Material Didático Envolvendo o Uso do Octave Como Suporte Para o Aprendizado de Álgebra Linear

Mônica Aparecida Cruvinel Valadão
Flaviano Luiz Benfica
Douglas Frederico Guimarães Santiago
Anderson Luiz Pedrosa Porto

Vol 1 - 1ª Edição

UFVJM
2022

Material Didático Envolvendo o Uso do Octave Como Suporte Para o Aprendizado de Álgebra Linear

Mônica Aparecida Cruvinel Valadão
Flaviano Luiz Benfica
Douglas Frederico Guimarães Santiago
Anderson Luiz Pedrosa Porto

Vol 1 - 1ª Edição

Texto redigido a partir do documento modelo Fancy Book - Template - LosAcademicos disponível em <http://losacademycos.com/design-academycos10-1/fancybook-template/>. Imagem da licença e link inseridos através do pacote doclicense disponível em <https://ctan.org/pkg/doclicense>.

Apoio:
Programa de Apoio ao Ensino de Graduação (PROAE) - PROGRAD/UFVJM
Projeto de Ensino "Elaboração de Material Didático que Empregue o uso de Software como Suporte para o Aprendizado de Álgebra Linear"
Projeto vinculado ao Edital 10/2019/PROGRAD/UFVJM - Ano de Execução 2019/2020
Equipe do Projeto de Ensino:
Mônica Aparecida Cruvinel Valadão (Coordenadora)
Douglas Frederico Guimarães Santiago (Vice-coordenador)
Anderson Luiz Pedrosa Porto (Colaborador)
Flaviano Luiz Benfica (Bolsista)

Elaborado com os dados fornecidos pelo (a) autor(a).

M425 Material didático envolvendo o uso do Octave como suporte para o aprendizado de álgebra linear [recurso eletrônico] / Mônica Aparecida Cruvinel Valadão... [et al].– Diamantina: UFVJM, 2022.
50 p. :il.

ISBN: 978-65-87258-68-3

1. Álgebra Linear. 2. Octave. 3. Proae. I. Valadão, Mônica Aparecida Cruvinel. II. Título. III. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

CDD 512

Ficha Catalográfica – Serviço de Bibliotecas/UFVJM
Bibliotecária Viviane Pedrosa– CRB-6/2641

Sumário

1. Introdução

A disciplina de Álgebra Linear ocupa um papel de destaque na formação do curso de Ciência e Tecnologia, o qual é um curso com característica interdisciplinar oferecido pela Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) (FONSECA et al., 2020). O conteúdo estudado nesta disciplina é indispensável para disciplinas como Funções de Várias Variáveis, Cálculo Numérico, Fenômenos Mecânicos, Linguagens de Programação, entre outras, presentes nas grades dos cursos lotados no Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT) da UFVJM, campus de Diamantina-MG (FONSECA et al., 2020). Atualmente, o curso de Ciência e Tecnologia, vinculado ao ICT, fornece a formação básica comum aos cursos Engenharia de Alimentos, Engenharia Geológica, Engenharia Mecânica e Engenharia Química (ICT, 2020). Dessa forma, o desempenho do discente no decorrer do curso de Ciência e Tecnologia, bem como nos cursos de Engenharia, está relacionado também com o conhecimento assimilado nas disciplinas básicas da área da Matemática, em particular em Álgebra Linear. Nesse contexto, deve-se pensar em atividades que contribuam com o aprendizado dos discentes desta disciplina.

Embora os conceitos de Álgebra Linear sejam fundamentais para diversas outras áreas, observa-se que muitos discentes não se sentem estimulados com esta disciplina. Nesse sentido, o uso de um software como um suporte ao ensino de Álgebra Linear é uma alternativa que pode ser empregada para tornar esta disciplina mais atrativa. Várias referências adotadas nesta disciplina já apresentam atividades que envolvem o uso ferramentas computacionais (LAY, 2007; ANTON; RORRES, 2012; KOLMAN; HILL, 2011; POOLE, 2004). Estas atividades podem ser adaptadas para o uso de softwares gratuitos como Octave (EATON et al., 2020) ou outra linguagem similar a esta.

O conjunto de recursos pedagógicos produzidos no projeto "Elaboração de Material Didático que Empregue o uso de Software como Suporte para o Aprendizado de Álgebra Linear", com registro na Prograd (Nº do Registro: 2019.D.2.20.063.0) (UFVJM, 2020), é apresentado como uma proposta que permite abordar diferentes conceitos de Álgebra Linear de uma forma mais interessante. Especificamente, o projeto em questão foi submetido em um edital do Programa de Apoio ao Ensino de Graduação (Proae) da UFVJM, conforme identificado em (UFVJM, 2020). A proposta principal deste projeto foi a eleboração detalhada de um material didático voltado para os tópicos de Matrizes, Sistema de Equações Lineares, Determinantes, Autovalores e Autovetores. Este instrumento pedagógico é composto por duas partes. A primeira parte corresponde à um conjunto de funções implementadas em linguagem Octave (arquivos ".m"). A segunda corresponde ao presente texto, o qual apresenta detalhes de como utilizar os arquivos ".m" no Octave. Este material é acessível à docentes e discentes que não possuem nenhum conhecimento prévio sobre o software adotado. Todo o conteúdo do projeto está disponível no endereço <https://github.com/monicavaladao/Proae2020> ou via solicitação pelo e-mail <monica.valadao@ufvjm.edu.br>.

Considera-se pertinente mencionar que, para a escrita deste texto com o formato apresentado, adaptou-se o template disponível em (LOSACADEMYCOS, 2020), incluindo em tais adaptações o uso do pacote "doclicense" (CTAN, 2021) para identificar o tipo da licença desta obra. O restante deste livro é estruturado conforme descrição a seguir. O Capítulo 2 apresenta orientações sobre a instalação do software Octave em alguns sistemas operacionais. Os detalhes de como executar no Octave cada função implementada em arquivo ".m" são apresentados no Capítulo 3; cada subseção deste capítulo está relacionada à um conceito elementar da Álgebra Linear. O Capítulo 4 apresenta diferentes atividades que podem ser realizadas com o auxílio do Octave no contexto de Álgebra Linear. Por fim, o Capítulo 5 destaca as considerações finais sobre o desenvolvimento dos objetos produzidos nas etapas do projeto supracitado.

2. Roteiro de Instalação do *OCTAVE*

Neste capítulo são apresentadas instruções para download e instalação do software Octave (OCTAVE, 2020; EATON et al., 2020), o qual é uma ferramenta importante para o desenvolvimento de diversas disciplinas da área da Matemática, Física, Química, Computação, Engenharia, dentre outras.

2.1 Instalando o Octave no Windows

1. Em seu navegador acesse o link de download do octave <https://www.gnu.org/software/octave/download.html>.

2. Em seguida, na tela exibida na Figura 2.1, escolha o sistema operacional do seu computador. Veja o passo 5 caso seja necessário identificar esta informação.

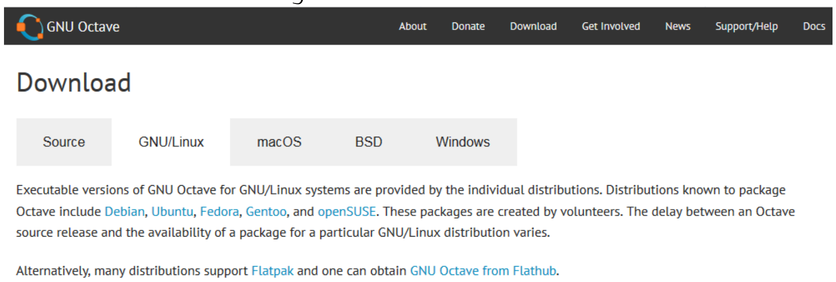
3. Escolha a opção correspondente ao seu sistema operacional, conforme ilustrado na Figura 2.2, e aguarde o download.

4. Após o download execute o arquivo de instalação. Basta ir avançado que o próprio programa já será instalado com as preferências padrão.

5. Caso não saiba se seu sistema operacional Windows é 32 ou 64 bits, siga os passos a seguir relacionados às Figuras 2.3 e 2.4.

