UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Nelúcio Martins de Oliveira

EXPONENCIAL, MATRIZES: UMA REFLEXÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Teófilo Otoni - MG
2019

Nelúcio Martins de Oliveira

EXPONENCIAL, MATRIZES:
UMA REFLEXÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - STRICTO SENSU, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título MAGISTER SCIENTIAE EM MATEMÁTICA.

Orientador: Elson Leal de Moura

Teófilo Otoni - MG
2019

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

O482e
2019

Oliveira, Nelucio Martins de.
Exponencial, matrizes: uma reflexão para o ensino médio. / Nelucio Martins de Oliveira. Teófilo Otoni, 2019.
97 p. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Elson Leal de Moura.

1. Função exponencial. 2. Matrizes. 3. Livros didáticos. 4. contextualizações. 5. Exponencial de matrizes. I. Título.

CDD: 510

NELUCIO MARTINS DE OLIVEIRA

EXPONENCIAL, MATRIZES: UMA REFLEXÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MAGISTER SCIENTIAE EM MATEMÁTICA

Orientador (a): Prof. Dr. Elson Leal De Moura

Data da aprovação : 31/10/2018

Elson Leal de Moura

Prof.Dr. ELSON LEAL DE MOURA - UFVJM

Mauro Lúcio Franco

Prof.Dr. MAURO LUCIO FRANCO - UFVJM

Wederson M. Alves

Prof.Dr. WEDERSON MARCOS ALVES - UFVJM

TEÓFILO OTONI

" Não há ramo na Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir ser aplicado aos fenômenos do mundo real."
Nicolai Lobachevsky

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida, por me capacitar a cada dia, especialmente na construção deste trabalho e por ser presença constante em minha vida.

Ao amigo, professor, mestre e orientador, Dr.Elson de Moura Leal, pela parceria e companheirismo. As orientações, conversas e reflexão conjunta foram valiosos para concretização deste trabalho.

À minha mãe Luzia Martins de Oliveira, meu irmão Lucinel Martins de Oliveira e minha cunhada Izamara Soares de Freitas Martins que, apesar de todas as dificuldades, não mediram esforços para me ajudar e apoiar em todos momentos.

Ao meu Pai (*in memoriam*), que hoje se alegraria mais do que eu com essa conquista. A lembrança dele me motiva a cada dia mais a prosseguir.

À minha namorada, noiva e futura esposa, Phernanda Kelem Santos de Oliveira, pelo apoio incondicional, paciência e dedicação durante esses dois anos de luta.

Aos colegas de curso que, por muitas vezes, tornaram mais suave a caminhada, e sem os quais não seria possível chegar ate aqui.

Agradeço aos professores participantes da banca examinadora que dividiram comigo este momento tão importante e esperado: Prof. Dr. Mauro Lucio Franco e Prof. Dr. Wederson Marcos Alves.

A todos os professores do Programa PROFMAT que tanto contribuíram para ter chegado até aqui.

À coordenação do Programa PROFMAT, por todo profissionalismo dedicado.

Aos colegas da Escola Estadual José Severino, em especial ao Mestre, Professor e amigo, Antonio Carlos Mendes e a Diretora Leila Moreira Rodrigues, pelo apoio e incentivo em todos os momentos dessa caminhada.

Aos colegas da Escola Estadual Professora Ondina Pinto de Almeida, em especial ao diretor Weverton Moreira da Cunha, pela confiança depositada e por toda compreensão demonstrada durante o período de duração do curso.

Aos membros da Igreja Batista do Calvário, pelo constante incentivo,orações e torcida para a conclusão bem sucedida.

A todos os profissionais, com os quais tive a oportunidade de trabalhar, e ,aos amigos e conhecidos que sempre me desejaram sucesso nesta empreitada.

A todas as pessoas que fazem parte do meu convívio diário pela paciência e compreensão a mim dispensada, especialmente nestes últimos dois anos.

A todos que torceram e torcem pelo meu sucesso e pela minha felicidade incondicionalmente.

Resumo

Diante de suas diversas atribuições, um desafio atual do professor de Matemática é manter o educando interessado no conteúdo lecionado. Desmistificar a disciplina de matemática é um caminho confiável para se seguir. Com intuito de auxiliar o professor nessa tarefa árdua que é o ensinar, essa pesquisa abordará a importância do uso adequado das contextualizações tendo como base os tópicos da função exponencial e matrizes. Apresentando uma contribuição para o ensino aprendizagem das funções exponenciais e matrizes, explorando como ferramenta auxiliar didática as contextualizações encontradas em livros didáticos de matemática do ensino médio. Afim de favorecer a compreensão dos estudantes na abordagem dos temas, através de resolução problemas em boas contextualizações e enfatizando a relação existente entre função exponencial e matrizes. Para tal, foram consultadas fontes pertinentes aos questionamentos levantados, como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino fundamental e Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, o Programa Nacional do Livro Didático e a Proposta Curricular ? Currículo Comum do Estado de Minas Gerais e, ainda, pesquisa através de busca eletrônica que proporcionou a análise de muitos trabalhos publicados que versam sobre o assunto. Após a pesquisa bibliográfica foram analisadas as contextualizações encontradas nos livros didáticos e agrupadas como boas contextualizações e contextualizações adequadas conforme conceitos pré-definidos. Por fim demonstra uma conexão entre a função exponencial e matrizes, conhecida como exponencial de matrizes e uma aplicação.

Palavras-Chaves: Contextualizações. Exponencial. Matrizes. Livros Didáticos. Exponencial de matrizes.

Abstract

In the face of its diverse attributions, a current challenge of the Mathematics teacher is to keep the student interested in the content taught. Demystifying math discipline is a reliable path to follow. In order to assist the teacher in this arduous task of teaching, this research will address the importance of the proper use of contextualizations based on the topics of exponential function and matrices. Presenting a contribution to teaching learning exponential functions and matrices, exploring as a didactic auxiliary tool the contextualizations found in high school mathematics textbooks. In order to favor the understanding of the students in the approach of the themes, through solving problems in good contextualizations and emphasizing the relation between exponential function and matrices. To this end, sources pertinent to the questions raised were consulted, such as, for example, the National Curricular Parameters for Elementary and Secondary Education, the National Curriculum Guidelines for Basic Education, the National Textbook Program and the Curricular Proposal - State of Minas Gerais and also a search through electronic search that provided the analysis of many published works that deal with the subject. After the bibliographical research the contextualizations found in textbooks were analyzed and grouped as good contextualizations and contextualizations according to pre-defined concepts. Finally it demonstrates a connection between the exponential function and matrices, known as exponential matrices and an application.

