos da ciência de forma geral. Um exemplo disso foi o relato do aluno que expôs a relevância do trabalho ao tratar de questões como a esfericidade da Terra em tempos que há pessoas que acreditam que esta é plana. Dessa forma, acreditamos que este trabalho tenha contribuído para os processos de alfabetização científica dos alunos participantes do minicurso, que por si só já é indicativo de sua relevância.

Além destas contribuições citadas, esta pesquisa contribuiu para minha formação acadêmica, uma vez que eu também não conhecia esta Geometria não Euclidiana, como falado na introdução. E além de ter tido a oportunidade de conhecer os fundamentos da Geometria Esférica e compreender sobre seu processo histórico, o fato de ter compartilhado estes conhecimentos com outras pessoas, especialmente com futuros professores, me possibilitou vivenciar situações muito gratificantes, como o entusiasmo e a gratidão relatada pelos alunos ao realizarem as descobertas no decorrer do minicurso. E se, além de tantas outras funções, é papel do professor estimular os estudantes na busca por novos tipos de conhecimentos e provocá-los a aprender partindo de questionamentos que permitem encarar a realidade como objeto que carece de constantes estudos e aprimoramento, então aí está a função social desta pesquisa.

E em virtude de todas as contribuições citadas e das reflexões apresentadas, sugerimos que este tema seja trabalhado na formação inicial de professores como, por exemplo, em cursos de extensão ou até mesmo como disciplina optativa, sendo possível também uma abordagem na formação continuada. Sendo assim, acreditamos que esta pesquisa possa contribuir para a inovação curricular na Educação Básica.

6.2 Limitações e possibilidades de pesquisas futuras

Como foi abordado na Metodologia, inicialmente foi previsto que o formato das aulas, por ter ocorrido de forma remota, poderia prejudicar a apropriação dos conceitos, visto que a interação entre aluno-aluno, aluno-professor e aluno-material didático poderia ficar à desejar. Isso realmente foi confirmado por alguns alunos em resposta ao questionário analisado anteriormente e também pela própria pesquisadora no decorrer da aplicação. Além disso, percebeu-se por exemplo, em um determinado momento, que alguns poucos alunos não estavam fazendo as construções no GeoGebra, como havia sido solicitado, algo que dificilmente aconteceria em um formato presencial. Por outro lado, foi possível observar também, ao analisar as considerações dos futuros professores no mesmo questionário citado, que devido às metodologias adotadas, a forma com que os conceitos foram discutidos e introduzidos, possibilitou um melhor aproveitamento, o que permitiu alcançar o objetivo proposto.

Por esta razão, deixamos como sugestão para pesquisas futuras a aplicação desta sequência didática de forma presencial para avaliar os processos de ensino e aprendizagem dos alunos ao realizarem as atividades fazendo uso da Resolução de Problemas da forma como foi abordada neste trabalho. Além disso, indicamos a possibilidade de usar o recurso do *software* Cinderella como ferramenta de Geometria dinâmica para fazer uma comparação com o GeoGebra, já que o Cinderella possui uma interface própria para representações de figuras Euclidianas e não Euclidianas.

Estas indicações de possibilidades se fazem necessárias porque o que fizemos aqui foi apontar alguns caminhos a serem percorridos, dentro de outras possibilidades de se trabalhar o ensino de Geometria Esférica na formação de professores. Além disso, cabe ao professor adaptar a proposta para melhor atender as necessidades dos estudantes. Neste sentido, sugerimos também que esta sequência didática seja utilizada com alunos do Ensino Médio para averiguar a possível assimilação de conceitos, visto que este público carece de um ensino de Geometria que faça sentido na formação deles, e como a Geometria Esférica auxilia na compreensão de fenômenos que apenas a Geometria Euclidiana é insuficiente para tal, acredita-se que seja bastante relevante abordar este tema com este público, com algumas adaptações necessárias da proposta aqui elaborada.

Por fim, recomendamos uma consulta aos apêndices e anexos desta pesquisa, que além de outros arquivos possui a sequência didática na íntegra, visto que foram essenciais para a consecução deste trabalho. Recomendamos também a leitura das referências bibliográficas utilizadas, que foram a base para este estudo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. d. L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim Gepem**, p. 133–154, 2009.

ANDRADE, M. L. T. D. **Geometria esférica, uma sequência didática para conceitos elementares na educação Básica**. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP, 2011.

BERLINSKI, D.; CARINA, C.; MORICONI, M. **Os elementos de Euclides: Uma história da geometria e do poder das ideias**. Zahar, 2018. ISBN 9788537817452. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=o3DTDwAAQBAJ⟩.

BICUDO, I. **Os elementos**. UNESP, 2009. ISBN 9788571399358. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=um94A66MDxkC⟩.

BORBA, M. d. C. Softwares e internet na sala de aula de matemática. **X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador–BA**, 2010.

BOYER, C. **História da matemática**. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. 2018.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As geometrias esférica e hiperbólica em foco: sobre a apresentação de alguns de seus conceitos elementares a estudantes do ensino médio. **Bolema**, v. 29, n. 51, p. 419–427, 2015. ISSN 1980–4415.

CAVICHIOLO, C. V. Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática: o que dizem os formadores. 2011.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Ciência Moderna, 2000. ISBN 9788573930214. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=FDWbMQAACAAJ⟩.

D'AMBRÓSIO, B. S. A evolução da resolução de problemas no currículo matemático. **I Seminário de Resolução de Problemas. Anais... Rio Claro: UNESP**, 2008.

D'AMBRÓSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. **Pesquisa em educação matemática: Concepções e Perspectivas**, v. 1, n. 1, p. 97–115, 1999. ISSN 91011-121314.

DORIA, C. M. **Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica**. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

D'AMBROSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século xxi: o grande desafio. **Pro-Posições, Campinas**, v. 4, n. 1, p. 10, 1993.

EUCLIDES e a geometria. **Folha de São Paulo**, 2010. Disponível em: ⟨https://www1.folha.uol.com.br/fsp/ilustrissima/il0108201001.htm⟩.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores). ISBN 9788574961477.

FREITAS, T. L. **Proposta de inserção de um modelo de Geometria não Euclidiana na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado) — UEFS, 2014.

FRIGOTTO, G.; CIAVATA, M.; SILVA, M. **Ensino médio integrado: concepções e contradições**. São Paulo: Cortez, 2005.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GODOI, W. dos S. O problema das ideias de natureza simples para a geometria não-euclidiana e para a física não-newtoniana a partir da análise de gastón bachelard. **Griot: Revista de Filosofia**, v. 11, n. 1, p. 268–288, 2015.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Gradiva, 2003. ISBN 9789726629276. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=-oOIQgAACAAJ⟩.

KALEFF, A. Geometrias não-euclidianas na educação básica: Utopia ou possibilidade. **X Encontro Nacional de Educação Matemática: Salvador–BA**, 2010.

MEDEIROS, J. R. S. **Geometria Esférica na Educação Básica: uma proposta de Intervenção curricular**. Dissertação (Mestrado) — UFP, 2017.

NACARATO, A. M. A formação do professor de matemática: pesquisa x políticas públicas. **Revista Contexto & Educação**, v. 21, n. 75, p. 131–153, 2006.

ONUCHIC, L. d. l. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? e para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.

ONUCHIC, L. d. L. R. **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2019.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin**, p. 73–98, 2011.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no brasil: causas e consequências. **Zetetikê**, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993. ISSN 8646824.

PCN, E. M. **Parâmetros Curriculares Nacionais-Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 1998.

PEREIRA, M. R. O. **Geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino**. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP, 2001.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. d. A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 11, p. 3–8, 2002.

PONTE, J. P. da. **Por uma formação inicial de professores de qualidade**. Tese (Doutorado) — Universidade do Algarve, 2000.

SALEMA, R. L. **Das cordas ao GPS: Um estudo sobre Geometria Esférica**. Dissertação (Mestrado) — CPII, 2018.

SANTOS, M. C. M. algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em matemática. **Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 12, p. 150–156, 2002.

SANTOS, W. T. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. Dissertação (Mestrado) — FURG, 2016.

SCHENNA, F. M. **História do surgimento da Geometria não euclidiana: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami**. Dissertação (Mestrado) — UTFP, 2019.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas. **Investigar para aprender matemática**, Matemática para todos: investigações na sala de aula e Associação, p. 61–72, 1996.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática. **CHARLES, RI et al. The Teaching and Assessment Problem Solving**, 1989.

TODHUNTER, I. **Spherical Trigonometry, for the Use of Colleges and Schools: With Numerous Examples**. Macmillan, 1863. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=moRRAAAAYAAJ⟩.