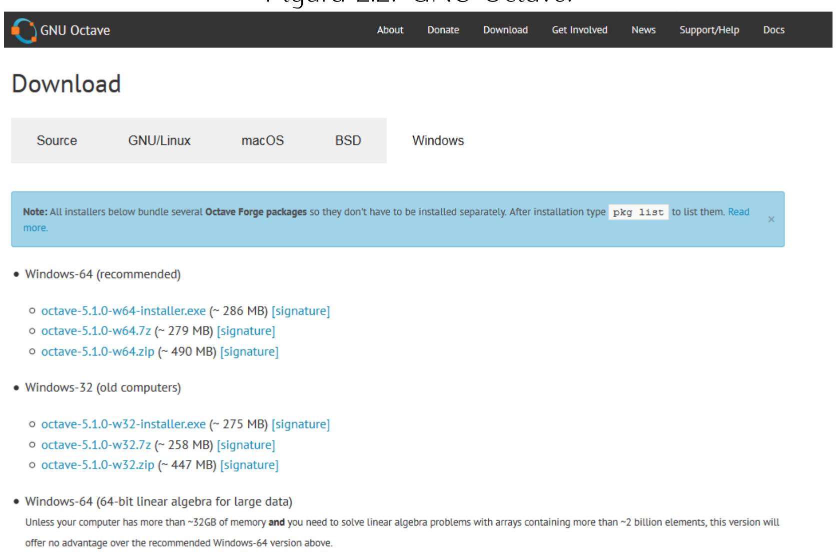
    (a) Em seu computador abra a pasta "Documentos" ou a pasta principal "Computador" (veja os termos equivalentes para estas pastas).

Figura 2.1: GNU Octave.



Fonte: (OCTAVE, 2020).

Figura 2.2: GNU Octave.



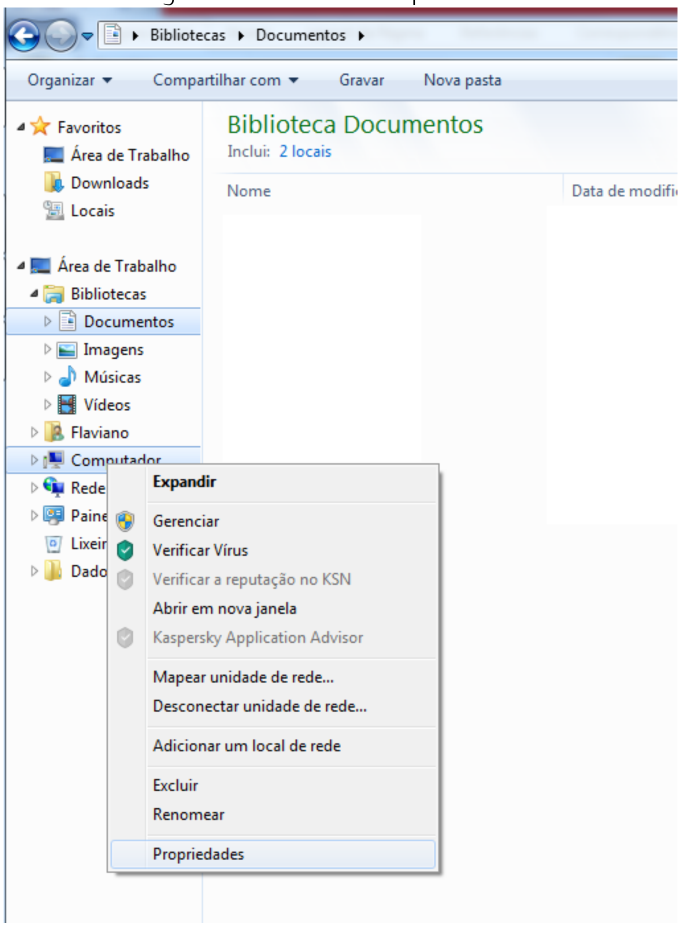
Fonte: (OCTAVE, 2020).

(b) No canto esquerdo em cima de "Computador" clique com o botão direito e vá em "Propriedades".

(c) Em seguida, verifique se está escrito 64 ou 32 bits e siga as instruções dos passos 1–4.

Observação 2.1. *As imagens nas Figuras 2.3 e 2.4 foram cortadas para reduzir o espaço desnecessário e serão diferentes entre os sitemaas Windows* 7, 8 *e* 10*, mas o processo em si não sofre alteração.*

Figura 2.3: Sistema Operacional.



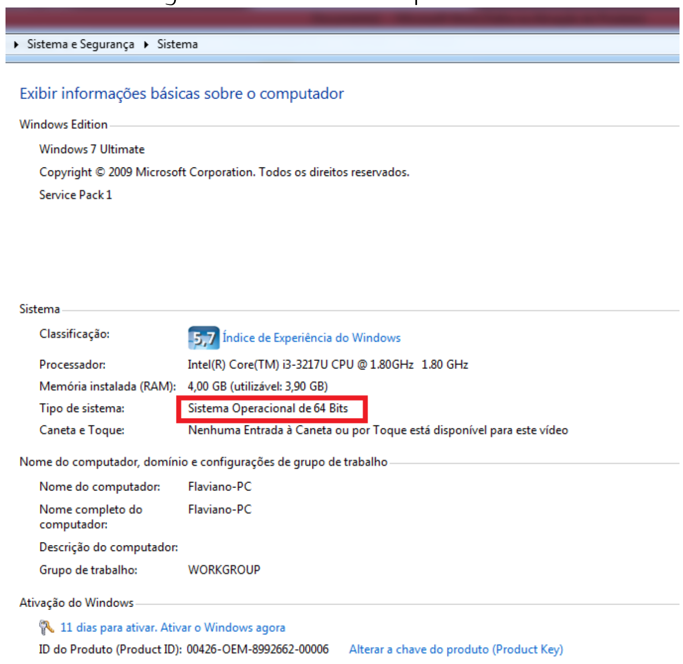
Fonte: Próprio autor.

2.2 Instalando o Octave no Linux

A instalação no Linux em geral depende da distribuição Linux utilizada, sendo apresentadas aqui três opções de instalação baseadas no Ubuntu. A primeira delas através do comando “apt install”, baseado em pacotes nos repositórios oficiais. As outras duas formas representam formas mais recentes de instalação com maior independência em relação a pacotes externos. Estes métodos também são aplicáveis para a maioria das outras distribuições. Nestes casos, deve-se seguir os links indicados.

1. Boa parte das distribuições Linux fornece o Octave na forma de pacotes alojados em seus repositórios oficiais. É o caso das principais distribuições baseadas em Debian, como Ubuntu. Neste caso, basta abrir o terminal e digitar

Figura 2.4: Sistema Operacional.



Fonte: Próprio autor.

o comando a seguir e pressionar enter (será exigida a senha de superusuário):

sudo apt install octave.

De forma alternativa, pode-se também acessar via ícones o aplicativo de instalação e procurar pelo software.

2. Nas versões mais recentes de diversas distribuições linux, pode-se também instalar via snap. No Ubuntu, a partir da versão 16.04 *LTS*, esta opção já vem habilitada. Em versões anteriores ou outras distribuições, pode-se habilitar o snap. Para isto, siga as instruções em <https://snapcraft.io/docs/installing-snapd>. Se esta opção já estiver habilitada, basta digitar:

sudo snap install octave.

3. Uma terceira forma de instalação consiste em utilizar flatpaks. Várias distribuições Linux já possuem suporte à esta ferramenta. Para maiores detalhes, acesse <https://flatpak.org/setup/>. A partir da versão 18.10, digite:

   $sudo\ apt\ install\ flatpak.$

   Você pode então instalar o plugin que permite que seu aplicativo de instalação trabalhe com flatpaks. Para maiores informações consulte <https://flatpak.org/setup/Ubuntu/>. Esta ferramenta não é utlizada aqui, pois pode-se também instalar via linha de comando no terminal. De qualquer forma, primeiro é necessário adicionar o repositório de aplicativos do flathub através do comando:

   $flatpak\ remote - add\ \ - - if - not - exists$
   $flathub\ https : //flathub.org/repo/flathub.flatpakrepo.$

   Todos os passos anteriores feitos, basta digitar

   $flatpak\ install\ flathub\ org.octave.Octave.$

   Para consultar mais aplicativos possíveis de serem instalados via flatpaks, visite <https://flathub.org/home>.

3. Tutorial das Funções

Este capítulo apresenta orientações para executar no Octave cada função implementada nos arquivos ".m" disponíveis no endereço <https://github.com/monicavaladao/Proae2020>, conforme apresentado no Capítulo 1.