Key-Words: Contextualizations. Exponential. Matrices. Didactic books. Exponential of matrices.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

Essa pesquisa resulta de alguns questionamentos com que me deparei ao longo da minha vida profissional como professor da disciplina de matemática na educação básica, uma tarefa não fácil de realizar diante de uma sociedade cada vez mais informatizada e pouco preocupada com o conhecimento matemático.

Diante de suas diversas atribuições, um desafio atual do professor de Matemática é manter o educando interessado no conteúdo lecionado. Durante as aulas é comum ouvir frases como "para que vamos apreender isso? Vai servir para alguma coisa? No que vou usar?". Observando que esse tipo de questionamento esta cada dia mais frequente no cotidiano escolar, não haveria a necessidade de rever a metodologia/ensino empregado nas aulas de matemática?

Segundo PCNs (2002), "A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama".

O educando esta cada dia mais distante ou disperso nas aulas, alguns irão relacionar esse dispersamento com a defasagem do conhecimento e outros na forma do ensino. Além do mais a matemática se tornou na mente de muitos um bicho de sete cabeças, a disciplina para poucos o que também contribui para a não aprendizagem do educando. Desmistificar a disciplina de matemática para o educando é um grande desafio, fazer-lo ter prazer em estuda-la, demonstrar a ele a necessidade de aprender é extramente complexo.

Como fazer para que o educando tenha prazer em estudar matemática? Dando sentindo, aplicabilidade, contextualizando o conteúdo, ensinando os porquês que tanto os intriga, como a própria matemática deve ser. Observe que cada teorema, fórmula, axiomas e outros, seriam uma forma de modelar ou contextualizar situações que aparecem no cotidiano.

A contextualização é uma ferramenta útil para o professor do ensino médio, pois sua utilização dá o sentido e o significado tão desejado à aprendizagem, além de ser um dos critérios centrais do ensino matemática.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (PCNs, 2002, p.43)

A contextualização é algo importante e deve esta presente no dia a dia escolar.

> Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal,como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia antiga? Ou a aquisição da numeração indo arábica como florescimento do mercantilismo europeu nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado. (D'AMBROSIO, 1996, p.114)

A contextualização é uma ferramenta útil pois possibilita ao educando entender o sentindo do conhecimento repassado durante as aulas.

> A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas, o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar"o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p. 83)

Segundo Brasil (2006) é no ato de contextualizar/descontextualizar que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania.

Possibilitando de tal forma que o educando obtenha o desejo ou ate mesmo afeto pelo o ensino, baseando-se em contextualizações e aplicações que tragam a vinculação entre o conteúdo matemático e a vida real.

Ora, segundo os PCNs (2002), as finalidades do ensino de matemática no nível médio indicam como alguns dos seus objetivos levar o aluno a:

- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

A contextualização de um componente curricular na matemática deve sempre ser pautada nos três componentes básicos: Conceituação, manipulação e aplicação.

Segundo Lima et al. (2012), a conceitualização compreende vários aspectos, entre os quais destacou os seguintes:

- A formulação correta e objetiva das definições matemáticas;
- O emprego bem dosado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que se supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese);
- O entendimento e a percepção de que algumas noções e certas proposições podem 1ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos.

A manipulação é sem dúvida um componente muito importante para matemática visto que o domínio desta, possibilita uma maior compreensão do assunto abordado, facilitando a aplicação do mesmo em boa contextualização. "Para analisar corretamente o papel da manipulação, o critíco deve policiar-se atentamente para não incorrer no erro de menospreza - la. Durante séculos, e ainda hoje, a manipulação quase que monopolizou o ensino da matemática."(LIMA, 2007, p.182)

Já aplicações, são problemas bem contextualizados que não trazem fórmulas e sim situações onde o educando de posse dos dados apresentados, consegue modelar a resolução do problema de acordo com seu conhecimento já adquirido.

> As aplicações são empregos da noções e teorias da matemática para obter resultados, conclu-ções e previções em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA,1992 p. 2)

Apesar da contextualização ser uma ferramenta útil, deve-se ter uma olhar crítico sobre as contextualizações que estão sendo utilizadas em sala de aula, afim de que não resultem em algo contrário a programado.

> A contextualização pode ser feita por meio da resolução de problemas, mas aqui é preciso estar atento aos problemas "fechados", porque esses pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades. Nesse tipo de problema, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático. O uso exclusivo desse tipo de problema consegue mascarar a efetiva aprendizagem, pois o aluno, ao antecipar o conteúdo que está sendo trabalhado, procede de forma um tanto mecânica na resolução do problema. (BRASIL, 2006, p. 83)

Portanto, com intuito de auxiliar o professor na escolha das contextualizações que serão utilizadas em suas aulas, essa pesquisa terá como um princípio norteador analisar as contextualizações e aplicações que são encontradas nos exercícios dos livros didáticos que integram o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) oferecidos nos últimos anos para as escolas estaduais do leste de Minas Gerais, microrregião de Governador Valadares.

Para a pesquisa funcionar de maneira mais clara serão analisadas as contextualizações vinculadas aos temas; função exponencial e matrizes. Aparentemente são ferramentas disjuntas , mas que possibilitam uma enorme contextualização da realidade, tais como, crescimento populacional, a meia vida de uma substancia, a medida da pressão atmosférica, o cálculo do montante do juros composto, resfriamento do corpo, decodificar e codificar criptografia, probabilidade, cadeias de Markov e outros. Motivos pelo quais levaram a escolha desses temas.

Quanto a escolha do tema matrizes, vale ressaltar que o GERAIS (2014) não a relaciona mais como conteúdo básico para o ensino médio, o que não atrapalha a escolha do tema, visto que se faz necessário a utilização de seus conceitos nas disciplinas de sistema de equações lineares e geometria analítica que fazem parte do conteúdo programado para o ensino médio.

Para situar o tema central desse trabalho, função exponencial e matrizes uma reflexão: para o ensino médio, no contexto dessa pesquisa, destaca-se alguns dos questionamentos que a fomentaram, e vale destacar que a busca pelas respostas colaborou subsidiariamente para o amadurecimento das ideias que aqui ganharam forma. Dentre outras foram levantadas as questõess:

- Como é a proposta para o ensino dos tópicos da função exponencial e matrizes nos livros didáticos?
- Os livros didáticos estabelecem alguma relação entre eles ?
- Há exercícios contextualizados nos capítulos destinados aos tópicos funções exponenciais e matrizes ?
- As contextualizações posteriormente encontradas são bons exemplos para sala de aula ?
- É possível contribuir para o ensino aprendizagem da Função Exponencial e Matrizes ?