WHITTLESEY, M. **Spherical Geometry and Its Applications**. CRC Press, 2019. (Textbooks in Mathematics). ISBN 9781000627527. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=IaW-DwAAQBAJ⟩.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como Ensinar**. Penso Editora, 2015. ISBN 9788584290185. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=ypR9CAAAQBAJ⟩.

APÊNDICE A – GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NOS IFS DO BRASIL

Instituição	**Foram pesquisados os termos "Geometria não Euclidiana" e "Geometria esférica" e obteve os seguintes resultados:**
IFG- Valparaíso	Geometria I: O quinto postulado e a origem de Geometrias não Euclidianas. Congruência de Triângulos. Teorema do Ângulo Externo e Aplicações. Semelhança de Triângulos. Círculo. Áreas de Figuras Planas.
IF Goiano-Urutaí	O quinto postulado de Euclides. Conceitos históricos das Geometrias não Euclidianas. Geometria Neutra. Geometrias não Euclidianas.
IFMA-Codó	Elementos de filosofia e lógica da Geometria, O postulado das paralelas e o nascimento das geometrias elíptica e hiperbólica, Elementos de geometria elíptica e hiperbólica. Modelos para a geometria elíptica e para a geometria hiperbólica.
IFMT-Campo Novo do Parecis	Apresenta como disciplina Optativa
IFPA-Belém	Apresenta na disciplina História da Matemática
IFPE- Pesqueira	Geometria não-euclidiana. A axiomática na geometria e as suas consequências.
IFPR- Capanema	Apresenta em geometria espacial- noções elementares de geometria não-euclidianas.
IFRR- Boa Vista	Contextualização e aplicações dos conceitos fundamentais das geometrias não euclidianas.
IF Catarinense-Camboriú	Apresenta como disciplina optativa- Noções de Geometria Projetiva, Fractal, Hiperbólica, da Superfície da Esfera e Topologia.
IFSP- Araraquara	Apresenta na disciplina história da matemática- apontar as razões históricas que levaram à descoberta e à aceitação das geometrias não euclidianas; descrever e analisar as consequências desta descoberta e a mudança de paradigma da Matemática no século XX.
IFSP-Campos do Jordão	Ementa: Estudo do desenvolvimento histórico e axiomático das Geometrias Não-Euclidianas. A carga horária destinada a PCC propõe a reflexão sobre o ensino-aprendizagem das geometrias não-euclidianas na Educação Básica.

IFSP- Caraguatatuba	O componente curricular trabalha a contextualização e aplicações de conceitos das geometrias não euclidianas, a partir de uma perspectiva histórica e com enfoque nas tentativas de demonstração do 5° postulado de Euclides e do desenvolvimento da geometria hiperbólica.
IFSP-Cubatão	Em Geometria II -Conceitos primitivos e sistemas de axiomas das geometrias não-euclidianas: incidência, ordem, congruência, continuidade, paralelismo.
IFSP- Guarulhos	Geometria Esférica: 1. Interseção de um plano com uma esfera; 2 .Círculos máximos e círculos menores; 3. Ângulo esférico; 4. Triângulos esféricos; 5. Distância na superfície esférica; 6. Poliedros regulares e suas simetrias; 7. Fórmula de Euler.
IFSP-Itaquaquecetuba	Geometrias não Euclidianas- Apresenta na disciplina história da Matemática.
IFRJ-Nilópolis	Apresenta na disciplina História da Matemática- As Geometrias Não-Euclidianas.
IF Fluminense-Campos dos Goytacazes	Introdução à Geometria Esférica 4.1. Plano 4.2. Retas 4.3. Postulados 4.4. Distância entre dois pontos 4.5. Distância pola 4.6. Retas perpendiculares 4.7. Quadrilátero de Saccheri 4.8. Quadrilátero de Lambert 4.9. Soma dos ângulos internos de um triângulo.
IFSP- Birigui	Apresenta em História da Matemática- A história das geometrias não-euclidianas. Aspectos Históricos sobre a Geometria Não Euclidiana;•Conceitos de Paralelismo no plano e na esfera;•Soma das medidas internas de um triangulo no plano e na esfera;

Fonte: elaborado pelo autor com auxílio da Plataforma E-Mec, 2021.

APÊNDICE B – CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Formas de acesso ao GeoGebra:

1. Acessar o GeoGebra Online pelo endereço: ⟨https://www.geogebra.org/classic⟩, ou
2. Possuir o *software* GeoGebra instalado no computador. Ele pode ser baixado gratuitamente no site: ⟨http://www.geogebra.org/⟩ na opção "baixar aplicativos". Pode-se baixar umas das versões do "GeoGebra Clássico";

Instruções Iniciais:

1. Conhecer a interface, como a "janela de visualização", "janela de álgebra" e a "barra de ferramentas";
2. Para abrir a "janela de visualização 3D", basta clicar no menu que fica no canto superior direito da tela, e em seguida, usar a opção "perspectives".

Construções:

***Construção* 1. Esfera de raio AB**

1. Construa um ponto A, na origem dos eixos para ser o centro da esfera.
2. Com a ferramenta "Esfera: centro e ponto" (Sphere: center e point), clique no ponto A em em qualquer ponto de um dos eixos, determinando assim o ponto B e a esfera desejada.
3. Para a visualização ficar mais limpa, com o mouse fora da esfera, clique com o botão direito do mesmo e desmarque as opções eixo (axes) e plano (plane). Temos a esfera pronta.

***Construção* 2. Grandes círculos da esfera**

1. Na esfera anterior, marque um ponto C.
2. Com a ferramenta "plano por 3 pontos" (plane though 3 points), construa um plano clicando nos pontos A, B e C.
3. Com a ferramenta interseção de duas superfícies (intersect two surfaces) e clicando no plano e na esfera, construa o grande círculo.

4. Com o mouse em cima do plano e clicando com o botão direito, desmarque a opção mostrar objeto (show object).

***Construção* 3. Reta tangente a uma curva**

1. No desenho anterior, vamos construir uma reta tangente ao arco $\widehat{AB}$ que passe por B.

2. Para isso, com a quarta ferramenta do menu, clique na opção "reta tangente", clique no arco $\widehat{AB}$ e no ponto C.

***Construção* 4. Arco circular**

1. Construa um esfera de centro A e raio $\overline{AB}$ e construa também um ponto C qualquer.

2. Com a sexta ferramenta do menu, clique na opção "arco circular" (cicular arc).

3. Em seguida, clique nos pontos A, B e C e então teremos o arco $\widehat{BC}$.

***Construção* 5. Ponto antípoda**

1. Ainda na figura anterior, com a ferramenta "reta" (line), clique nos pontos A e B para definir uma reta AB.

2. Com a segunda ferramenta do menu e na opção "interseção entre dois objetos" (intersect), clique na reta $\overline{AB}$ e na esfera, criando assim os pontos D e E. O ponto D é antípoda ao ponto B. Caso queira, oculte o ponto E.

***Construção* 6. Grandes círculos perpendiculares**

1. Em uma esfera de raio $\overline{AB}$ construa um plano perpendicular à reta $\overline{AB}$. Para isso, use a ferramenta "plano perpendicular" (perpendicular plane) e clique na reta $\overline{AB}$ e no ponto A.

2. Em seguida, use a interseção entre superfícies para construir um grande círculo. Oculte o plano.

3. Construa um ponto C qualquer no grande círculo anterior.

4. Finalmente, construa um plano que contenha os três pontos A, B e C para determinar um segundo grande círculo. Oculte o plano. Por construção, este grande círculo é perpendicular ao primeiro.

Construção 7. **Dedução da fórmula que representa a área de um fuso esférico completo**

1. Em uma esfera de raio $\overline{AB}$, construa um ponto C qualquer e em seguida, um grande círculo que passe por B e por C;
2. Construa um ponto D qualquer sobre a esfera e por ele, um segundo grande círculo que também passe por B;
3. Marque o ponto E, antípoda ao ponto B;
4. Um fuso esférico é a porção da superfície da esfera determinado pelos arcos $\widehat{BCE}$ e $\widehat{BDE}$;
5. Já um fuso completo é dado pela pela porção anterior acrescida da região oposta à primeira;
6. Deduza a fórmula do cálculo da área de um fuso completo considerando que o ângulo $\angle CBD$ mede α.

APÊNDICE C – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA REALIZAÇÃO DO MINICURSO

Esta sequência de atividades possui como recurso metodológico a Resolução de Problemas, fazendo uso da perspectiva adotada por Onuchic e Allevato, como discutido no capítulo 6. Portanto, a ideia é sempre colocar uma sequência de problema que desencadeará discussões que levarão o estudante a usar ferramentas que ele já possui, até chegar em um determinado ponto em que apenas essas ferramentas serão insuficientes. A partir daí ele se virá na necessidade de usar outras estratégias, e então será apresentada a definição formal do conceito pretendido.