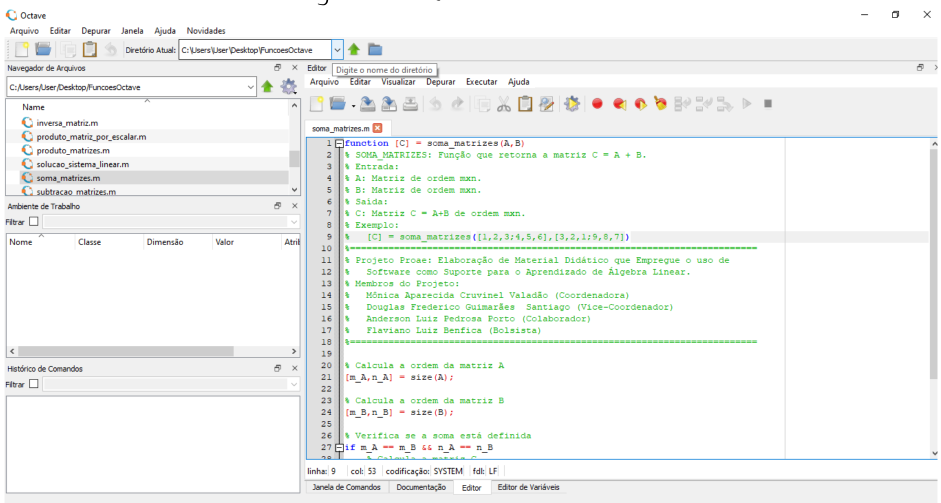
3.1 Instruções de Uso

Acesse o endereço <https://github.com/monicavaladao/Proae2020> e faça o download de toda a documentação disponível, a qual também pode ser solicitada via e-mail <monica.valadao@ufvjm.edu.br>. A pasta "FuncoesOctave" contém todos os arquivos ".m" mencionados no capítulo corrente. Para executar cada uma das funções no Octave é necessário que no campo "Diretório Atual" e "Navegador de Arquivos" esteja selecionada a pasta "FuncoesOctave", a qual não pode estar no formato "Zip". Em cada arquivo ".m" há um exemplo do que deve ser digitado na "Janela de Comandos". As Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 ilustram uma situção da janela do Octave em uso.

3.2 Conceitos Abordados

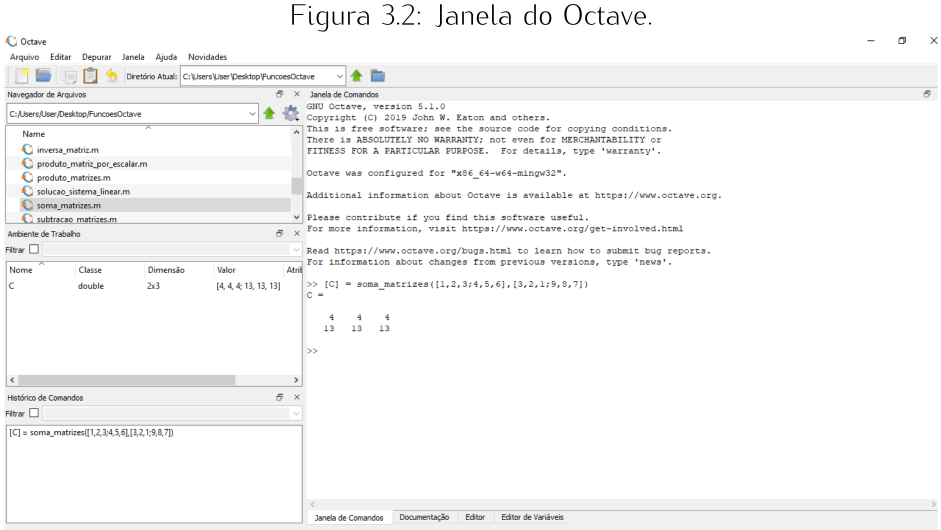
Esta seção identifica os conceitos de Álgebra Linear relacionados em cada arquivo ".m". São apresentados, em cada caso, o resultado retornado ao executar cada arquivo na "Janela de Comandos" do Octave. Para uma consulta relacionada aos conceitos de Álgebra Linear abordados neste capítulo sugere-se (BOLDRINI et al.,

Figura 3.1: Janela do Octave.



Fonte: Próprio autor, (OCTAVE, 2020).

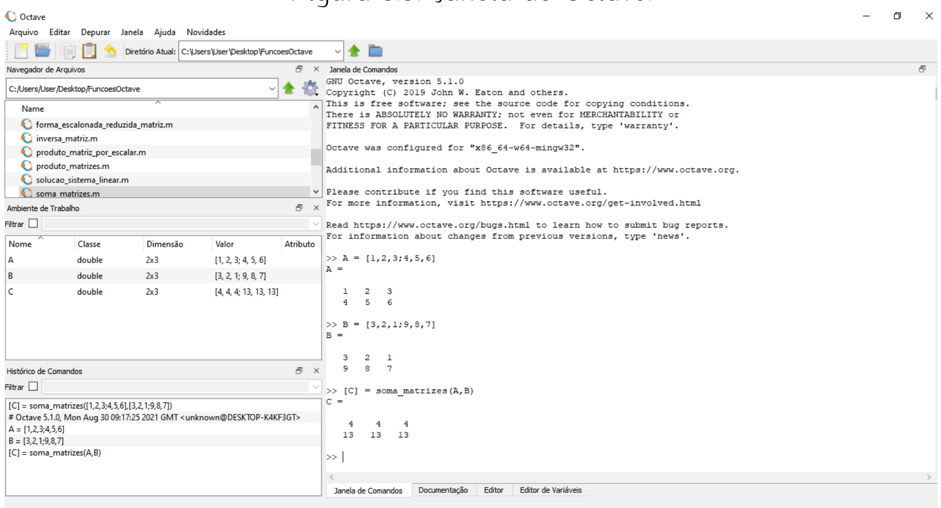
Figura 3.2: Janela do Octave.



Fonte: Próprio autor, (OCTAVE, 2020).

1986; KOLMAN; HILL, 2011; ANTON; RORRES, 2012; POOLE, 2004). No contexto de capítulo, considera-se somente matrizes definidas sobre $\mathbb{R}$.

Figura 3.3: Janela do Octave.



Fonte: Próprio autor, (OCTAVE, 2020).

3.2.1 Construção da Matriz A_1

O arquivo "construa_matriz.m" implementa a função

$$[\mathrm{A}] = \mathrm{construa\_matriz(regra\_ii, regra\_ij, m, n)}.$$

As entradas dessa função fornecem a definição para a construção de uma matriz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, onde
regra_ii : regra associada a condição dos índices iguais, isto é, para $i = j$;
regra_ij : regra associada a condição dos índices distintos, isto é, quando $i \neq j$.
Essas regras devem ser inseridas no formato de função anônima $@(i, j)()$.

Os Exemplos 3.1 e 3.2 ilustram a construção da matriz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{4\times 7}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i = j \\ i, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

Exemplo 3.1.
$>>$ [A] = construa_matriz($@(i, j)(i - j), @(i, j)(i), 4, 7$)
A =

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{matrix}$$

Exemplo 3.2.

```
>> regra_ii = @(i, j)(i − j)
 regra_ii   =
                 @(i, j)(i − j)

>> regra_ij = @(i, j)(i)
 regra_ij   =
                 @(i, j)(i)
>> m = 4
 m   =
          4

>> n = 7
 n   =
         7
>> [A] = construa_matriz(regra_ii, regra_ij, m, n)
 A   =
          0   1   1   1   1   1   1
          2   0   2   2   2   2   2
          3   3   0   3   3   3   3
          4   4   4   0   4   4   4
```

3.2.2 Construção da Matriz A_2

O arquivo "construa_matriz_caso_geral.m" implementa a função

[A] = construa_matriz_caso_geral(regra_ii, regra_ij, cond_ij, valor_cond, m, n).

As entradas dessa função fornecem a definição para a construção de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, onde
regra_ii : regra associada a condição dos índices cond_ij = valor_cond;
regra_ij : regra associada a condição dos índices cond_ij $\neq$ valor_cond.
Essas regras e condições devem ser inseridas no formato de função anônima $@(i, j)()$.