Objetivo Geral

Apresentar uma contribuição para o ensino aprendizagem das funções exponenciais e matrizes, explorando como ferramenta auxiliar didática as contextualizações encontradas em livros didáticos de matemática do ensino médio.

Objetivos Específicos

- Enfatizar a relação existente entre função exponencial e matrizes.
- Analisar a abordagem proposta nos livros didáticos utilizados atualmente nas escolas públicas.
- Favorecer a compreensão dos estudantes na abordagem dos temas; função exponencial e matrizes, através de resolução problemas em boas contextualizações.
- Analisar as contextualizações encontradas nos exercícios propostos nos livros didáticos nos tópicos de função exponencial e matrizes.

Metodologia aplicada

Na busca por respostas aos questionamentos apresentados, serão analisados oito livros didáticos que integram o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) oferecidos nos últimos anos para as escolas estaduais do leste de Minas Gerais, microrregião de Governador Valadares, ou seja, quatro coleções contendo volume 1 e 2. Serão analisados com maior ênfase as contextualizações que envolvam aplicação encontradas nos exercícios dos capítulos referentes a função exponencial e matrizes de cada coleção. As contextualizações serão separadas em contextualizações adequadas ou boas contextualizações e contextualizações inadequadas.

Boas contextualizações serão aquelas que envolvam situações verossímeis que tenham ligação com o mundo real e contextualizações inadequadas quando as mesmas forem falsas, artificiais ou que contenha dados incoerentes com a realidade. Afim de proporcionar o leitor uma visão crítica sobre as contextualizações a serem usadas em sua sala de aula.

Também foram consultadas outras fontes pertinentes aos questionamentos levantados, como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino fundamental e Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, o Programa Nacional do Livro Didático e a Proposta Curricular - Currículo Comum do Estado de Minas Gerais e, ainda, pesquisa através de busca eletrônica que proporcionou a análise de muitos trabalhos publicados que versam sobre o assunto.

Capítulo

1

CONCEITUAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial é um dos modelos matemáticos mais utilizados para resolver situações problemas tais como: decaimento radioativo, crescimento populacional, crescimento de bactérias em uma colônia e outros. Através da função exponencial podemos correlacionar a matemática com outras ciências como Química, Biologia, Física, Engenharia, Astronomia, Economia, Geografia, entre outras.

Em razão dessas propriedades, a função exponencial é considerada uma importante ferramenta da matemática, abrangendo diversas situações e contribuindo de forma satisfatória na obtenção de resultados que exigem uma análise quantitativa e qualitativa.

Com o objetivo de colaborar com a diversificação do conhecimento sobre a função exponencial e devido a sua importância na matemática e diversas áreas, iremos a seguir caracterizar-la, partindo dos conceitos básicos de potências e de algumas propriedades que ao nosso ver são importantes para a construção do conhecimento do aluno sobre as exponenciais.

O conteúdo deste capítulo foi baseado nas seguinte referências: Dante (2016a); Degenszajn et al. (2011); Giovanni et al. (1994); Gelson Iezzi (2016a); Iezzi et al. (2004); Lima et al. (2012); Lima (2013).

Inicialmente, considere a um número real. A potência a^n, para todo n natural, sendo a base e n o expoente, definida como produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, temos $a^1 = a$ e se $n > 1$, $a^n = a \cdot a^{n-1}$, por definição. Iremos demonstrar algumas propriedades fundamentais relacionadas à potência.

Afirmação 1.0.1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *tem-se* $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Afirmação 1.0.2. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$ *temos*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Afirmação 1.0.3. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$ *tem-se* $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ vezes} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ vezes}} = a^{m \cdot n}.$$

Afirmação 1.0.4. *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.*

Demonstração:

$$(a \cdot b)^n = \overbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}^{n\ vezes} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ vezes} = a^n \cdot b^n.$$

No dia a dia escolar podemos deparar com a uma serie de perguntas, tais como; "professor qual é o valor de a^0?", ou ainda, "Como podemos encontrar o valor a^{-n} ?". Podemos responder essas perguntas usando as propriedades citadas anteriormente, como veremos a seguir.

Primeiramente, considere $m = 0$ e $n = 1$ e $a \in \mathbb{R}^*$, utilizando a afirmação 1.0.2 teremos,

$$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a = a,$$

portanto, $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$. Observamos ainda que, utilizando a afirmação 1.0.2, podemos determinar o valor possível de a^{-n}, simplesmente considerando $m = -n$, assim por definição teremos,

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, ou seja, $a^{-n} = (a^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^n}$.

Considere agora $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$, ou seja, $r = \dfrac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, e utilizando a afirmação 1.0.3 segue que

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{n\ vezes} = a^{\overbrace{r+r+\ldots+r}^{n\ vezes}} = a^{r \cdot n} = a^m,$$

Portanto, a^r é o numero real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Assim,

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Enunciaremos o lema a seguir com a finalidade de usarmos em demostrações posteriores.

Lema 1.1. *(Desigualdade de Bernoulli) Para todo número real $x > -1$ e todo n natural tem-se $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Demonstração: Iremos demonstrar por indução em n. Seja $P(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$. Como $P(1)$ é $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$, $P(1)$ é verdadeira.

Suponhamos que $P(n)$ para $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ verdadeira. Para demonstrar a veracidade de $P(n+1)$, multiplicaremos ambos os lados da desigualdade por $1+x$ (isto é permitido, visto que $1+x > 0$), obtendo

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2. \tag{1.1}$$

Para terminamos a demostração basta mostrar que $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. Neste caso, observamos que $nx^2 \geq 0$, o que mostra que $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. Assim, mostramos que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x,$$

ou seja $P(n)$ implica em $P(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, pelo principio da indução finita, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para todo n natural e todo $x > -1$.

□

Afirmação 1.0.5. *Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, então a sequencia $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots)$, com $n \in \mathbb{N}$, é crescente e ilimitada superiormente: nenhum número real c, por maior que seja, pode ser superior a todas as potências a^n.*

Demonstração: Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros dessa igualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$, ou seja, a sequencia é crescente. Para demostrarmos que a sequencia é ilimitada superiormente devemos mostrar que é possível encontrar arbitrariamente $c \in \mathbb{R}$ tal que $a^n > c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para tal, escrevemos $a = 1 + d, d > 0$. Utilizando a desigualdade de Bernoulli, temos

$$\begin{array}{lcl} (1+x)^n & \geq & 1 + nx \\ a^n & > & 1 + nd \end{array}.$$

Logo, se $n > \dfrac{c-1}{d} \in \mathbb{N}$, teremos $1 + nd > c$, ou seja, $a^n > c$.