C.1 Primeiro Encontro

O início da aula será através da apresentação de um problema gerador com intuito de instigar a reflexão dos alunos e posteriormente, em momento oportuno, retornar a discussão desse problema inicial.

Atividade 1. **Problema do urso**

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direção e caminhou 10 Km sempre em direção a Leste. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

1. Faça um desenho no caderno para representar essa situação;
2. Baseado em seus estudos sobre Geometria Euclidiana, há respostas para este problema?
3. Por que, de acordo com conhecimentos sobre Geometria Euclidiana, este problema não possui solução?

Partindo do pressuposto que os alunos tenham somente conhecimento de geometria euclidiana, o objetivo deste problema é que eles concluam que o mesmo não apresenta solução de acordo com os preceitos dessa geometria.

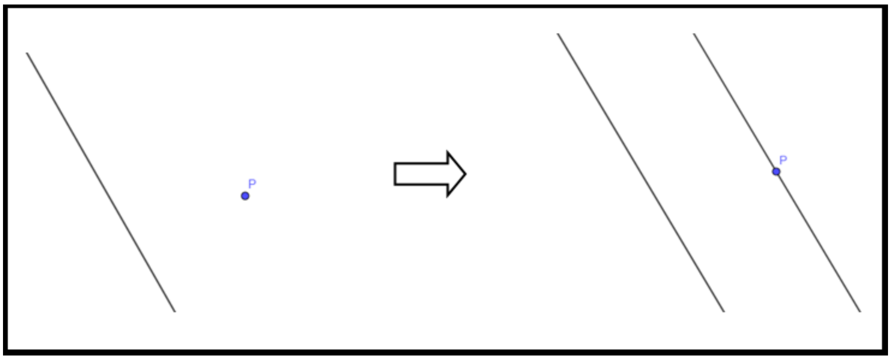
Atividade 2. **Postulado das paralelas**

Em sua importante obra chamada "Os Elementos", no qual Euclides de Alexandria apresenta toda teoria matemática estudada até aquela época, este importante matemático expôs 5 postulados sob os quais toda Geometria Euclidiana foi construída. Dentre eles temos o V postulado, conhecido também como postulado das paralelas. Este postulado recebeu uma versão mais moderna e mais simplificada, pelo matemático John Playflair, que é enunciada como se segue:

Dada uma reta e um ponto exterior, existe uma e uma só reta contendo o ponto e paralela à reta dada.

A figura C.2 é uma representação visual deste postulado.

Figura C.1: Representação visual do V postulado.

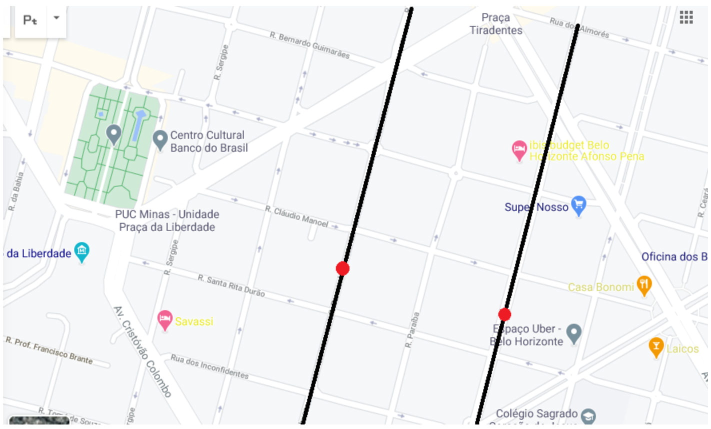


Fonte: elaborado pelo autor, 2020

Agora, pense na seguinte situação:

1. Duas pessoas que percorrem as ruas destacadas na figura C.2, na mesma direção e sentido, em algum momento se encontrarão, considerando o fato de que elas estão caminhando em ruas que nunca se cruzam?

Figura C.2: Duas pessoas em ruas paralelas.

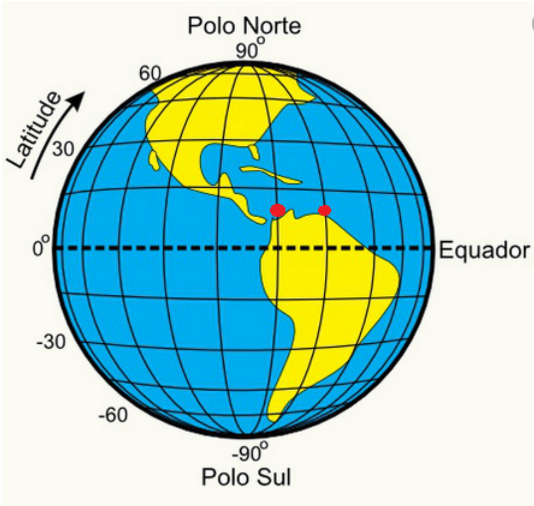


Fonte: adaptado pela autora do *Google Maps*

2. Por outro lado, o que acontece se dois objetos percorrerem lado a lado em uma

superfície esférica, cada um em um meridiano (arco de um grande círculo que passa pelos polos), como na figura C.3 a seguir, destacado pelos pontos em vermelho?

Figura C.3: Dois objetos que percorrem lado a lado na superfície esférica.



Fonte: adaptado pela autora

Espera-se que eles respondam que os objetos se encontrarão em algum momento, em um dos polos. E esta situação exemplifica justamente a negação do V postulado de Euclides, quando se usa o modelo esférico ao invés do plano e arcos de grandes círculos como retas. Ou seja, não há retas paralelas na Geometria Esférica, já que os grandes círculos sempre se intersectam em dois pontos

***Atividade* 3. Um pouco de História sobre o desenvolvimento da Geometria Não Euclidiana**

Assista ao vídeo a seguir, disponibilizado via *You Tube* para compreender um pouco sobre a história do desenvolvimento da Geometria não Euclidiana: ⟨https://youtu.be/PNqH8pT-czs⟩.

O processo que culminou com o surgimento da Geometria não Euclidiana foi de forma lenta e através da dedicação constante e frustrações contínuas de vários Matemáticos. Estes, ao longo de quase dois mil anos, ao tentar demonstrar o V postulado de Euclides- existe uma única reta paralela a uma reta dada- se viram fracassados. Na verdade, estavam certos em atribuir tanta importância à um único postulado, mas ao mesmo tempo estavam errados em querer demonstrá-lo, pois não existia demonstração.

A verdade veio a tona após muitos esforços: o tão perturbador postulado somente é válido em modelos plano e espacial, ambos Euclidianos, ao passo que sua negação fundamenta o sistema de duas das geometrias não euclidianas.

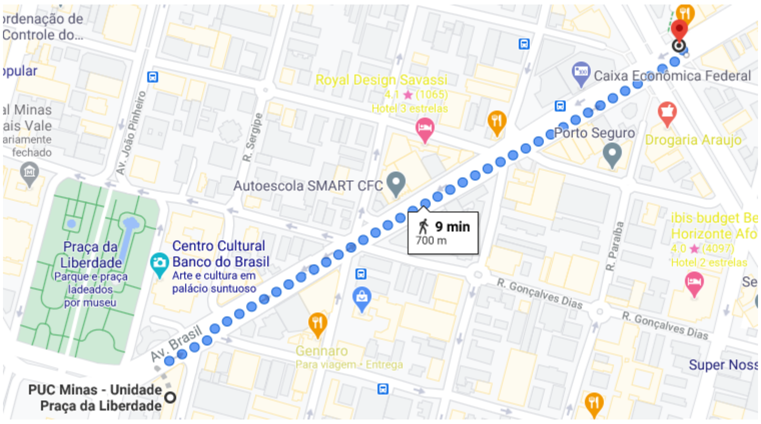
Portanto, entende-se por Geometria não Euclidiana, a geometria que **não** se fundamenta por completo nos axiomas de Euclides. Como exemplo temos a Geometria Hiperbólica (existem infinitas retas que passam por um ponto e que são paralelas a uma reta dada), a Geometria Esférica, que é tema deste trabalho e entre outras[1].

C.2 segundo Encontro

Atividade **4. Menor distância entre dois pontos**

1. Considere a seguinte situação: Queremos calcular a distância (na figura C.4) entre a Puc Minas- Unidade, que fica na Praça da Liberdade, e a Praça Tiradentes , ambas na cidade de Belo Horizonte, com o mapa extraído do *Google Maps*. Como essa distância é calculada?

   Figura C.4: Distância no mapa.

   Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

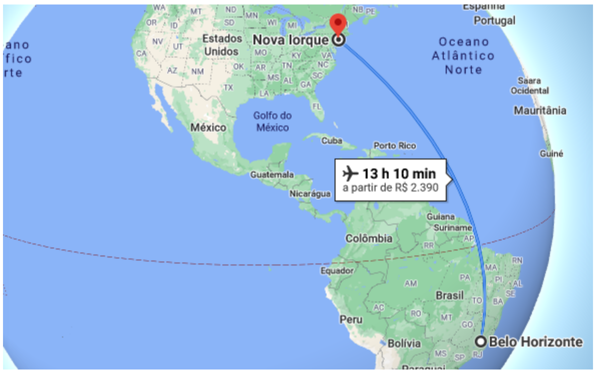
   Somos habituados, desde o Ensino Fundamental, a considerar que a menor distância entre dois pontos é sempre um segmento de reta que os une. Nesta situação, essa análise é parcialmente válida, já que temos uma superfície que para efeitos práticos pode ser considerada plana e o espaço em questão é um pequeno recorte, ou um grande zoom, da imensidão do planeta em que vivemos.

2. Mas se quisermos calcular a distância entre as cidades de Nova York, nos Estados Unidos e Belo Horizonte no Brasil, como na figura C.5 por exemplo? Faz sentido

[1]Existem ainda a Geometria do taxi, a Geometria projetiva e a Geometria fractal.

pensar de forma análoga à situação anterior, ou seja, considerando um segmento de reta que une as cidades?

Figura C.5: De Belo Horizonte para Nova York.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

Logicamente que não, já que neste caso, por representar uma distância muito grande e se comparado ao formato do nosso planeta seria uma atitude um tanto quanto desastrosa, já que uma reta representaria um "furo" na superfície da terra. Portanto, a distância deve ser dada pelo comprimento de um arco.

Para aprofundar estes questionamentos, segue uma atividade de construção a ser realizada no GeoGebra.

1. Insira um ponto C na superfície esférica de centro A e raio $\overline{AB}$ e insira também um terceiro ponto, o ponto D;

2. Trace um círculo que passe por estes três pontos;

3. Construa o centro E deste círculo com a opção "Ponto médio ou centro";

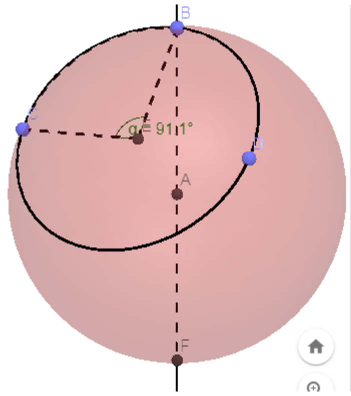
4. Construa os segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{EC}$;

5. Calcule a medida do ângulo $\angle BEC$ com a opção "ângulo definido por três pontos";

6. Construa o ponto F, antípoda de B. Para isso, construa a reta que passa por $\overline{AB}$ e em seguida marque o ponto F na interseção desta reta com a esfera;

7. Agora, com a ferramenta "mover", arraste o ponto D para qualquer direção e observe os valores do ângulo $\angle BEC$. Um exemplo pode ser observado na figura C.6;

Figura C.6: Encontrando a menor distância entre dois pontos.

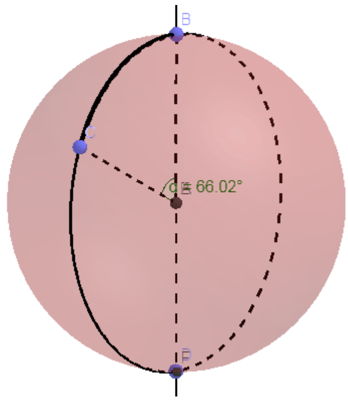


Fonte: elaborado pelo autor, 2021

8. O que acontece com a medida deste ângulo quando o ponto D (O centro da circunferência) se aproxima cada vez mais de F?

9. Agora faça o ponto D coincidir com o ponto F de forma que o centro E da circunferência coincida com o centro da esfera. O que se pode observar em relação a medida do ângulo $\angle BEC$? Na figura C.7 temos um exemplo dessa situação;

Figura C.7: Exemplo de construção de menor distância entre dois pontos.



Fonte: elaborado pelo autor, 2021

10. Lembe-se de que a medida do arco $\widehat{BC}$ também pode ser calculada pela medida do ângulo que o descreve, no caso $\angle BEC$;

11. Assim sendo, o que podemos dizer quanto à distância entre os pontos B e C?

Nestas construções é esperado que o aluno verifique que quando o arco $\widehat{BC}$ faz parte do círculo máximo que contêm B e C, então esta medida é a menor possível.

Esta menor distância é o que chamamos de *Geodésica*. Por isso, na geometria esférica, os círculos máximos são equivalentes as "retas" da geometria euclidiana, já que aqui, a menor distância entre dois pontos é um arco de um círculo máximo que contém estes dois pontos.

Agora, utilizando o conceito de retas (geodésicas) aqui abordado, vamos voltar ao problema do urso [2] . Agora é possível resolvê-lo? Como seria o desenho do percurso?

Obviamente o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar caminhando em uma superfície plana. Portanto, se pensarmos que ele está andando sobre a superfície terrestre, que é praticamente esférica, ele conseguirá fazer tal percurso, veja o por quê.

O urso, ao mover-se para Norte ou para Sul, descreve um arco de um meridiano e, quando caminha para Leste, descreve um arco de um paralelo. O urso parte do ponto inicial P e caminha para Sul por um meridiano, caminha para o Leste e, quando anda para Norte, regressa por um meridiano diferente, figura C.8. Como dois meridianos diferentes só se intersectam no Polo Norte e no Polo Sul, o ponto de partida terá que ser um dos polos. Como o urso se move de Norte para Sul, o ponto P deve ser o Polo Norte. De fato, partindo do Polo Norte é possível fazer um tal percurso. Neste caso, a cor do urso é branca.

Figura C.8: Caminho do urso.

Fonte: Disponível em: https://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber_urso.html

A esfera é considerada um modelo do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Esta geometria surgiu no século XIX por matemáticos que, ao tentarem demonstrar um postulado da Geometria Euclidiana, acabaram por descobrir uma Geometria não euclidiana. Mesmo tendo sido descoberto

[2]problema adaptado de: https://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber_urso.html

apenas neste século mencionado, suas ideias já eram aplicadas séculos atrás, na época das grandes navegações e e atualmente possui aplicação na na física, como na Teoria da Relatividade, em rotas aéreas e com o sistema de posicionamento global (GPS).

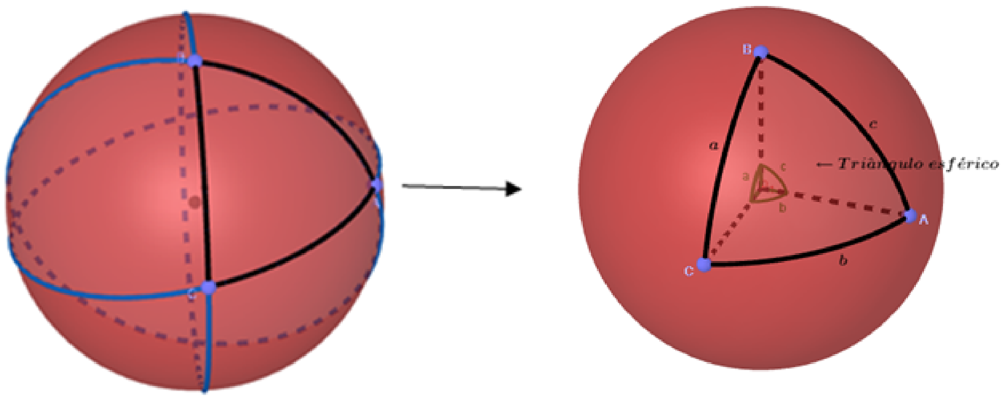
Uma de suas principais aplicações é a relação com o globo terrestre, interpretando a superfície terrestre como a superfície esférica, os meridianos como círculos máximos (retas) e os pontos como sendo uma localização, que de acordo com os estudos em Geografia, são as coordenadas geográficas, combinação entre latitude e longitude.

***Atividade* 5. Triângulo esférico**

1. Trace dois pontos C e D na superfície de uma esfera de centro A e raio $\overline{AB}$;
2. Com os três pontos, forme um triângulo esférico BCD unindo os vértices dados;
3. Como isso deve ser feito? Lembre-se de como ficou definido a menor distância entre dois pontos no momento de traçar os lados do triângulo;

Este é o que chamamos de triângulo esférico, ou seja, um triângulo cujos lados estão sobre círculos máximos da esfera que o contém, como pode ser verificado na figura C.9 .