Os Exemplos 3.3 e 3.4 ilustram a construção da matriz $A = [a_{ij}]_{4\times 7}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 2.i, \text{ se } i + j = 4 \\ j + 2, \text{ se } i + j \neq 4 \end{cases} .$$

Exemplo 3.3.

```
>> [A] = construa_matriz_caso_geral(@(i, j)(2 ∗ i), @(i, j)(j + 2), @(i, j)(i + j), 4, 4, 7)
```

A =

3	4	2	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9
6	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9

Exemplo 3.4.
>> regra_ii = @(i, j)($2 * i$)
regra_ii =
@(i, j)($2 * i$)

>> regra_ij = @(i, j)($j + 2$)
regra_ij =
@(i, j)($j + 2$)

>> cond_ij = @(i, j)($i + j$)
cond_ij =
@(i, j)($i + j$)

>> valor_cond = 4
valor_cond =
4
>> m = 4
m =
4

>> n = 7
n =
7
>> [A] = construa_matriz_caso_geral(regra_ii, regra_ij, cond_ij, valor_cond, m, n)
A =

3	4	2	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9
6	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9

3.2.3 Soma de Matrizes

O arquivo “soma_matrizes.m” implementa a função

[C] = soma_matrizes(A, B),

cujas entradas são matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. A saída dessa função é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, dada por $C = A + B$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 3.5.
>> A = [1, 2, 3; 4, 5, 6]
A =

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

>> B = [3, 2, 1; 9, 8, 7]
B =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \end{matrix}$$

>> C = soma_matrizes(A, B)
C =

$$\begin{matrix} 4 & 4 & 4 \\ 13 & 13 & 13 \end{matrix}$$

3.2.4 Subtração de Matrizes

O arquivo "subtracao_matrizes.m" implementa a função

$$[C] = \text{subtracao\_matrizes}(A, B),$$

cujas entradas são matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. A saída dessa função é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, dada por $C = A - B$, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$..

Exemplo 3.6.
>> A = [1, 2, 3; 4, 5, 6]
A =

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

>> B = [3, 2, 1; 9, 8, 7]
B =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \end{matrix}$$

>> C = subtracao_matrizes(A, B)
C =

$$\begin{matrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & -3 & -1 \end{matrix}$$

3.2.5 Produto de Matrizes

O arquivo "produto_matrizes.m" implementa a função

$$[\mathrm{C}] = \mathrm{produto\_matrizes(A, B)},$$

cujas entradas são matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$. A saída dessa função é a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$, dada por $C = A \cdot B$, tal que $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, p$.

Exemplo 3.7.
>> A = [1, 2, 3; 4, 5, 6]
A =

1	2	3
4	5	6

>> B = [7, 7, 9, 10; 11, 12, 13, 14; 1, 2, 3, 4]
B =

7	7	9	10
11	12	13	14
1	2	3	4

>> [C] = produto_matrizes(A, B)
C =

32	37	44	50
89	100	119	134

3.2.6 Produto de Um Escalar por Uma Matriz

O arquivo "produto_matriz_por_escalar.m" implementa a função

$$[\mathrm{C}] = \mathrm{produto\_matriz\_por\_escalar(A, k)}.$$

Essa função recebe como entrada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e um esclar real k. A saída dessa função é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, dada por $C = k \cdot A$, tal que $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 3.8.
>> A = [1, 2, 3; 4, 5, 6]
A =

1	2	3
4	5	6

>> k = 4
k =
4
>> [C] = produto_matriz_por_escalar(A, k)
C =

4	8	12
16	20	24

3.2.7 Transposta de Uma Matriz

O arquivo "transposta_matriz.m" implementa a função

$$[C] = \text{transposta\_matriz}(A).$$

Essa função recebe como entrada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. A saída dessa função é a matriz $C = [c_{ji}]_{n\times m}$, identificada por $C = A^T$, tal que $c_{ji} = a_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 3.9.
>> A = [3, 5, 1; 2, 4, 7]
A =

3	5	1
2	4	7

>> [C] = transposta_matriz(A)
C =

3	2
5	4
1	7

3.2.8 Forma Escalonada Reduzida de Uma Matriz

O arquivo "forma_escalonada_reduzida_matriz.m" implementa a função

$$[E, pA, nA] = \text{forma\_escalonada\_reduzida\_matriz}(A),$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. As saídas dessa função são:
$E = [e_{ij}]_{m\times n}$: matriz na forma escalonada reduzida equivalente a A;
ou
E = [ ];
pA : posto de A;
nA : nulidade de A.

O uso desta função para encontrar a forma escalonada reduzida possui um caráter mais acadêmico, visto que o uso da função rref() pode acarretar erros numéricos no processamento. Dependendo da tolerância “tol” estabelecida para rref(), tem-se resultados diferentes. Devido a essa questão retorna-se E = [ ] no caso de ocorrer erros numéricos associados à rref().

Exemplo 3.10.
$>> A = [1, 2, -3, 0; 2, 4, -2, 2; 3, 6, -4, 3]$
A =

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{matrix}$$

$>> [E, pA, nA] =$ forma_escalonada_reduzida_matriz(A)
E =

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$pA = 3$
$nA = 1$

3.2.9 Matriz Ampliada e Forma Escalonada Reduzida de Uma Matriz

O arquivo “escalonada_reduzida_matriz_ampliada.m” implementa a função

$$[A, E] = \text{escalonada\_reduzida\_matriz\_ampliada}(C, B).$$

As entradas dessa função são uma matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ik}]_{m\times 1}$. As matrizes C e B, representam, respectivamente, a matriz dos coeficientes e matriz dos termos independentes associados a um sistema de equações lineares. As saídas dessa função são a matriz $A = [a_{il}]_{m\times(n+1)}$ e a matriz $E = [e_{il}]_{m\times(n+1)}$ que representam, respectivamente, a matriz ampliada e matriz na forma escalonada reduzida associadas ao sistema linear em questão. No caso de ocorrer erros numéricos ao utilizar rref() retorna-se E = [ ].

Exemplo 3.11.
$>> C = [3, 2, -5; 2, -4, -2; 1, -2, -3]$
C =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{matrix}$$

$>> B = [8; -4; -4]$

B =

$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}$$

>> [A, E] = escalonada_reduzida_matriz_ampliada(C, B)

A =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{matrix}$$

E =

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

3.2.10 Verificação de Uma Solução de Um Sistema Linear

O arquivo "verifica_solucao_sistema_linear.m" implementa a função

[R, B] = verifica_solucao_sistema_linear(C, B, X).

As entradas dessa função são matrizes da forma $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ik}]_{m\times 1}$ e $X = [x_{jk}]_{n\times 1}$. As matrizes C, B e X representam, respectivamente, a matriz dos coeficientes, a matriz dos termos independentes e a matriz solução, ou melhor, a matriz que deseja-se verificar se é ou não é uma solução do sistema linear associado C.X = B. As saídas dessa função são as matrizes R = C.X e B. Caso o resultado seja R = B, então a matriz X é uma solução do sistema linear representado por C.X = B.

Exemplo 3.12.

>> C = [3, 2, −5; 2, −4, −2; 1, −2, −3]

C =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{matrix}$$

>> B = [8; −4; −4]

B =

$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}$$

>> X = [−2; 3; 1]

X =

$$\begin{matrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

>> [R, B] = verifica_solucao_sistema_linear(C, B, X)

R =

$$\begin{matrix} -5 \\ -18 \\ -11 \end{matrix}$$

B =

$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}$$

Exemplo 3.13. >> C = [3, 2, −5; 2, −4, −2; 1, −2, −3]

C =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{matrix}$$

>> B = [8; −4; −4]

B =

$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}$$

>> X = [3; 2; 1]

X =

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

>> [R, B] = verifica_solucao_sistema_linear(C, B, X)

R =

$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}$$

B =

$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}$$

3.2.11 Solução de Um Sistema de Equações Lineares

O arquivo "solucao_sistema_linear.m" implementa a função

$$[pA, pC, A, S, E] = \text{solucao\_sistema\_linear}(C, B).$$

As entradas dessa função são uma matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ik}]_{m\times 1}$. As matrizes C e B, representam, respectivamente, a matriz dos coeficientes e a matriz dos termos independentes associados ao sistema de equações lineares $A = [C|B]$, onde A é a matriz ampliada do sistema em questão. As saídas dessa função são:
pA : posto da matriz ampliada;
pC : posto da matriz dos coeficientes;
A : matriz ampliada;
S : solução do sistema no caso de única solução;

> No caso de ocorrer sistema sem solução ou sistema com infinitas soluções retorna-se $S = []$;

E : matriz na forma escalonada reduzida equivalente a A.