□

Afirmação 1.0.6. *Se $0 < a < 1$, então a sequencia $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots)$, com $n \in \mathbb{N}$ é decrescente e limitada inferiormente.*

Demonstração: Se $0 < a < 1$, então multiplicando ambos os membros dessa igualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} < a^n$, ou seja, a sequencia é decrescente. Para demostramos que a sequencia e limitada inferiormente devemos mostrar que dado um $c > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < a^{n_0} < c$, para todo $n \geq n_0$. Para isso seja $b = \dfrac{1}{a}$. Então $b > 1$. Assim, pela afirmação 1.0.5 temos b^n ilimitada superiormente e, portanto, vai existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b^{n_0} > \dfrac{1}{c}$, ou seja, $\dfrac{1}{a^{n_0}} > \dfrac{1}{c}$, donde concluímos que $a^{n_0} < c$.

□

Iremos demonstrar o Lema 1.2 por completude de informação, o qual pode ser encontrado no livro Lima (2013).

Lema 1.2. *Fixando o número real positivo $a \neq 1$ em $\mathbb{R}^+$, existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração: Dados $0 < \alpha < \beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}+$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores que 1, o caso a e α menores que 1, pode ser feita de maneira análoga . Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Disto segue que

$$
\begin{array}{rcccc}
 & (1)^{\frac{1}{n}} & < & a^{\frac{1}{n}} & < \left[\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow & 1 & < & a^{\frac{1}{n}} & < 1+\dfrac{\beta-\alpha}{a^M} \\
\Rightarrow & 1-1 & < & a^{\frac{1}{n}}-1 & < 1+\dfrac{\beta-\alpha}{a^M}-1 \\
\Rightarrow & 0 & < & a^{\frac{1}{n}}-1 & < \dfrac{\beta-\alpha}{a^M} \\
\Rightarrow & a^M\cdot 0 & < & a^M\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) & < a^M\left(\dfrac{\beta-\alpha}{a^M}\right),
\end{array}
$$

Assim,

$$\Rightarrow 0 \quad < \quad a^M\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) \quad < \quad \beta-\alpha. \tag{1.2}$$

Logo, como $r=\dfrac{m}{n}$ com $m\in\mathbb{Z}$ e $n\in\mathbb{N}^*$, tem-se

$$\frac{m}{n}\leq M,$$

utilizando a desigualdade 1.2 substituindo M por $\dfrac{m}{n}$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad < \quad a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}}-1) \quad < \quad \beta-\alpha, \tag{1.3}$$

aplicando a propriedade distributiva na desigualdade 1.3

$$\Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta-\alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0=1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n},}, ..., a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta-\alpha$ do intervalo $[\alpha,\beta]$. Como $[\alpha,\beta]\subset[1,a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha,\beta]$.

□

1.1 A função exponencial

Nessa seção iremos caracterizar a função exponencial, uma ferramenta importante para o estudo de diversas áreas como foi citado anteriormente.

Inicialmente, considere a um número real positivo, que vamos supor que sempre é diferente de 1. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto f(x)=a^x$, a função exponencial de base a. De modo que, para todo $x,y\in\mathbb{R}$, seja definida pelas propriedades a seguir:

1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, isto é, $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$.

2) $a^1 = a$, isto é, $f(1) = a$.

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$, quando $0 < a < 1$

Afirmação 1.1.1. *Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tem a propriedade (1), isto é , $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula.*

Demonstração: Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_o) = 0 \cdot f(x - x_o) = 0,$$

logo f será nula.

□

Afirmação 1.1.2. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tem a propriedade (1) e não é identicamente nula temos $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Note que utilizando (1) obtemos

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

□

Afirmação 1.1.3. *Se o contra-domínio é $\mathbb{R}^+$, então a função f é sobrejetiva.*

Demonstração: De fato, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tem as propriedades (1) e (2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem - se

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n\ vezes}) = f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1) = a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n.$$

□

Segundo Lima (2013), podemos definir $f(x) = a^x$ quando x e irracional, tendo como ponto de partida a propriedade (3). De certo modo, queremos definir uma $f(x) = a^x$, onde para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ é válido o resultado:

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y, \quad quando \quad a > 1 \quad \text{e} \quad x < y \Rightarrow a^y < a^x, \quad quando \quad 0 < a < 1.$$

Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$, que se aproximam respectivamente por falta e excesso a x e suponha sem perda de generalidade $a > 1$. Então,

$$r < x < s \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Se tomarmos $0 < a < 1$, então

$$r < x < s \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^s < a^x < a^r.$$

Para definirmos a^x com x irracional para $a > 1$, basta tomar $a^x \in \mathbb{R}$ único, cujas as aproximações por falta são a^r, com $r < x, r \in \mathbb{Q}$ e cujas aproximações por excesso são a^s, com $s \in \mathbb{Q}, x < s$. Já se $0 < a < 1$,

$a^x \in \mathbb{R}$ único, cujas as aproximações por falta sã a^s, com $s \in \mathbb{Q}, x < s$ e cujas aproximações por excesso são a^r com $r < x, r \in \mathbb{Q}$.

Ora, não podem existir dois números reais e diferentes tais como $c < d$, que assuma o valor de a^x, com a propriedade acima. Para tal,suponha $a > 1$, para $0 < a < 1$ a prova é análoga. Se tais existem, teríamos

$$r < x < s \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < c < d < a^s,$$

e então o intervalo $[c, d]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 1.2.

Ou seja, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui as propriedades $(1), (2), (3)$, então o valor $f(x)$ com x irracional é dado por $f(x) = \lim f(r_n)$ *, onde r_n é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais tais que $\lim r_n = x$. Escrevendo $f(x) = a^x$, onde $(a = f(1))$, tomando a expressão decimal $x = a_0, a_1a_2...a_n...$ e temos $a^x = \lim a^{r_n}$, onde $r_n = a_0, a_1a_2...a_n$. Portanto definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos dizer sem maiores dificuldades que, são válidas propriedades $(1), (2)$ e (3).

Lema 1.1.1. *A função exponencial de base a é contínua.*

Demonstração: Se a função exponencial é contínua, então se tomarmos $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a_0^x|$ tão pequeno quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0, ou seja, o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Para provar, iremos mostrar primeiro que é possível tornar a^h† tão próximo de 1 quanto desejamos tomemos, desde que o $|h|$ seja escolhido suficientemente pequeno.