Figura C.9: Triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

É importante ressaltar que o triângulo pode ser construído utilizando apenas a ferramenta "arco dados centro e o dois pontos", ou ainda utilizando a ferramenta "setor circular dados centro e dois pontos", como feito na segunda imagem da figura acima.

Obs.: Note que na primeira imagem, quando se constrói o triângulo esférico, é gerado, automaticamente um outro triângulo na esfera cujos vértices são os pontos antípodas em relação aos vértices originais.

Para refletir...

Imagine um triângulo desenhado em um papel de caderno, por exemplo. Se recortarmos este triângulo e tentarmos colá-lo sobre uma bola de isopor, o que acontece? E por que isso acontece?

Atividade 6. **Ângulo esférico**

1. No triângulo desenhado anteriormente, como podemos medir um de seus ângulos internos? O que está no vértice B por exemplo?

2. Precisamos de segmentos de retas que partem do vértice em questão;

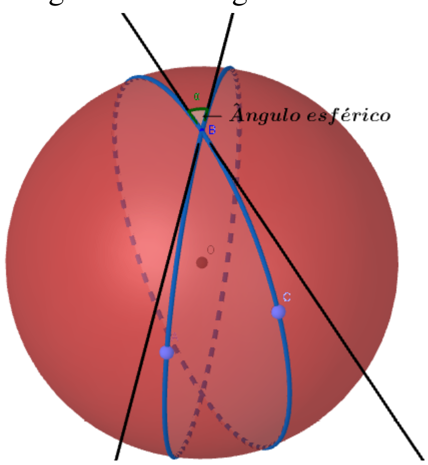
3. Mas não são segmentos quaisquer, os mesmos devem ser tangentes aos lados do triângulo que forma este vértice.

4. Para isso, com a ferramenta "reta tangente a uma circunferência" clicando no ponto B e nos arcos $\widehat{BC}$ e $\widehat{BD}$ construa as retas que formarão o ângulo.

5. Com a opção de medir ângulos, selecione as duas retas concorrentes para verificar a amplitude do ângulo.

   E portanto ângulo esférico é definido como sendo a medida do ângulo plano entre as tangentes dos dois arcos que o formam, como na figura C.10.

Figura C.10: Ângulo esférico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

6. Faça isso com os outros dois vértices do triângulo esférico;

Atividade 7. **Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico**

1. Calcule a soma dos ângulos internos do triângulo anterior;

2. Arraste os pontos e faça o cálculo novamente;

3. Faça isso quantas vezes desejar;

4. O que você pode observar em relação à soma dos ângulos de um triângulo da Geometria Esférica?

Espera-se que eles verifiquem que nesta geometria, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre superior a π rad ($180°$*).*

Atividade 8. **Qual é o maior valor que podemos obter ao somar as medidas dos ângulos de um triângulo esférico?**

1. Construa um triângulo esférico *ABC* usando necessariamente a ferramenta "arco circular";

2. Mova os pontos deste triângulo de forma a obter a maior área, ou a maior região possível, mas de maneira que a figura continue sendo um triângulo esférico;

3. O que podemos dizer quanto ao maior valor que podemos obter ao somar as medidas dos ângulos de um triângulo esférico, considerando esta construção?

Espera-se que os alunos digam que cada ângulo do triângulo tende a π rad ($180°$*), e como consequência, a soma dos três ângulos tende a* 3π *rad* $(540°)$. *Portanto, juntando estas duas últimas atividades, temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior* $180°$ *e inferior a* $540°$.

Atividade 9. **Existe triângulo que possui dois dos seus ângulos internos retos?**

1. Na geometria Euclidiana, é possível obter um triângulo que possui dois ângulo internos que medem $90°$? Por que isso não pode ocorrer?

2. Pensando na Geometria Esférica, este fato tão curioso pode acontecer?

3. Em uma esfera de raio $\overline{AB}$, construa um grande círculo que seja perpendicular à $\overline{AB}$. Marque sobre qualquer lugar deste círculo, os ponto C e D;

4. Construa agora um outro grande círculo, mas que passe por B e C. Por construção, qual é a sua posição relativa ao primeiro?

5. Construa um terceiro grande círculo que passe por B e por D. Por construção, ele também é perpendicular ao primeiro;

6. O que podemos dizer sobre os ângulos do triângulo esférico BCD?

7. E se movermos os pontos C e D sobre o primeiro grande círculo construído?

8. Portanto, existe triângulo que possui dois dos seus ângulos internos retos?

Com esta construção, espera-se que eles digam que há triângulos esféricos cujos dois de seus ângulos são retos.

Atividade 10. **Existe triângulo cujos ângulos internos são todos retos?**

1. Construa dois grandes círculos perpendiculares, como no início da atividade anterior;

2. Construa uma reta que seja perpendicular ao plano ABC e que passe por A. Para isso use a ferramenta "reta perpendicular" e clique no ponto A e em seguida no plano ABC;

3. Marque o ponto D de interseção desta reta com o grande círculo que é perpendicular à $\overline{AB}$;

4. Por fim, construa o grande círculo que passe por BD. O que se pode dizer a respeito dos ângulos do triângulo BCD?

5. Existe triângulo cujos ângulos internos são todos retos?

O objetivo desta atividade é que eles descubram que sim, é possível existir triângulos esféricos nesta condição, um fato que foge completamente do que supostamente já estudaram em Geometria.

C.3 Terceiro Encontro

Atividade 11. **Retângulos**

1. Sabemos que na Geometria Euclidiana, no caso da Geometria plana, duas retas que são paralelas a uma terceira reta são paralelas entre si;

2. Na Geometria Esférica, duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas entre si?

3. Para isso, na esfera de centro A e raio $\overline{AB}$, trace a reta definida por este segmento;

4. Com a opção "Plano perpendicular", construa o plano que passe pelo centro A da esfera e que seja perpendicular ao seu eixo;

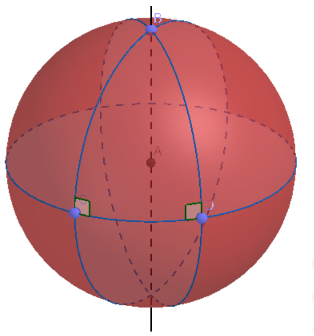
5. Com a opção "Interseção de Duas Superfícies", clique na esfera e no plano para obter uma circunferência;

6. Com o cursor do mouse sobre o plano e clicando com o botão direito do mesmo, desmarque a opção "Exibir objeto";

7. Construa dois pontos quaisquer C e D sobre o grande círculo obtido anteriormente e em seguida, construa com a opção "Plano definido por três pontos" os planos definidos por ABC e ABD.

8. Construa as circunferências de interseção entre estes planos e a esfera, e em seguida desmarque a opção "Exibir objeto".

Figura C.11: Duas retas perpendiculares a uma terceira.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Por construção temos duas "retas", $\widehat{BC}$ e $\widehat{BD}$, ambas perpendiculares a "reta", grande círculo, construída inicialmente, como pode ser visto na figura C.11 acima.

9. Mas o que podemos dizer quanto às duas “retas” definidas por $\widehat{BC}$ e $\widehat{BD}$?

10. Elas podem ser paralelas entre si?

11. Então, o que podemos dizer sobre duas retas perpendiculares a uma terceira reta?

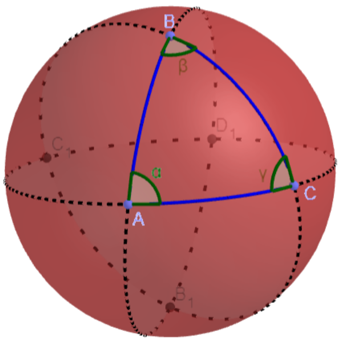
12. E sobre retângulos? Eles existem nesta Geometria? Por que?

Espera-se que eles digam que não existem retângulos nesta geometria, já que é impossível existir duas retas perpendiculares a uma terceira reta e que seja paralelas entre si, o que é necessário para garantir a existência de retângulos.

Atividade 12. **Triângulos semelhantes**

1. Seria possível obter um triângulo esférico semelhante ao da figura C.12?

Figura C.12: Triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

2. Qual é a definição de triângulos semelhantes na Geometria Euclidiana?

   O estudante precisa concluir que para haver semelhança, os ângulos do triângulo esférico devem possuir a mesma medida.

3. Agora, para ajudar a responder a pergunta inicial, recorde-se do caso de semelhança entre arcos de uma circunferência. Como se dá? Qual a condição necessária e suficiente para haver semelhança neste caso?

4. Então o que podemos dizer a respeito da semelhança de triângulos esféricos, já que seus lados são arcos de grande círculos cujos raios serão sempre iguais?