> No caso de ocorrer erros numéricos ao utilizar rref() retorna-se $E = [\ ]$.

Exemplo 3.14.
$>> C = [3, 2, -5; 2, -4, -2; 4, -8, -4]$
C =
$$\begin{matrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -4 \end{matrix}$$
$>> B = [8; -4; -8]$
B =
$$\begin{matrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{matrix}$$
$>> [pA, pC, A, S, E] = \text{solucao\_sistema\_linear}(C, B)$
Sistema possui infinitas soluções!
pA =
$$2$$
pC =
$$2$$
A =
$$\begin{matrix} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 4 & -8 & -4 & -8 \end{matrix}$$

```
S =
     [ ]
E =
     1.0000        0   -1.5000   1.5000
          0   1.0000   -0.2500   1.7500
          0        0         0        0
```

Exemplo 3.15.

```
>> C = [3, 2, -5; 2, -4, -2; 4, -8, -4]
C =
     3   2   -5
     2  -4   -2
     4  -8   -4
>> B = [8; -4; -4]
B =
      8
     -4
     -4
>> [pA, pC, A, S, E] = solucao_sistema_linear(C, B)
Sistema nao possui solucão!
pA =
     3
pC =
     2
A =
     3   2   -5   8
     2  -4   -2  -4
     4  -8   -4  -4
S =
     [ ]
E =
     1.0000        0   -1.5000        0
          0   1.0000   -0.2500        0
          0        0         0   1.0000
```

Exemplo 3.16.

```
>> C = [3, 2, -5; 2, -4, -2; 1, -2, -3]
C =
     3   2   -5
     2  -4   -2
     1  -2   -3
```

```
>> B = [8; −4; −4]
 B   =
        8
       −4
       −4
>> [pA, pC, A, S, E] = solucao_sistema_linear(C, B)
Sistema possui única solução!
 pA   =
       3
 pC   =
       3
 A   =
       3    2   −5    8
       2   −4   −2   −4
       1   −2   −3   −4
 S   =
       3
       2
       1
 E   =
       1.0000        0         0    3.0000
            0   1.0000         0    2.0000
            0        0    1.0000    1.0000
```

3.2.12 Determinante de Uma Matriz

O arquivo "determinante_matriz.m" implementa a função

$$[\text{detA}] = \text{determinante\_matriz}(A),$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. A saída dessa função é uma constante real que denota o determinante da matriz A.

Exemplo 3.17.

```
>> A = [1, 2, 3; 4, 8, 7; 5, 2, 3]
 A   =
       1   2   3
       4   8   7
       5   2   3
>> [detA] = determinante_matriz(A)
 detA   =
         −40
```

Exemplo 3.18.
>> A = [1, 2, 3; 4, 8, 7]
A =

1 2 3
4 8 7

>> [detA] = determinante_matriz(A)
A matriz nao é quadrada!!!

Escolhendo Uma Linha Para Calcular o Determinante

O arquivo "determinante_matriz_escolhe_linha.m" implementa a função

$$[\text{detA}] = \text{determinante\_matriz\_escolhe\_linha}(A),$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. A saída dessa função é uma constante real que denota o determinante da matriz A. A estrutura apresentada mostra como usar o Octave para aplicar o Teorema de Laplace (ou desenvolvimento de Laplace) para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada. Nesse sentido, a linha escolhida é solicitada ao usuário durante a execução do código. Além disso, a função permite visualizar de forma detalhada as submatrizes e os cofatores associados ao processo de Laplace.

Exemplo 3.19.
>> A = [1, 2, 3; 4, 8, 7; 5, 2, 3]
A =

1 2 3
4 8 7
5 2 3

>> [detA] = determinante_matriz_escolhe_linha(A)
Matriz A:
A =

1 2 3
4 8 7
5 2 3

Número de linhas de A:
3
Número de colunas de A:
3
Escolha uma linha qualquer da matriz A: 2
==
Identifica cada submatriz e cada cofator

==
Submatriz A_{21}:
 2 3
 2 3
Determinante da submatriz A_{21}:
0
Cofator Cof_{21}:
−0
===============
Submatriz A_{22}:
 1 3
 5 3
Determinante da submatriz A_{22}:
−12
Cofator Cof_{22}:
−12
===============
Submatriz A_{23}:

 1 2
 5 2
Determinante da submatriz A_{23}:
−8
Cofator Cof_{23}:
8
===============
detA = −40

Escolhendo Uma Coluna Para Calcular o Determinante

O arquivo "determinante_matriz_escolhe_coluna.m" implementa a função

$$[\text{detA}] = \text{determinante\_matriz\_escolhe\_coluna}(A),$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. A saída dessa função é uma constante que denota o determinante da matriz A. A coluna escolhida é solicitada ao usuário durante a execução do código. Essa função permite visualizar de forma detalhada as submatrizes e os cofatores associados ao processo de Laplace. As informações retornadas por essa função são semelhantes ao que foi apresentado na Seção 3.2.12.

3.2.13 Matriz dos Cofatores

O arquivo “cofatores_matriz.m” implementa a função

$$[\text{CofA}] = \text{cofatores\_matriz(A)},$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. A saída dessa função é uma matriz de ordem $n \times n$ cujos elementos são os cofatores associados aos respectivos elementos da matriz A que se deseja encontrar os cofatores.

Exemplo 3.20.
>> A = [1, 2, 3; 4, 8, 7; 5, 2, 3]
A =
1 2 3
4 8 7
5 2 3
>> [CofA] = cofatores_matriz(A)
Matriz A:
1 2 3
4 8 7
5 2 3
Número de linhas de A:
3
Número de colunas de A:
3
===============
Submatriz A_{11}:
8 7
2 3
Determinante da submatriz A_{11}:
10
Cofator Cof_{11}:
10
===============
Submatriz A_{12}:
4 7
5 3
Determinante da submatriz A_{12}:
−23
Cofator Cof_{12}:
23
===============

Submatriz A_{13}:
 4 8
 5 2
Determinante da submatriz A_{13}:
-32
Cofator Cof_{13}:
-32
===============
Submatriz A_{21}:
 2 3
 2 3
Determinante da submatriz A_{21}:
0
Cofator Cof_{21}:
-0
===============
Submatriz A_{22}:
 1 3
 5 3
Determinante da submatriz A_{22}:
-12
Cofator Cof_{22}:
-12
===============
Submatriz A_{23}:
 1 2
 5 2
Determinante da submatriz A_{23}:
-8
Cofator Cof_{23}:
8
===============
Submatriz A_{31}:
 2 3
 8 7
Determinante da submatriz A_{31}:
-10
Cofator Cof_{31}:
-10
===============
Submatriz A_{32}:

1 3
4 7
Determinante da submatriz A_{32}:
-5
Cofator Cof_{32}:
5
==============
Submatriz A_{33}:
1 2
4 8
Determinante da submatriz A_{33}:
0
Cofator Cof_{33}:
0
==============
CofA =

$$\begin{matrix} 10 & 23 & -32 \\ -0 & -12 & 8 \\ -10 & 5 & 0 \end{matrix}$$

3.2.14 Matriz Adjunta Clássica

O arquivo "adjunta_matriz.m" implementa a função

$$[\text{AdjA}] = \text{adjunta\_matriz}(\text{A}),$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. A saída dessa função é uma matriz de ordem $n \times n$, a qual corresponde a transposta da matriz dos cofatores associada a matriz A. As informações retornadas por essa função são semelhantes ao que foi apresentado na Seção 3.2.13 com a etapa adicional de determinar a trasposta da matriz dos cofatores.

3.2.15 Matriz Inversa

O arquivo "inversa_matriz.m" implementa a função

$$[\text{detA}, \text{invA}] = \text{inversa\_matriz}(\text{A}),$$

cuja a entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. As saídas dessa função são:
detA: determinante da matriz A;
invA: matriz de ordem $n \times n$, caso a inversa de A exista;
invA: [ ] no caso em A não possui inversa.