Suponhamos $a > 1$ e $h > 0$. Queremos mostrar que, tomando h pequeno, teremos $a^h < 1 + k$, dado $k > 0$ arbitrariamente. Utilizando a desigualdade de Bernoulli temos $(1 + k)^n > 1 + nk$. Assim, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{(a-1)}{k}$, teremos $nk > a - 1$, logo $a < 1 + nk$ e obtemos

$$(1 + k)^n > a, \tag{1.4}$$

e finalmente $a^{\frac{1}{n}} < 1 + k$. Portanto, dado $k > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{\frac{1}{n}} < 1 + k$, precisamente $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + k$. Se tomamos h tal que $0 < h < \dfrac{1}{h}$ e pela afirmação 1.0.3, temos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + k$. Assim teremos a^h tao próximo de 1 quanto desejamos. Assim $\lim_{h \to 0} a^h = 1$ (1 é o limite de a^h quando h tende a zero).

Seja $h = x - x_0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, segue que

$$|a^x - a^{x_o}| = |a^{x_0+h} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|.$$

Note que se $x \to x_0$‡, então $h \to 0$, $a^h \to 1$ e $a^h - 1$ tende a zero. Assim, como a^{x_0} é fixo (não depende de h) temos

$$\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_o}| = \lim_{h \to 0} a^{x_0}|a^h - 1| = \lim_{h \to 0} a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} |a^h - 1|,$$

$$= a^{x_0} \cdot |1 - 1| = \lim_{h \to 0} a^{x_0} \cdot 0 = 0.$$

□

*$\lim f(r_n)$ lê-se: limite da função $f(r_n)$

†lê-se : modulo de h

‡$x \to x_0$ lê-se: de x para x_0 ou ainda x tendendo a x_0.

O Lema 1.3 foi retirado da obra Lima (2013) e iremos demostra-lo por completude de informação.

Lema 1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona*[§] *injetiva*[¶] *(crescente ou decrescente). As afirmações a seguir são equivalentes:*

1) $f(nx) = f(n)^x$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.

3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Afim de mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2), consideramos inicialmente pela hipótese (1) que para qualquer numero racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Como $r = \frac{m}{n}$, então $m = rn$. Assim por (1), podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

Logo,

$$f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r, r \in \mathbb{Q}$$

Por (2), $f(1) = a$, assim por (1)

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r \quad \text{para todo} \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Suponhamos que f seja crescente (o caso em f é decrescente é tratado de modo análogo), logo, $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Sem perda de generalidade, seja $f(x) > a^x$ (o caso $f(x) < a^x$ é análogo). Então pelo Lema 1.2, existe um r racional tal que $f(x) > a^r > a^x$, ou seja, $f(x) > f(r) > a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) > f(r)$, segue que $x > r$. Por outro lado, temos que $a^r > a^x$, então $r > x$, o que é uma contradição. Logo, $f(x) = a^x$ e (1) $\Rightarrow$ (2).

□

- (2) $\Rightarrow$ (3) : considere $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Deste modo, $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x + y)$.

- (3) $\Rightarrow$ (1) : considere $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando (3), segue que $f(nx) = f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)$, onde o produto possui n parcelas. Consequentemente, $f(nx) = f(x)^n$. Agora falta demonstrarmos o caso $f(-nx) = x^{-n}$. Para tal analisaremos o caso $f(-x)$. Se $f(0) = 0$, então $f(x) = f(x + 0) = f(x) \cdot f(0) = 0$ e a função f não seria monótona. Logo $f(0) \neq 0$. Com esse fato, temos $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$ e, por consequência, $f(0) = 1$. Desta forma, $f(0 \cdot x) = f(0)^x = 1 = f(x)^0$, o que mostra a propriedade (1) para $n = 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Note ainda por (3),

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x).f(-x) \Rightarrow f(-x) = f(x)^{-1}.$$

No caso $n < 0$ podemos usar o primeiro caso e a última igualdade, assim temos

$$f(-nx) = f(nx)^{-1} = [f(x)^n]^{-1} = f(x)^{-n}.$$

[§]Dizemos que uma função $f : A \to B$ é monótona crescente quando,$\forall x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
[¶]Uma função $f : A \to B$ é injetiva quando para todo $x_1 < x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Com isso concluirmos a conceitualização da função exponencial. Na próxima seção iremos falar sobre a função tipo exponencial.

1.2 Caracterização de uma função do tipo exponencial

A função exponencial esta presente em diversas situações da nossa vida como já foi dito anteriormente, porém na maioria das vezes é conhecida como função tipo exponencial. A função tipo exponencial goza das mesmas propriedades da função exponencial, tais como, a injetividade, e o fato de ser crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $0 < a < 1$. A seguir iremos definir tipo de função, igual foi feito na função exponencial. O Teorema a seguir se encontra no trabalho de Lima et al. (2012) na página 185.

Teorema 1.1. *Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$), tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ com x fixado. Substituindo $g(x)$ por $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$,onde $b = g(0)$, temos

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{g(x+h)/b}{g(x)/b} = \frac{g(x+h)}{g(x)}.$$

Deste modo, com $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x, onde $f(0) = \dfrac{g(0)}{b} = \dfrac{b}{b} = 1$. Se $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = \dfrac{f(h)}{f(0)} = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

Logo, a função f que é monótona injetiva, cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, pois

$$\varphi(h) = f(h) \Leftrightarrow \frac{f(x+h)}{f(x)} = f(h) \Leftrightarrow f(x+h) = f(h) \cdot f(x),$$

ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue então pelo Lema 1.3 que $f(x) = a^x$. Desde que $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$; $b = f(0)$, segue que $g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x$.

□

Teorema 1.2. *Para cada b e cada t reais, suponhamos dado um número $f(b, t) > 0$ com as propriedades:*

(1) $f(b, t)$ depende linearmente[‖] *de b e é monótona injetiva em relação a t;*

(2) $f(b, s + t) = f(f(b, s), t)$.

Então, pondo $a = f(1, 1)$, tem - se $f(b, t) = b \cdot a^t$.

Demonstração: Para demonstrar esse teorema observe que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $\varphi(t) = f(1, t)$ é monótona injetiva, pois $f(b, t)$ é monótona injetiva em relação a t, e cumpre a seguinte igualdade $\varphi(s + t) = f(1, s + t)$ e pela propriedade (2) temos $\varphi(s + t) = f(1, s + t) = f(f(1, s), t)$, como $f(1, s) = f(1, s) \cdot 1$ e $f(1, s)$ e linear em relação a b pela propriedade (1), temos que

$$\varphi(s + t) = f(1, s + t) = f(f(1, s), t) = f(1, s) \cdot f(1, t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t).$$

[‖] $f(b, t)$ pode ser escrito como uma combinação linear de b.

Dessa forma pelo lema1.3 nos concluímos pela propriedade (3) $\Rightarrow$ (1) que $\varphi(t) = a^t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ onde $a = \varphi(1) = f(1, 1)$. Portanto, $f(b \cdot t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1, t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t$, portanto a função $f(b, t)$ e do tipo exponencial.