Espera-se que o aluno responda que a semelhança entre triângulos esféricos apenas acontece quando os lados correspondentes dos triângulos em questão possuem a mesma medida.

***Atividade* 13. Área sobre a superfície esférica**

O triângulo das bermudas, como o próprio nome indica é uma área triangular, no qual seus vértices são formados por Fort Lauderdale, cidade da Flórida, Porto Rico e pela Ilha das Bermudas. É uma região caribenha localizada no Oceano Atlântico, como pode ser visto na figura C.13.

Figura C.13: Triângulo das Bermudas.

Fonte: disponível em:
https://www.cemiteriomaldito.com/terror/misterios-do-triangulo-das-bermudas/. Acesso em 2021

É uma região historicamente misteriosa por ser palco do desaparecimento de aviões, barcos, cargueiros e navios no qual se explica por diversas teorias, inclusive a de que estes desaparecimentos misteriosos seriam por motivos sobrenaturais. Uma das ocorrências mais famosas foi o voo 19 [3], no qual desapareceram cinco aviões em uma operação de treinamento. Foi enviado um outro avião para resgatar os homens perdidos, porém, este último também perdeu o contato. O que se sabe é que todas essas pessoas nunca foram encontradas.

Agora pergunta-se:

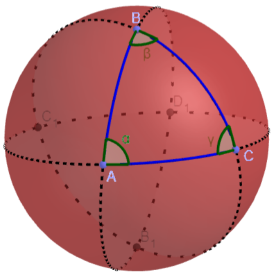
1. Como seria o cálculo da área dessa misteriosa região? Considere o raio da terra de $6.371km$.

[3] Mais detalhes, acesse: ⟨https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/reportagem/o-misterioso-caso-do-desaparecimento-do-voo-19.phtml⟩

Para resolver este problema, vamos analisar uma figura análoga, porém no GeoGebra para clarear as ideias e tentar estabelecer uma fórmula para o cálculo da área de uma triângulo sobre a superfície de uma esfera.

2. Em uma esfera de centro A, construa um triângulo esférico como na figura C.14, deixando visível os círculos máximos que formam os lados do triângulo.

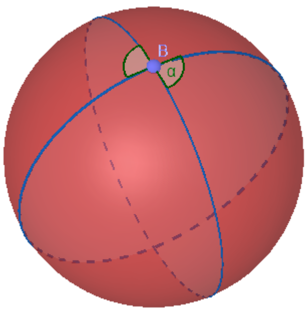
Figura C.14: Triângulo esférico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

3. Sabe-se que o cálculo da área da superfície de uma esfera de raio r é dado por $4\pi r^2$ e a área de um fuso esférico **completo**, como na figura C.15 abaixo, nesta mesma esfera e que tem ângulo α é dada por $4\alpha r^2$.

Figura C.15: Fuso esférico completo.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Usando estas informações, qual seria a relação que representa a área de um triângulo esférico (A_{te}) cujos ângulos são α, β e γ?

4. Como pode ser representada a área da esfera em função da área dos fusos esféricos completos determinados pelos três ângulos α, β e γ do triângulo esférico nela representado e a área do próprio triângulo?

5. Lembre-se que os pontos antípodas de cada vértice do triângulo formam juntos um triângulo semelhante ao original.

6. Observe que a área da esfera é dada pela área do fuso completo de ângulo α mais a área do fuso completo de ângulo β mais a área do fuso completo de ângulo γ, subtraído de quatro vezes a área de um triângulo esférico.

Portanto, sejam α, β e γ, as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC, então sendo A_{Te} a área desse triângulo esférico e r é o raio da esfera temos:

$$A_{esfera} = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4A_{Te} \Rightarrow$$

$$\pi r^2 = (\alpha + \beta + \gamma) r^2 - A_{Te} \Rightarrow$$

$$\frac{A_{Te}}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

*Essa relação indica que **a área de um triângulo esférico é proporcional ao seu excesso esférico,** sendo o excesso esférico a soma dos ângulos subtraído de π.*

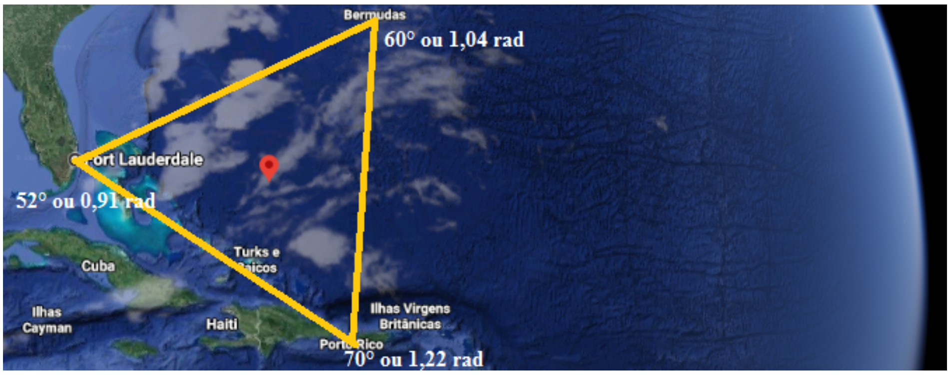
Obs.: Por esta relação é possível observar também que, se a área de um triângulo esférico tende a zero, então a soma de seus ângulos internos se aproxima de π rad (180°). Por esta razão, o cálculo de áreas pequenas na superfície da terra, como por exemplo a de um lote, é realizado levando-se em consideração a Geometria Euclidiana, já que essa área comparada com o tamanho da terra é praticamente desprezível.

Agora temos a ferramenta para resolver o problema proposto, mas para isso, precisaremos das medidas dos ângulos internos do triângulo esférico formado. Para calcular estes ângulos, precisaríamos utilizar relações trigonométricas no triângulo esférico, como a lei dos senos e a lei dos cossenos. Mas como elas ainda não foram deduzidas, estes ângulos serão dados, já que os mesmos podem ser deduzidos utilizando as coordenadas geográficas das cidades citadas, o que pode ser facilmente consultado pelo *Google Maps*.

A figura[4] a seguir C.16 fornece os ângulos por valores aproximados.

[4] O triângulo desenhado, feito para se ter uma noção da área da região, não condiz com o real formato de um triângulos esférico, cujos lados são arcos, e não retas euclidianas.

Figura C.16: Vértices do Triângulo das Bermudas.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

Finalmente, a área da região que forma o triângulo das bermudas ($A_{t.bermudas}$) será dada por:

$$\frac{A_{t.bermudas}}{r^2} = 0,91 + 1,22 + 1,04 - \pi$$

$$A_{t.bermudas} = (3,17 - 3,14)r^2$$

$$A_{t.bermudas} = 1.217.689,23$$

Esta é a área aproximada de uma região que ainda guarda tantos mistérios nos quais muitos se tem estudado, mas pouco se tem provado.

***Atividade* 14. Área de um triângulo trirretângulo**

Obs.: Um triângulo trirretângulo é um triângulo esférico cujas medidas de cada um de seus ângulos internos é 90°.

1. Qual é a relação entre a área de um triângulo trirretângulo e a área da esfera?
2. Sendo assim, qual é a área de um triângulo trirretângulo?
3. Usando a relação encontrada na atividade anterior, verifique sua resposta;

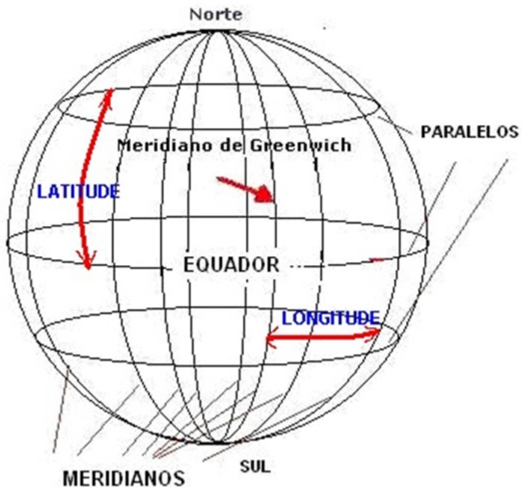
Com esta atividade, espera-se que os alunos concluam que sem a fórmula, basta considerar o fato de que um triângulo com esta característica representa $\frac{1}{8}$ da área de uma esfera. Dessa forma, a área pedida é $\frac{\pi}{2}r^2$.

***Atividade* 15. Cálculo de distâncias sobre a terra**

Já vimos que a menor distância entre dois pontos na superfície de uma esfera é o menor arco de um grande círculo que une os dois pontos. Com esta informação, vamos resolver alguns problemas, e para isso, vamos usar o mais preciso e importante método de localização geográfica.