Exemplo 3.21.
>> $A = [2, 3, -2; 1, 4, 8; 7, 5, 3]$
A =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{matrix}$$

>> [detA, invA] = inversa_matriz(A)
detA = 149
invA =

$$\begin{matrix} -0.187919 & -0.127517 & 0.214765 \\ 0.355705 & 0.134228 & -0.120805 \\ -0.154362 & 0.073826 & 0.033557 \end{matrix}$$

Exemplo 3.22.
>> $A = [2, 3, -2; 4, 6, -4; 7, 5, 3]$
A =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 7 & 5 & 3 \end{matrix}$$

>> [detA, invA] = inversa_matriz(A)
warning: matrix singular to machine precision, rcond = $6.97854e - 18$
warning: called from
 inversa_matriz at line 39 column 10

A matriz não possui inversa!!!
detA = $9.7700e - 15$
invA = [ ](0x0)

3.2.16 Polinômio Característico

O arquivo "coeficientes_polinomio_caracteristico.m" implementa a função

[c] = coeficientes_polinomio_caracteristico(A),

cuja entrada é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. A saída dessa função é um vetor linha $1 \times (n+1)$ com os coeficientes do polinômio característico associado a matriz A. As componentes deste vetor são compostas pelos coeficientes do polinômio característico da matriz A e ordenados de maneira decrescente, a partir do termo de maior grau para os termos de menor grau do polinômio. Para obter os coeficientes do polinômio característico considera-se o cálculo do determinante da matriz em (3.1) a seguir,

$$(A - \lambda.I_n) \tag{3.1}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n e λ é um escalar real chamado de autovalor de A. Para ficar coerente com a escrita de variáveis na linguagem Octave, tal escalar λ é identificado com a notação "autoval" ou "lambda" nas subseções a seguir que envolverem o conceito de autovalor.

Exemplo 3.23.

$>> A = [-3, 1, -1; -2, 5, -1; -6, 7, -8]$

$A \ =$

$$\begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -6 & 7 & -8 \end{matrix}$$

$>> [c] =$ coeficientes_polinomio_caracteristico(A)

$c \ =$

$$\begin{matrix} -1.0000 & -6.0000 & 28.0000 & 73.0000 \end{matrix}$$

3.2.17 Autovalores

O arquivo "autovalores_matriz.m" implementa a função

$$[\text{autoval}] = \text{autovalores\_matriz}(A).$$

A entrada dessa função é uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ cuja saída autoval é um vetor coluna $n \times 1$ com os autovalores de A.

Exemplo 3.24.

$>> A = [-3, 1, -1; -7, 5, -1; -6, 6, -2]$

$A \ =$

$$\begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{matrix}$$

$>> [\text{autoval}] =$ autovalores_matriz(A)

autoval $=$

$$\begin{matrix} 4.0000 \\ -2.0000 \\ -2.0000 \end{matrix}$$

3.2.18 Autovetores Associados a Um Autovalor

O arquivo "autovetores_matriz.m" implementa a função

$$[\text{M\_autvet}, \text{M\_autoval}] = \text{autovetores\_matriz}(A, \text{autoval}),$$

cujas entradas são uma matriz A $= [a_{ij}]_{n\times n}$ e um autovalor “autoval” de A. O uso dessa função para encontrar a forma geral dos autovetores associados ao autovalor “autoval” tem um caráter mais acadêmico. Essa estrutura permite ao discente perceber que dado um autovalor “autoval” de A, obtém-se a forma geral dos autovetores ao observar a forma escalonada reduzida do sistema

$$(\mathrm{A} - \mathrm{autoval}.\mathrm{I}_n).\mathrm{v} = \mathrm{o} \tag{3.2}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n e “o” é o vetor nulo $n \times 1$. Note que a matriz ampliada associada ao sistema em (3.2) é

$$\mathrm{M\_amp} = [\mathrm{A} - \mathrm{autoval}.\mathrm{I}_n|\mathrm{o}]. \tag{3.3}$$

Entretanto, com uso da função rref() podem ocorrer erros numéricos. Dependendo da tolerância “tol” estabelecida para rref(), tem-se resultados diferentes. Na prática, usa-se a função eig() para determinar autovalores e autovetores. Nesse sentido, no contexto desse material, tem-se que as saídas da função são da forma 1 ou 2 a seguir:

1. As saídas da função se não ocorrer erros numéricos em rref():

   M_autvet : matriz na forma escalonda reduzida equivalente a matriz ampliada em (3.3);

   M_autoval : autovalor de A.

2. Se ocorrer erros numéricos em rref(), a função retorna as informações:

   M_autvet : matriz com autovetores de A;

   M_autoval : matriz diagonal com os autovalores de A.

   A partir de M_autvet obtém-se a forma geral dos autovetores da matriz A associados ao autovalor autoval.

Exemplo 3.25.
$>> \mathrm{A} = [-3, 1, -1; -7, 5, -1; -6, 6, -2]$
A =

$$\begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{matrix}$$

$>> \mathrm{autoval} = -2$
$\mathrm{autoval} = -2$
$>> [\mathrm{M\_autvet}, \mathrm{M\_autoval}] = \mathrm{autovetores\_matriz}(\mathrm{A}, \mathrm{autoval})$

M_autvet =

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

M_autoval = −2

>> A = [1, 7, 3; 2, 9, 12; 5, 22, 7]
A =

$$\begin{matrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 12 \\ 5 & 22 & 7 \end{matrix}$$

>> autoval = 25.5548
autoval = 25.5548
>> [M_autvet, M_autoval] = autovetores_matriz(A, autoval)

Possível erro associado a tolerância de rref()!
Nesse caso, será usada a função eig()!

Assim, M_autvet é uma matriz de autovetores de A e M_autoval é uma matriz cuja diagonal contém os autovalores de A!

M_autvet =

$$\begin{matrix} -0.260977 & -0.973445 & 0.189104 \\ -0.587027 & 0.228061 & -0.581573 \\ -0.766349 & -0.019808 & 0.791210 \end{matrix}$$

M_autoval =

$$\begin{matrix} 25.55484 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.57893 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -7.97590 \end{matrix}$$

3.2.19 Verificação de Um Autovalor

O arquivo "[p] = verifica_autovalor_matriz.m" implementa a função

[p] = verifica_autovalor_matriz(A, lambda),

cujas entradas são uma matriz A = $[a_{ij}]_{n\times n}$ e um escalar lambda real. A saída dessa função é um escalar p, o qual representa o valor p(lambda) onde p(·) é o polinômio característico de A.

Exemplo 3.26.
>> A = [−3, 1, −1; −7, 5, −1; −6, 6, −2]

A =

$$\begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{matrix}$$

>> lambda = −2
lambda = −2
>> [p] = verifica_autovalor_matriz(A, lambda)
p = $-7.1054e-15$

3.2.20 Verificação de Um Autovetor

O arquivo "verifica_autovalor_autovetor_matriz.m" implementa a função

$$[\mathrm{O}] = \mathrm{verifica\_autovalor\_autovetor\_matriz}(\mathrm{A}, \mathrm{lambda}, \mathrm{v}),$$

cujas entradas são uma matriz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, um escalar lambda e um vetor $n \times 1$ identificado como "v". A saída dessa função é um vetor O de ordem $n \times 1$, o qual representa a forma geral da matriz resultante do produto

$$(\mathrm{A} - \mathrm{lambda}.\mathrm{I}_n).\mathrm{v}. \tag{3.4}$$

No caso em que lambda não é um autovalor de A ou "v" é um vetor nulo, então a saída da função é O = [ ]. Caso a saída da função "O" seja um vetor nulo, então o vetor "v" é um autovetor de A associado ao autovalor "lambda".

Exemplo 3.27.
>> A = [−3, 1, −1; −7, 5, −1; −6, 6, −2]
A =

$$\begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{matrix}$$

>> lambda = −2
lambda = −2
>> v = [−1; 0; 0]
v =

$$\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

>> [O] = verifica_autovalor_autovetor_matriz(A, lambda, v)
O =

$$\begin{matrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{matrix}$$

4. Atividades Usando o Octave

Este capítulo apresenta um conjunto de atividades que podem ser realizadas com Octave. Especificamente, usa-se o Octave para verificar a resolução associada a cada questão sugerida na Seção 4.2, conforme instruções de uso apresentadas nos Capítulos 2 e 3. Ao utilizar essas funções é importante ter atenção ao usar informações retornadas na "Janela de Comandos" do Octave. Use os comandos "clear all" e "clc" sempre que for necessário limpar informações da "Janela de Comandos".