Ainda sobre o teorema 1.2 gostaríamos de fazer algumas observações. Primeiramente, observe que b é o valor inicial da grandeza $f(b, t)$ no estante $t = 0$, pois $b = b \cdot a^0 = f(b, 0)$. Tomando t como o tempo decorrido desde que a grandeza $b = f(b, 0)$ passou para o valor $f(b, t)$, podemos dizer pela propriedade (2) que começar com valor b e deixar passar o tempo $s + t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b, s)$ e deixar transcorrer o tempo t.

Assim terminamos a caracterização da função tipo exponencial. Na próxima seção iremos tratar de alguns exemplos característicos da função exponencial e da função tipo exponencial.

1.3 Alguns exemplos característicos

A função exponencial possui diversas aplicações no cotidiano tais como juros em aplicações financeiras ou empréstimos, crescimento populacional, depreciação de um bem, decaimento radioativo, etc..

Com tanta aplicabilidade é natural trazer para sala de aula, situações que possibilitará ao educando a pensar, conjecturar, analisar e a formar pensamento crítico, com o uso de tal função. Os PCNs (2002) traz que a matemática do ensino médio tem um valor formativo que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Além disso, também é uma ciência com suas características estruturais específicas.

Para se ter uma aplicação adequada em sala de aula, o professor deve se preocupar com a contextualização que esta propondo, pois a mesma poderá estimula o educando, já uma contextualização inadequada poderá desmotivá-lo, visto que se trata de fatos não reais. Podemos dizer que uma boa contextualização ou contextualização adequada são aquelas que trazem dados reais e claros de situações verossímeis. De fato, contextualização é o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação. A ideia de contextualização entrou em pauta com a reforma do ensino médio, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB nº 9.394/96), que acredita na compreensão dos conhecimentos para uso cotidiano. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que são guias que orientam a escola e os professores na aplicação do novo modelo, estão estruturados sobre dois eixos principais: a interdisciplinaridade e a contextualização. Logo na contextualização o educando constrói o conhecimento com significado, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que trazem, levando em conta a capacidade dele ler e interpretar questões e sua vivência sociocultural.

A dinâmica de contextualização/descontextualização é que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola.

Neste capítulo veremos alguns exemplos de aplicações e contextualizações que podem ser modelados com o auxílio da função exponencial dentre os quais os docentes poderão se basear para construir suas aulas.

Exemplo 1.3.1. *Uma pessoa deposita R\$ 1.350,00 na poupança a uma taxa de* $0,5\%$ *ao mês. Conside-*

rando que não foi feita nenhuma retirada, após 5 meses qual será o saldo da poupança?

Resolução 1.3.1. *A Tabela abaixo representa o saldo a cada mês:*

Mês(x)	Montante
1	$\underbrace{1350}_{Capital\ Inicial} + \underbrace{1350 \cdot 0,005}_{juro} = 1350 \cdot (1 + 0,005) = 1356,75$
2	$\underbrace{1356,75}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1356 \cdot 0,005}_{juro} = 1356,75 \cdot (1 + 0,005) = 1350 \cdot 1,005^2 = 1363,53$
3	$\underbrace{1363,53}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1363,53 \cdot 0,005}_{juro} = 1363,53 \cdot (1 + 0,005) = 1350 \cdot 1,005^3 = 1370,35$
4	$\underbrace{1370,35}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1370,35 \cdot 0,005}_{juro} = 1370,35 \cdot (1 + 0,005) = 1350 \cdot 1,005^4 = 1377,20$
5	$\underbrace{1377,20}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1377,20 \cdot 0,005}_{juro} = 1377,20 \cdot (1 + 0,005) = 1350 \cdot 1,005^5 = 1384,09$

Tabela 1.1: Saldo Mensal

Note que podemos concluir que o saldo no final após 5 meses será de R\$ 1.384,09. Contudo para um melhor aproveitamento da aplicação podemos generaliza-la para uma quantidade h de meses, afim de possibilitar o educando uma maior compreensão da funcionalidade da função exponencial como fonte modeladora dessa situação. Vejamos a seguir de uma maneira bem usual através de tabela, um recurso simples mais valioso para o educando do ensino médio.

Fixando um mês (x)	Chamemos o montante correspondente de $f(x)$
$x + 1$(Após um mês)	$f(x + 1) = 1,005 \cdot f(x)$
$x + 2$(Após segundo mês)	$f(x + 2) = 1,005 \cdot f(x + 1) = 1,005^2 \cdot f(x)$
$x + 3$(Após terceiro mês)	$f(x + 3) = 1,005 \cdot f(x + 2) = 1,005^3 \cdot f(x)$
...	...
$x + h$(Após h mês)	$f(x + h) = 1,005 \cdot f(x + h - 1) = 1,005^h \cdot f(x)$

Tabela 1.2: Generalização

Observe o padrão que é apresentando pela tabela 1.1, onde o valor do montante no terceiro mês é dado por $f(3) = 1350 \cdot 1,005^3$, no quinto mês é dado por $f(5) = 1350 \cdot 1,005^5$. Assim podemos concluir que o montante em um certo período de tempo x qualquer é dado por $f(x) = 1350.1,005^x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, como podemos garantir esse fato? Uma pergunta necessária que devemos responder.

Observe que pela tabela 1.1 , quando tomamos $x = 2$, ou seja, $f(2) = 1350 \cdot 1,005^2$ e acrescemos três unidades ao tempo, obtemos $x = 5$ e logo

$$f(2 + 3) = f(5) = 1350 \cdot 1,005^5.$$

Assim

$$\frac{f(5)}{f(2)} = \frac{f(2 + 3)}{f(2)} = \frac{1350 \cdot 1,005^5}{1350 \cdot 1,005^2} = 1,005^3.$$

De mesmo modo, tomando $x = 1$ e acrescentando três unidades, teremos $x = 4$ e, consequentemente,

$$f(1 + 3) = f(4) = 1350 \cdot 1,005^4.$$

Segue que

$$\frac{f(4)}{f(1)} = \frac{f(1+3)}{f(1)} = \frac{1350 \cdot 1,005^4}{1350 \cdot 1,005} = 1,005^3. \tag{1.5}$$

Generalizando a equação 1.5, obtemos

$$\frac{f(x+3)}{f(x)} = \frac{1350 \cdot 1,005^{(x+3)}}{1350 \cdot 1,005^x} = 1,005^3$$

a qual independe do valor de x, ou seja, $f(x+3)$ é diretamente proporcional a $f(x)$. Se aplicarmos o mesmos procedimentos, para o saldo $f(x+h), h \in \mathbb{R}$, no mês $x+h$, obteremos $1,005^h$. Isto assegura uma proporcionalidade entre $f(x+h)$ e $f(x)$. Além disso, note que o valor da poupança representa uma função monótona crescente e injetiva.