Os paralelos e meridianos, combinados entre si juntamente com as latitudes e longitudes, dão origem ao sistema de coordenadas geográficas, que é utilizado para definir qualquer ponto da superfície terrestre. Observe o esquema da figura C.17 a seguir para retomar alguns conceitos.

Figura C.17: Esquema para coordenadas geográficas.

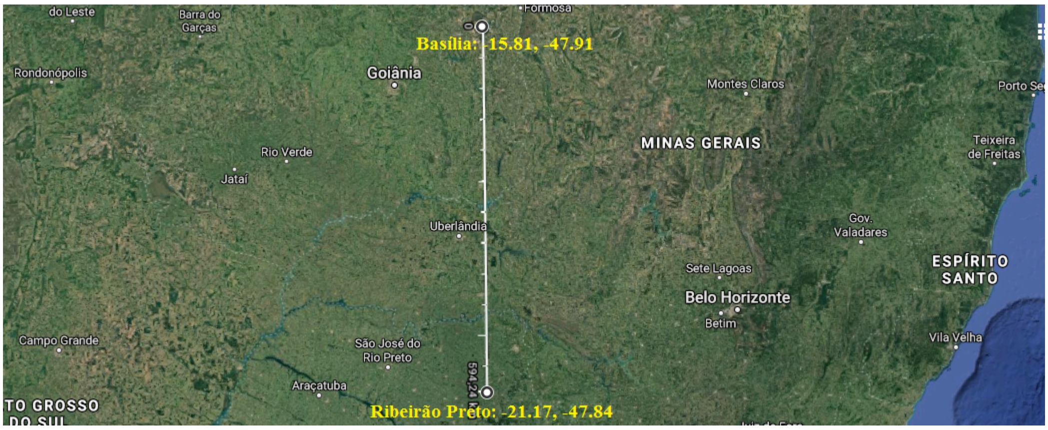


Fonte: disponível em:
⟨https://geografalando.blogspot.com/2011/04/localizacao-linhas-imaginarias.html⟩

1. Vamos calcular a distância entre as cidades de Ribeirão Preto, em São Paulo e Brasília, a capital federal;

2. Uma rápida busca no *Google Maps*, como na figura C.18 nos dá suas coordenadas geográficas que são: Brasília $(-15.81, -47.84)$, Ribeirão Preto $(-21.17, -47.91)$, com a primeira coordenada como sendo a latitude e a segunda sendo a longitude;

Figura C.18: Coordenadas de Brasília e Ribeirão Preto.



Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

3. Como podemos perceber, ambas as cidades pertencem ao mesmo meridiano, devidos às suas longitudes serem praticamente as mesmas. Portanto, ambas pertencem ao mesmo grande círculo da terra;

4. Dessa forma, como podemos calcular a distância entre elas em graus?

5. Considerando o valor aproximado do raio da terra de 6371km, qual é essa medida em km?

Espera-se que os alunos concluam que esta distância, em graus, pode ser calculada fazendo simplesmente o módulo da diferença entre suas latitudes:

$$|-15,81^\circ - (-21,17^\circ)| = 5,36^\circ$$

Para encontrar a distância (d) em km, o cálculo a se fazer é usar uma simples proporcionalidade direta, comparando com o comprimento de uma circunferência de raio igual a 6371, que é a medida aproximada do raio do terra.

$$\frac{360}{5,36} = \frac{2\pi r}{d} \Rightarrow$$
$$d = \frac{5,36 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 6371}{360} \Rightarrow$$
$$d = 595,61 km$$

Conferindo o resultado no próprio Google Maps, ainda de acordo com a figura C.18, temos uma distância de 594,24 km entre Brasília e Ribeirão Preto.

Atividade 16. **Distância entre dois pontos quaisquer**

Na atividade anterior, vimos como calcular a distância entre dois pontos sobre a terra, que pertencem ao mesmo meridiano.

Agora, como podemos calcular a distância entre as cidades de Porto Seguro, na Bahia e Lisboa, em Portugal? Suas coordenadas estão na figura C.19 a seguir.

Figura C.19: Coordenadas de Lisboa e Porto Seguro.

Fonte: *Google Maps*, acesso em 2021

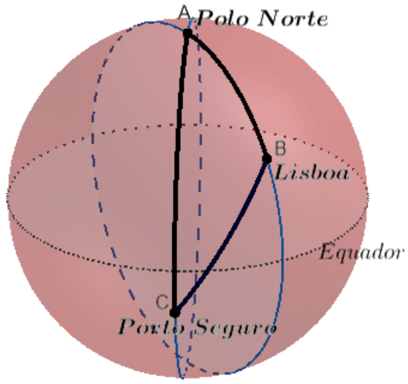
1. Como podemos facilmente perceber, estas cidades não pertencem ao mesmo meridiano (grande círculo). Então, como proceder neste caso?

2. Da Geometria Euclidiana, sabemos que para encontrar a distância entre dois pontos quaisquer no Sistema Cartesiano, basta traçar um triângulo retângulo cuja hipotenusa á a distância requerida e a mesma pode ser calculada usando o Teorema de Pitágoras.

3. Usando a ideia, Vamos traçar um triângulo (apenas como modelo) no GeoGebra que possui como dois dos seus vértices, a localização das duas cidades em questão;

4. Como os lados de um triângulo esférico deve estar sobre um grande círculo, vamos usar meridianos e assim o terceiro ponto será o polo norte, como na exemplificação da figura C.20 a seguir:

Figura C.20: Triângulo formado com as cidades.



Fonte: elaborado pelo autor, 2021

5. Mas na Geometria Esférica, a fórmula do Teorema de Pitágoras não é válida, dado que a semelhança de triângulos como já foi visto, é extremamente limitada. Sendo assim, o que fazer neste caso?

6. Assim como na Geometria Euclidiana, há uma relação trigonométrica que pode ser usada. Uma delas é a lei dos cossenos para triângulos esféricos, cuja demonstração consta em material à parte desta sequência de atividades.

Lei dos cossenos em triângulos esféricos

Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c, e ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Então

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

7. Tendo a fórmula, para encontrar a distância desejada, precisa-se encontrar a medida dos arcos $\widehat{AC} = b$ e $\widehat{AB} = c$, além do ângulo $\widehat{A}$. Como isso pode ser feito?

Espera-se que os estudantes encontrem os valores:

$$b = 90 + 16,16 = 106,16^\circ;\ c = |90 - 38,85| = 51,15^\circ$$

e

$$\widehat{A} = |-38,27 - (-8,49)| = 28,78^\circ$$

Fazendo isso e substituindo na fórmula, encontrarão o valor de 7023 km para a distância entre as cidade de Porto Seguro e Lisboa, uma medida bem próxima [5] da fornecida pelo Google Maps disponível na imagem 5.28.

[5] Como estamos trabalhando com valores aproximados, tanto para as coordenadas quanto para valores de π, além de outros aspectos como a esfericidade da terra, que é um pouco achatada nos polos, essa diferença entre a distância encontrada e a distância fornecida pelo *Google Maps* é esperada.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PÓS MINICURSO

1. Antes desse minicurso você já tinha ouvido falar sobre Geometrias não Euclidianas ou Geometria Esférica?

    (a) Nunca tinha ouvido falar;

    (b) Já tinha ouvido, mas não fazia ideia de como seria;

    (c) Já tinha ouvido falar e compreendia alguns conceitos;

    (d) Já tinha ouvido falar e já possuía muitos conhecimentos acerca do assunto.

2. Você considera que o uso da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica (que usa problemas como ponto de partida para introduzir um novo conceito que é construído valendo-se de conhecimentos já estudados) contribuiu com o processo de apropriação de conceitos sobre Geometria Esférica?

    (a) Contribui bastante e foi um método eficaz;

    (b) Contribuiu razoavelmente;

    (c) Não fez diferença;

    (d) Foi um dificultador do processo, portanto o método tradicional seria melhor.

3. Você considera que o uso do GeoGebra foi uma ferramenta importante para com processo de visualização e investigação?

    (a) Foi muito importante, pois facilitou o processo de visualização e investigação;

    (b) Não foi importante, pois seu uso não contribuiu com a aprendizagem proposta;

    (c) Foi desnecessário, pois dificultou o processo;

    (d) Foi utilizado de maneira incorreta.

4. Como futuro professor de Matemática, você pensa que Geometria Esférica, diante de suas aplicações e relevâncias para compreensão e explicação de fenômenos que nos rodeia e do auxílio à resolução de questões da própria ciência, deveria ser um conteúdo a ser trabalhado nos cursos de Licenciatura em Matemática?

    (a) Sim

    (b) Não

5. Como futuro professor de Matemática, você pensa que Geometria Esférica, diante de suas aplicações e relevâncias para compreensão e explicação de fenômenos que nos rodeia e do auxílio à resolução de questões da própria ciência, deveria ser um conteúdo a ser ensinado na Educação Básica?