4.1 Erros Numéricos

Em grande parte das aplicações, o conjunto numérico utilizado é o dos números reais $\mathbb{R}$. Este conjunto possui infinitos números, mas o computador pode armazenar apenas uma quantidade finita destes. Os números irracionais, por exemplo, são aqueles que não contém dízimas periódicas em sua escrita decimal, estes possuem infinitos dígitos não bem distribuídos em sua escrita, enquanto que os racionais são decimais periódicos. Um problema natural em computação é que a máquina não pode armazenar uma quantidade infinita destes dígitos decimais. Isto ocasiona, em geral, erros na representação dos números reais, por exemplo com o número π, pois um número que não pode ser representado de forma exata no computador será então aproximado por um outro. Tem-se então os erros de representação numérica. Em um computador, mesmo que inicialmente tenha-se boas representações numéricas para o conjunto dos números reais (representações com erros pequenos), os erros podem se propagar de forma que, ao final de uma série de operações, o resultado encontrado não se aproxima em nada do resultado original esperado. Uma discussão sobre erros pode ser encontrada em (RUGGIERO; LOPES, 1998; BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2008). Para minizar os erros, o Octave utiliza precisão dupla na representação de números reais. Isto faz com que o número tenha acurácia nos primeiros 15 dígitos. Por padrão o Octave mostra apenas alguns dígitos de um número. Para ver todos os dígitos representados, usa-se o comando a seguir

$>> format\ long$

e pressiona-se enter. Os números serão então mostrados com todos seus dígitos. Para retornar ao padrão anterior, basta digitar

$>> format\ short$

Um experimento interessante para ilustrar esta questão dos erros é tentar fazer a soma do número $0,1$ oito vezes. Um detalhe importante é que, no Octave, a notação $0,b$ numérica é escrita por $0.b$. Dessa forma, digite no Octave:

$>> 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1$

e pressione enter. Caso o Octave esteja mostrando os números no formato curto a resposta será:

$ans = 0.80000$.

Neste caso, a resposta está sendo mostrada com cinco casas decimais. Já houve um erro numérico que o Octave não está mostrando por conta de um arredondamento. Se fizer a mesma experiência mas no formato longo, a resposta será:

$ans = 7.999999999999999e - 01$.

O experimento anterior mostra que, mesmo para uma conta simples, já se observa um pequeno erro numérico associado.

4.2 Atividades Sugeridas

As atividades apresentadas nesta seção são baseadas em diferentes referências adotadas na disciplina de Álgebra Linear (BOLDRINI et al., 1986; KOLMAN; HILL, 2011; STEINBRUCH; WINTERLE, 1987; SANTOS, 2012; LIPSCHUTZ, 1972) do curso de Ciência e Tecnologia da UFVJM, campus de Diamantina-MG (FONSECA et al., 2020; ICT, 2020).

4.2.1 Atividade 1

Usando o Octave

- Use a função

  $$[\mathrm{A}] = \mathrm{construa\_matriz}(\mathrm{regra\_ii}, \mathrm{regra\_ij}, \mathrm{m}, \mathrm{n}),$$

  para verificar a resolução de cada item da Questão 4.1.

- Use a função

  $$[\mathrm{A}] = \mathrm{construa\_matriz\_caso\_geral}(\mathrm{regra\_ii}, \mathrm{regra\_ij}, \mathrm{cond\_ij}, \mathrm{valor\_cond}, \mathrm{m}, \mathrm{n}),$$

  para verificar a resolução de cada item da Questão 4.2.

- Use as funções

  $$[\mathrm{C}] = \mathrm{soma\_matrizes}(\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

  $$[\mathrm{C}] = \mathrm{produto\_matrizes}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

  e

  $$[\mathrm{C}] = \mathrm{transposta\_matriz}(\mathrm{A}),$$

  para verificar cada item da Questão 4.3.

- Use a função

  $$[\mathrm{C}] = \mathrm{produto\_matrizes}(\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

  para verificar a resolução das Questões 4.4 e 4.5.

Questão 4.1. *Construa as matrizes a seguir:*

(a) $A = [a_{ij}]_{4\times 7}$ *definida por* $a_{ij} = \begin{cases} 5i - 3j, \text{ se } i = j \\ (i-j)^2, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

(b) $B = [b_{jk}]_{7\times 9}$ *definida por* $b_{jk} = j - k$.

(c) $C = [c_{ij}]_{4\times 7}$ *definida por* $c_{ij} = \begin{cases} i^2, \text{ se } i = j \\ 2.i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

Questão 4.2. *Construa as matrizes a seguir:*

(a) $A = [a_{ij}]_{3\times 5}$ *definida por* $a_{ij} = \begin{cases} 2.i + 3.j, \text{ se } i + j = 4 \\ (i-j)^2, \text{ se } i + j \neq 4 \end{cases}$.

(b) $B = [b_{ij}]_{3\times 5}$ definida por $b_{ij} = \begin{cases} (i-j)^3, \text{ se } i.j = 2 \\ -3.j+1, \text{ se } i.j \neq 2 \end{cases}$.

(c) $C = [c_{ij}]_{3\times 5}$ definida por $c_{ij} = \begin{cases} -i+4.j, \text{ se } i-j = 1 \\ j-3, \text{ se } i-j \neq 1 \end{cases}$.

Questão 4.3. *Sejam as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 11 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 6 & -4 & 9 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. *Verifique que:*

(a) $(A+B)+C = A+(B+C)$.

(b) $(AB)D = A(BD)$.

(c) $(B+C)D = BD+CD$.

(d) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(e) $(AD)^T = D^T A^T$.

Questão 4.4. *Verifique se a matriz* $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é a inversa da matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Questão 4.5. *Verifique se a matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *é a inversa da matriz* $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4.2.2 Atividade 2

Usando o Octave

- Use a função

$$[\mathrm{E}, \mathrm{pA}, \mathrm{nA}] = \mathrm{forma\_escalonada\_reduzida\_matriz(A)},$$

para verificar a resolução de cada item da Questão 4.6.

Questão 4.6. *Determine o posto e a nulidade de cada matriz a seguir:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 11 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$

(c) $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 & 5 \\ 6 & -4 & 9 & 1 \\ 8 & -6 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$

(d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -4 & -2 \\ -6 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

4.2.3 Atividade 3

Usando o Octave

- Use a função

$$[\mathrm{R}, \mathrm{B}] = \mathrm{verifica\_solucao\_sistema\_linear(C, B, X)},$$

para verificar a resolução da Questão 4.7.

Questão 4.7. *Verifique se* $X = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ -2 \end{bmatrix}$ *é uma solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z &= 8 \\ 2x - 4y - 2z &= -4 \\ 4x - 8y - 4z &= -8 \end{cases}.$$

4.2.4 Atividade 4

Usando o Octave

- Use a função

$$[\mathrm{pA}, \mathrm{pC}, \mathrm{A}, \mathrm{S}, \mathrm{E}] = \mathrm{solucao\_sistema\_linear(C, B)},$$

para verificar a resolução das Questões 4.8 e 4.9.

Resolva as Questões 4.8 e 4.9 usando o método de Gauss-Jordan.

Questão 4.8. *Determine se cada sistema linear homogêneo a seguir tem solução não nula.*

(a) $\begin{cases} x - 2y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \\ 3x + 4y - 6z &= 0 \\ 3x - 11y + 12z &= 0 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} 2x - 4y + 7z + 4v &= 0 \\ 9x + 3y + 2z - 7v &= 0 \\ 5x + 2y - 3z + v &= 0 \\ 6x - 5y + 4z - 3v &= 0 \end{cases}$.