Exemplo 1.3.2. *Observe a tabela 1.3 do crescimento populacional de um certo país:*

Ano	População (milhoes)
1980	67,38
1981	69,13
1982	70,93
1983	72,77
1984	74,66
1985	76,60
1986	78,59

Tabela 1.3: Tabela Populacional

a) Determine a razão populacional de um ano para o outro a partir do ano de 1980.

b) Modele o crescimento populacional usando conceitos pré-definidos.

Resolução 1.3.2.

a) Observe que ,

$$\frac{69,13}{67,38} = 1,026$$

$$\frac{70,93}{69,13} = 1,026$$

$$\frac{72,77}{70,93} = 1,026$$

$$\frac{74,66}{72,77} = 1,026$$

$$\frac{76,60}{74,66} = 1,026$$

$$\frac{78,59}{76,60} = 1,026$$

b) O educando pode modelar esse crescimento a partir de um lei de formação usando a relação crescimento x tempo, como vejamos a seguir dará isto, considere 1980 *com t_0, e note que*

Pela tabela 1.4 obtivemos como resultado da modelagem $p(n) = 67,38 \cdot 1,026^n$ onde $p(x)$ é a população do ano e t é o tempo em anos.

Tempo	Ano	População (milhões)	p(n)
t_0	1980	$67,38$	$67,38 \cdot 1,026^0$
t_1	1981	$69,13$	$67,38 \cdot 1,026^1$
t_2	1982	$70,93$	$67,38 \cdot 1,026^2$
t_3	1983	$72,77$	$67,38 \cdot 1,026^3$
t_4	1984	$74,66$	$67,38 \cdot 1,026^4$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
t_n	1986	$78,59$	$67,38 \cdot 1,026^n$

Tabela 1.4: Tabela Modelagem 1

Capítulo

2

CONCEITUAÇÃO DAS MATRIZES

O termo Matrizes foi usado primeiro pelo matemático James Joseph Sylvester, 1850. Apesar de não ser chamada inicialmente por esse termo há relatos que em 1826, Cauchy a denomina tableau(tabela). Entretanto, é Arthur Cayley com sua famosa *Memoir on the Theory of Matrices*, 1858, que divulgou esse nome. O primeiro uso implícito da noção de matriz ocorreu com Lagrange que reduziu a caracterização dos máximos e mínimos de uma função real de várias variáveis ao estudo do sinal da forma quadrática associada à matriz das segundas derivadas dessa função. A Teoria das Matrizes teve como base a Teoria das Formas Quadráticas, porque seus métodos e resultados básicos foram lá gerados, mas atualmente o estudo das formas quadráticas é um capítulo da Teoria das Matrizes.

O conhecimento Matricial em suas várias formas produz uma aplicabilidade essencial para manutenção da estrutura nos campos da engenharia, computacional, matemático e outros. A sua aplicação se dá devido as suas características singulares. Dentre tantas aplicações podemos destacar a utilização na resolução de sistemas lineares, em planilhas eletrônicas, em equipamentos e que visam a localização como o GPS, na informática, na probabilidade e outros.

A contextualização e aplicação de um conteúdo motiva e ajuda na obtenção do conhecimento, logo saímos do pressuposto que seria extremamente natural que o conhecimento matricial fosse ensinado nas escolas públicas com diversas aplicações e contextualizações, o que não ocorre na realidade e que, em muitas das vezes, o ensino matricial tem si tornado cansativo para muitos.

Essa pesquisa tem como um dos objetivos propiciar o conhecimento das aplicabilidades para o estudo das matrizes com intuído de propor uma melhoria para o ensino básico.

O conteúdo deste capítulo foi baseado nas seguinte referências: Boldrini et al. (1980); Dante (2016b); Degenszajn et al. (2011); Giovanni et al. (1994); Gelson Iezzi (2016b); Iezzi et al. (2004); Trindade (2017); Lima et al. (2012); Lima (2013); Stewart (2013).

Começaremos com uma visão geral do conteúdo de matrizes, isto é, definição, propriedades, operações.

Definição 2.1. *Uma matriz A é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$. É representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i-ésima linha com a j-ésima coluna, geralmente entre colchetes ou parenteses.*

Notação:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \quad ou \quad A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Se a matriz tem m linhas e n colunas, dizemos que ela é do tipo $m \times n$ ou de ordem $m \times n$. Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Exemplo 2.0.1. *Por definição, observe que*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ é uma matriz do tipo } 2\times 3 \text{ e } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ é uma matriz de ordem } 3\times 3.$$

2.1 Tipos especiais de matrizes

Definição 2.1.1. *Quando uma matriz A é da ordem $m \times 1$, dizemos que A é uma matriz coluna.*

Exemplo 2.1.1. *Observe a seguir exemplos de matriz coluna:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.2. *Se uma matriz A é da ordem $1 \times n$, então A chama-se matriz linha.*

Exemplo 2.1.2. *A seguir alguns exemplos de matriz linha:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.3. *Seja A é uma matriz $m \times n$ onde $m = n$. Logo a matriz A é denominada matriz quadrada de ordem n.*

Exemplo 2.1.3. *Observe a seguir um exemplo de matriz de ondem n.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

A matriz quadrada de ordem m possui dois elementos de estudo que são: a diagonal principal que é constituída dos elementos a_{ij} em que $i = j$ e a diagonal secundária que é constituída por elementos da forma a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$, $\cdots a_{m1}$.