(a) Sim, pois é relevante;

(b) Não, pois não é relevante;

(c) Não, porque é muito difícil para ser ensinado e díficil de ser assimilado;

(d) Não, por outros motivos.

6. Esse minicurso contribui com seu processo de formação como futuro professor de Matemática? Se sim, de que forma? Se não, justifique.

7. O fato da aplicação ter ocorrido de forma não presencial prejudicou, de alguma forma, o processo de apropriação de conceitos?

8. Se possível, deixe aqui suas considerações finais, sugestões e/ou críticas a respeito da proposta da aplicação ocorrida.

APÊNDICE E – ATIVIDADES ASSÍNCRONAS DO MINICURSO

A segunda parte do minicurso ofertado consistiu em assistir e compreender as demonstrações de algumas fórmulas da Geometria esférica. Elas foram gravadas pelo próprio pesquisador sendo que algumas foram realizadas fazendo uso de ferramentas especiais do GeoGebra como por exemplo a visualização em 2d dos triângulos planos construídos na esfera para usar as relações trigonométricas envolvidas. As demonstrações podem ser acessadas nos seguintes links que direcionam para o YouTube:

1. Demonstração da desigualdade triangular para triângulo esférico. Disponível em: ⟨https://youtu.be/uwMvwnx6DSo⟩;
2. Demonstração no GeoGebra- os ângulos da base de um triângulo esférico isósceles são iguais. Disponível em: ⟨https://youtu.be/A3shL4c3cbg⟩;
3. Demonstração no GeoGebra- Lei dos cossenos para triângulo esférico. Disponível em: ⟨https://youtu.be/bAVR29Lob9U⟩;
4. Demonstração no GeoGebra: Lei dos senos em triângulos esféricos. Geometria Esférica. Disponível em: ⟨https://youtu.be/y5jA8vFwDXw⟩

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Comitê de Ética em Pesquisa

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa intitulada: "GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO INICIAL: a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica", na qual será ofertada uma Oficina Virtual sobre o conteúdo citado. Esta pesquisa é coordenada pela Professora Franksilane Gonçalves Camelo e contará ainda com o professor Orientador Weversson Dalmaso Sellin.

A sua participação não é obrigatória sendo que, a qualquer momento da pesquisa, você poderá desistir e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo para sua relação com o pesquisador, com a UFVJM ou com o IFMG- campus São João Evangelista.

Caso você decida aceitar o convite, será submetido(a) ao(s) seguinte(s) procedimentos: Participar de uma oficina virtual pelo Google Meet (que será gravada), no qual, como o auxílio do GeoGebra mediado pela Resolução de Problemas irá ser apresentado a conceitos Básicos de Geometria Esférica, e responder um questionário no final da oficina para averiguação da assimilação dos conceitos. O tempo previsto para a sua participação é de aproximadamente 4 horas, igualmente distribuídas em 4 dias, fora do horário escolar.

Possíveis riscos: Invasão de privacidade; Divulgação de dados confidenciais (registrados no TCLE); Embaraço de interagir com estranhos, medo de repercussões eventuais; Tomar o tempo do sujeito ao responder ao questionário ou participar da oficina;

Medidas, providências e cautelas que podem ser adotas frente aos riscos: Estar atento aos sinais verbais e não verbais de desconforto; Garantir a não violação e a integridade dos documentos (danos físicos, cópias, rasuras); Assegurar a confidencialidade e a privacidade, a proteção da imagem e a não estigmatização, garantindo a não utilização das informações em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades, inclusive em termos de auto-estima, de prestígio e/ou econômico – financeiro; Garantir o acesso aos resultados individuais e coletivos.

Os benefícios relacionados com a sua participação poderão ser a aprendizagem de conceitos Básicos de Geometria Esférica por meio da Resolução de Problemas, uma oportunidade de aprender sobre um conteúdo pouco estudado nos cursos de graduação do Brasil, o que pode contribuir na sua formação docente.

Os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados em seminários, congressos e similares, entretanto, os dados/informações pessoais obtidos por meio da sua participação serão confidenciais e sigilosos, não possibilitando sua identificação.

Não há remuneração com sua participação, bem como a de todas as partes envolvidas. Não está previsto indenização por sua participação, mas em qualquer momento se você sofrer algum dano, comprovadamente decorrente desta pesquisa, terá direito à indenização.

Observação: O participante precisa apenas possuir um computador com acesso à internet para participar da oficina, visto que a mesma ocorrerá via Google Meet. Portanto, não há gastos financeiros envolvidos.

Você receberá uma via deste termo onde constam o telefone e o endereço do pesquisador principal, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sobre sua participação agora ou em qualquer momento.

Coordenador(a) do Projeto: Franksilane Gonçalves Camelo
Endereço: Rua do Ipê, n° 260, Bairro Alvorada, Peçanha, Minas Gerais
Telefone: (33) 999324505

Declaro que entendi os objetivos, a forma de minha participação, riscos e benefícios da mesma e aceito o convite para participar. Autorizo a publicação dos resultados da pesquisa, a qual garante o anonimato e o sigilo referente à minha participação.

Nome do participante da pesquisa:
Assinatura do participante da pesquisa:

Informações – Comitê de Ética em Pesquisa da UFVJM
Rodovia MGT 367 - Km 583 - nº 5000 - Alto da Jacuba
Diamantina/MG CEP39100-000 Tel.: (38)3532-1240
Coordenadora: Prof.ª Simone Gomes Dias de Oliveira
Secretária: Leila Adriana Gaudencio Sousa
Email: cep.secretaria@ufvjm.edu.br

ANEXO B – TABELA QUE RELACIONA DEFINIÇÕES, POSTULADOS, NOÇÕES COMUNS E PROPOSIÇÕES

Figura B.1: Tabela que relaciona definições, postulados, noções comuns e proposições utilizadas nas demonstrações de cada uma das proposições de Elementos.

Prop. demonstrada	Definições	Postulados	Noções comuns	Prop. utilizadas na demonstração
1	15, 20	1, 3	1	-
2	15, 20	1, 2, 3	1, 3	1
3	15	3	1	2
4	-	-	7, 9	-
5	-	1,2	3	3, 4
6	-	1	8	3, 4
7	-	1	8	5
8	-	-	7	7
9	20	1	-	1, 3, 8
10	20	1	-	4, 9
11	10, 20	1	-	1, 2, 3, 8
12	10, 15	1, 3	-	8, 10
13	10	-	1, 2	11
14	-	2, 4	1, 2, 3, 8	13
15	-	4	1, 2, 3	13
16	-	1, 2	8	2, 3, 4, 10, 15
17	-	2	4	13, 16
18	-	1	8	3, 5, 16
19	-	-	-	5, 18
20	-	1, 2	8	2, 5, 19
21	-	2	4	16, 20
22	15	1, 3	1	2, 3, 20
23	-	1	-	8, 22
24	-	1	1, 8	2, 4, 5, 19, 23
25	-	-	-	4, 24
26	-	1	1, 8	3, 4, 16
27	23	2	-	16
28	-	4	1, 2, 3	13, 15, 27
29	23	2, **5**	-	8, 22
30	-	-	1	27, **29**
31	-	1, 2	-	23, 27
32	-	2	1, 2	13, **29**, 31
33	-	1	-	4, 27, **29**
34	-	1	2	4, 26, **29**
35	-	-	1, 2, 3	4, **29**, **34**
36	-	1	1	**33**, **34**, **35**
37	-	2	6	31, **34**, **35**
38	-	2	6	31, **34**, **36**
39	-	1	1, 8	31, **37**
40	-	1	1, 8	31, **38**
41	-	1	1, 2	**34**, **37**
42	-	1	1, 2	10, 23, 31, **38**, **41**
43	-	1	2, 3	**34**
44	-	1, 2, **5**	1, 8	15, **29**, **30**, 31, **42**, **43**
45	-	1	1, 8	14, **29**, **30**, **33**, **34**, **42**, **44**
46	22	4	1, 3	2, 3, 11, **29**, 31, **34**
47	-	1,4	1, 2, 5	4, 14, **30**, 31, **41**, **46**
48	-	1	1,2	2, 3, 8, 11, **47**

Fonte: Santos (2016)

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a reprodução e/ou divulgação total ou parcial do presente trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, desde que citada a fonte.

Teófilo Otoni, ____ / ____ / ________.

____

Franksilane Gonçalves Camelo

franksilane.camelo@ufvjm.edu.br

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Campus do Mucuri - Rua do Cruzeiro, n. 01 - Jardim São Paulo - CEP 39803-371.

UFVJM