Questão 4.9. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x &+& 2y &-& 3z &=& 4 \\ x &+& 3y &+& z &=& 11 \\ 2x &+& 5y &-& 4z &=& 13 \\ 2x &+& 6y &+& 2z &=& 22 \end{cases}.$$

4.2.5 Atividade 5

Usando o Octave

- Use a Janela de Comandos do Octave para verificar a resolução das Questões 4.10 e 4.11. Antes disso, veja como exemplo a representação das operações elementares a seguir na Janela de Comandos.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_2 \to 3L_2 - 2L_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -19 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] L_3 \to 3L_3 - (-2)L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -19 \\ 0 & -2 & -19 & 16 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] L_3 \to (-7)L_3 - (-2)L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 141 & -150 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_4 \to (-7)L_4 - (-1)L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 141 & -150 \\ 0 & 0 & 18 & -19 \end{array}\right] L_4 \to 141L_4 - 18L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 141 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right]$$

```
>> A = [0, -1, -2, 0; 2, -1, -2, -1; -2, -2, -3, 0; 3, 2, -5, 8]
 A   =
          0   -1   -2    0
          2   -1   -2   -1
         -2   -2   -3    0
          3    2   -5    8
>> L1 = A(1, :)
 L1   =
          0   -1   -2    0
>> L4 = A(4, :)
 L4   =
          3   2   -5   8
>> A(1, :) = L4
 A   =
          3    2   -5    8
          2   -1   -2   -1
         -2   -2   -3    0
          3    2   -5    8
>> A(4, :) = L1
```

```
A =
      3    2   -5    8
      2   -1   -2   -1
     -2   -2   -3    0
      0   -1   -2    0
>> A(2,:) = 3*A(2,:) - 2*A(1,:)
A =
      3    2   -5    8
      0   -7    4  -19
     -2   -2   -3    0
      0   -1   -2    0
>> A(3,:) = 3*A(3,:) - (-2)*A(1,:)
A =
     3    2    -5     8
     0   -7     4   -19
     0   -2   -19    16
     0   -1    -2     0
>> A(3,:) = (-7)*A(3,:) - (-2)*A(2,:)
A =
     3    2    -5     8
     0   -7     4   -19
     0    0   141  -150
     0   -1    -2     0
>> A(4,:) = (-7)*A(4,:) - (-1)*A(2,:)
A =
     3    2    -5     8
     0   -7     4   -19
     0    0   141  -150
     0    0    18   -19
>> A(4,:) = 141*A(4,:) - 18*A(3,:)
A =
     3    2    -5     8
     0   -7     4   -19
     0    0   141  -150
     0    0     0    21
```

Resolva as Questões 4.10 e 4.11 usando o método de Gauss.

Questão 4.10. *Determine se cada sistema linear homogêneo a seguir tem solução não nula.*

$$
(a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+2z & = & 0 \\ 2x+y-2z & = & 0 \\ 3x+4y-6z & = & 0 \\ 3x-11y+12z & = & 0 \end{array}\right. .
$$

$$
(b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x-4y+7z+4v & = & 0 \\ 9x+3y+2z-7v & = & 0 \\ 5x+2y-3z+v & = & 0 \\ 6x-5y+4z-3v & = & 0 \end{array}\right. .
$$

Questão 4.11. *Resolva o sistema*

$$
\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ 2x & + & 6y & + & 2z & = & 22 \end{array}\right. .
$$

4.2.6 Atividade 6

Usando o Octave

- Use a função

  [detA] = determinante_matriz_escolhe_coluna(A),

  para verificar a resolução da Questão 4.12.

Questão 4.12. *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

4.2.7 Atividade 7

Usando o Octave

- Use a função

  [detA] = determinante_matriz_escolhe_linha(A),

  para verificar a resolução da Questão 4.13.

Questão 4.13. *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

4.2.8 Atividade 8

Usando o Octave

- Use as funções

$$[\text{CofA}] = \text{cofatores\_matriz(A)},$$

$$[\text{AdjA}] = \text{adjunta\_matriz(A)},$$

$$[\text{detA}] = \text{determinante\_matriz\_escolhe\_linha(A)}$$

  e

$$[\text{C}] = \text{produto\_matriz\_por\_escalar(A, k)},$$

  para verificar a resolução da Questão 4.14.

Questão 4.14. *Encontre a matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

4.2.9 Atividade 9

Usando o Octave

- Use a função

$$[\text{detA}, \text{invA}] = \text{inversa\_matriz(A)},$$

  para verificar a resolução da Questão 4.15.

Questão 4.15. *Encontre a matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

4.2.10 Atividade 10

Usando o Octave

- Use a função

$$[c] = \text{coeficientes\_polinomio\_caracteristico}(A),$$

para verificar a resolução da Questão 4.16.

Questão 4.16. *Encontre o polinômio característico de* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$

4.2.11 Atividade 11

Usando o Octave

- Use as funções

$$[c] = \text{coeficientes\_polinomio\_caracteristico}(A),$$

$$[\text{autoval}] = \text{autovalores\_matriz}(A)$$

e

$$[O] = \text{verifica\_autovalor\_autovetor\_matriz}(A, \text{lambda}, v),$$

para resolver a Questão 4.17.

Questão 4.17. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$

(a) Encontre o polinômio característico de A.

(b) Encontre os autovalores de A, *sabendo que* $\lambda = 9,9514$ *é uma raíz do polinômio característico de A.*

(c) Verifique se o vetor $v = [0.73254; 0.51783; 0.54120]$ *é um autovetor de* A *associado ao autovalor* lambda = autoval(1).

Para resolver o item (*c*) digite na Janela de Comandos os seguintes passos:
>> A = [−9, 3, −2; 7, 5, 3; 0, −4, 0]
>> [autoval] = autovalores_matriz(A)
>> v = [0.73254; 0.51783; 0.54120]
>> lambda = autoval(1)
>> [O] = verifica_autovalor_autovetor_matriz(A, lambda, v)

4.2.12 Atividade 12

Usando o Octave

- Use as funções
$$[\text{autoval}] = \text{autovalores\_matriz(A)}$$
e
$$[\text{M\_autvet}, \text{M\_autoval}] = \text{autovetores\_matriz(A, autoval)},$$
para verificar a resolução da Questão 4.18.

Questão 4.18. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre os autovalores de A, sabendo que $\lambda = 7$ é uma raíz do polinômio característico de A.

(b) Encontre os autovetores de A.

5. Considerações Finais

O projeto " Elaboração de Material Didático que Empregue o uso de Software como Suporte para o Aprendizado de Álgebra Linear" resultou no desenvolvimento de um material didático acessível à docentes e discentes que não possuem nenhum conhecimento prévio sobre o software Octave. Trata-se também de um instrumento pedagógico diversificado que pode complementar o ensino-aprendizado na disciplina de Álgebra Linear.

O uso deste recurso didático em sala de aula proporciona aos discentes o contato com uma ferramenta computacional, a qual permite explorar diferentes conceitos de Álgebra Linear de uma forma mais interessante. O presente texto representa também uma oportunidade do docente ter uma experiência em adotar uma linguagem diferenciada, a qual pode tornar esta disciplina mais atrativa para os discentes dos cursos Ciência e Tecnologia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outros. Além disso, as diferentes atividades apresentadas no material proporcionam uma maior flexibilidade com relação às avaliações a serem aplicadas na disciplina.

Este instrumento didático é um primeiro passo dos docentes envolvidos neste projeto em direção ao uso de recursos computacionais no ensino de Álgebra Linear. Neste sentido, esta abordagem diferente da disciplina pode estimular o interesse dos discentes em relação à conteúdos voltados para práticas de programação em diferentes áreas. A partir da experiência com este projeto, espera-se em um futuro próximo desenvolver um outro material didático que explore a resolução de problemas práticos por meio do Octave no contexto de Álgebra Linear.

Referências Bibliográficas

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Tradução de Clauss Ivo Doering.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1986.

BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

CTAN. **Comprehensive TEX Archive Network**: doclicense – support for putting documents under a license. 2021. Disponível em: <https://ctan.org/pkg/doclicense>. Acesso em: 13 dez. 2021.

EATON, J. W. et al. **GNU Octave: A high-level interactive language for numerical computations**. Version 5.2.0. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://octave.org/octave.pdf>.

FONSECA, A. R. et al. **Instituto de Ciência e Tecnologia**: Projeto pedagógico do curso de graduação em ciência e tecnologia. 2020. Disponível em: <https://www.ict.ufvjm.edu.br/>. Acesso em: 17 set. 2021.

ICT. **Instituto de Ciência e Tecnologia**: Ciência e tecnologia. 2020. Disponível em: <https://www.ict.ufvjm.edu.br>. Acesso em: 17 set. 2021.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. Tradução de Alessandra Bosquilha.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1972. (Coleção Schaum). Tradução de Roberto Ribeiro Baldino.

LOSACADEMYCOS. **Blog de matemáticas**: Fancy book – template. 2020. Disponível em: <http://losacademycos.com/design-academycos10-1/fancybook-template/>. Acesso em: 17 set. 2021.

OCTAVE, G. **Scientific Programming Language**. 2020. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/octave/>. Acesso em: 11 mai. 2020.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson Learning, 2004. Tradução técnica de Martha Salermo Monteiro (coord). [et al].

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. D. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1998.

SANTOS, R. J. **Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1987.

UFVJM. **Proae**: Programa de apoio ao ensino de graduação. 2020. Disponível em: <http://www.ufvjm.edu.br/prograd/proae.html>. Acesso em: 12 mai. 2020.