Definição 2.1.4. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n, $A = [a_{ij}]$, em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos e os elementos da diagonal principal são todos iguais a um, isto é, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para todo $i = j$, então a matriz A é denominada matriz identidade, com notação I ou I_n.*

Exemplo 2.1.4. *Matriz identidade I_n*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Definição 2.1.5. *Uma matriz quadrada A em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é denominada matriz diagonal.*

Exemplo 2.1.5. *A seguir uma matriz diagonal de ordem n.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Definição 2.1.6. *A matriz em que todos os seus elementos são nulos é denominada matriz nula, ou seja, $a_{ij} = 0$, para todo i, j.*

Exemplo 2.1.6. *A matriz a seguir é uma matriz nula de ordem 3×4:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Definição 2.1.7. *Uma matriz A em que os elementos $a_{ij} = a_{ji}$ é denominada matriz simétrica.*

Exemplo 2.1.7. *Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Observe que $a_{12} = a_{21} = 3$, $a_{13} = a_{31} = -1$ e $a_{23} = a_{32} = 0$.*

Definição 2.1.8. *Definimos matriz triangular superior toda matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.*

Exemplo 2.1.8. *As matrizes A e B a seguir são exemplos de matrizes triangular superior, visto que* *abaixo da diagonal principal todos os seus elementos são nulos:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.9. *Definimos matriz triangular inferior toda matriz quadrada onde os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.*

Exemplo 2.1.9. *As matrizes a seguir são exemplos de matrizes triangular inferior;*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.10. *Considere A uma matriz $m \times n$. A matriz oposta de A é a matriz que adicionada com A resulta na matriz nula.*

Exemplo 2.1.10. *Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Observe que $A + B = 0$ onde 0 representa a matriz nula. Assim, B é a matriz oposta de A.*

2.2 Igualdade, adição, multiplicação por um escalar e subtração de matrizes

O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Podemos usar tabelas para dar as ideias de operações de matrizes, como o exemplo a seguir, onde podemos conjecturar algumas situações. As tabelas 2.2 e 2.2 a seguir, representam a produção de grãos em milhares de toneladas de certas regiões do país nos anos de 2000 e 2001.

	Soja	feijão	arroz	milho
Região 1	200	400	300	500
Região 2	500	300	200	100
Região 3	200	310	400	250
Região 4	100	700	150	50

Tabela 2.1: Produção de Grãos (em milhares de toneladas) no ano 2000.

	Soja	feijão	arroz	milho
Região 1	300	500	200	400
Região 2	500	300	250	300
Região 3	200	400	270	450
Região 4	300	500	300	150

Tabela 2.2: Produção de Grãos (em milhares de toneladas) no ano de 2001.

A primeira situação que podemos conjecturar é a seguinte; qual seria a produção total no final dos dois anos (2000 e 2001)? Podemos resolver essa situação, adicionando todos elementos correspondentes de cada tabela, como vemos a seguir:

	Soja	feijão	arroz	milho
Região 1	$200 + 300$	$400 + 500$	$300 + 200$	$500 + 400$
Região 2	$500 + 500$	$300 + 300$	$200 + 250$	$100 + 300$
Região 3	$200 + 200$	$310 + 400$	$400 + 270$	$250 + 450$
Região 4	$100 + 300$	$700 + 500$	$150 + 300$	$50 + 150$

Tabela 2.3: Produção de Grãos (em milhares de toneladas) durante os anos 2000 e 2001.

	Soja	feijão	arroz	milho
Região 1	500	900	500	900
Região 2	1000	600	450	400
Região 3	400	710	670	700
Região 4	400	1200	450	700

Tabela 2.4: Produção de Grãos (em milhares de toneladas) durante os dois anos pesquisa.

Naturalmente podemos observar essa situação como adição de matrizes,da seguinte forma;

$$\begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 & 500 \\ 500 & 300 & 200 & 100 \\ 200 & 310 & 400 & 250 \\ 100 & 700 & 150 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 500 & 200 & 400 \\ 500 & 300 & 250 & 300 \\ 200 & 400 & 270 & 450 \\ 300 & 500 & 300 & 150 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 200+300 & 400+500 & 300+200 & 500+400 \\ 500+500 & 300+300 & 200+250 & 100+300 \\ 200+200 & 310+400 & 400+270 & 250+450 \\ 100+300 & 700+500 & 150+300 & 50+150 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 500 & 900 & 500 & 900 \\ 1000 & 600 & 450 & 400 \\ 400 & 710 & 670 & 700 \\ 400 & 1200 & 450 & 700 \end{bmatrix}.$$

Existem muitos fatores que poderiam influenciar na safra. Suponha que a safra de 2003 seja o quádruplo da produção do ano de 2001. Assim, a matriz que representará a safra ou produção no ano de 2003 será:

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 300 & 500 & 200 & 400 \\ 500 & 300 & 250 & 300 \\ 200 & 400 & 270 & 450 \\ 300 & 500 & 300 & 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & 2000 & 800 & 1600 \\ 2000 & 1200 & 1000 & 1200 \\ 800 & 1600 & 1080 & 1800 \\ 1200 & 2000 & 1200 & 600 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos duas operações com adição de matrizes e a multiplicação por um escalar, as quais iremos definir a seguir, bem como, igualdade de matrizes, subtração de matrizes.

Definição 2.2.1. *(Igualdade de matrizes) Sejam A e B matrizes. Definimos $A = B$, se e somente se,* *1) A e B têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.*

2) Todos os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os i e j.

Em termos de notação, podemos escrever

$$A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad com \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad e \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Exemplo 2.2.1. *Tem - se* $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ *se, e somente se, $a = 4$ e $b = 1$.*

Definição 2.2.2. *(Adição de matriz)*
Dadas duas matrizes, A e B do mesmo tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B. Logo, se

$$A_{m\times n} = [a_{ij}], \quad B_{m\times n} = [b_{ij}] \quad e \quad C_{m\times n} = [c_{ij}],$$

então

$$[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}], (1 \leqslant i \leqslant m \quad e \quad 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Logo,

$$C = C_{m\times n} = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo 2.2.2. *Considere* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$. *Segue que* $C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$.

Propriedades 2.2.1. *Dadas as Matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, valem as seguintes propriedades:*

*i) **(Associativa)** $(A + B) + C = A + (B + C)$.*

*ii) **(Comutativa)** $A + B = B + A$.*

*iii) **(Elemento neutro)** $A + 0 = 0 + A = A$, sendo 0 a matriz nula.*

*iv) **(Inversa aditiva)** $A + (-A) = (-A) + A = 0$.*

Demonstração:

i) **(Associativa)** Desde que $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$ tem-se

$$[(A + B) + C] = [a_{ij} + b_{ij}] + c_{ij} = a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}] = [A + (B + C)].$$

□

i) **(Comutativa)** Desde que $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, segue que

$$[A+B] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [B+A].$$

$\square$

iii) **(Elemento neutro)** Sejam a matriz $U = [u_{ij}]$ e $A = [a_{ij}]$. Então $A + U = A$, se, e somente se, $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$. O que ocorre quando $u_{ij} = 0$. Portanto, a matriz $U = 0$.

$\square$

iv) **(Inversa aditiva)** Definimos a matriz $-A$ como $-A = (-1) \cdot A$. Segue trivialmente que

$$A + (-A) = 0.$$

$\square$

Definição 2.2.3. *(Subtração de matrizes) Sejam A e B matrizes de mesma ordem. A diferença entre A e B, denotada por $A - B$, é definida por:*

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [c_{ij}], \textit{onde } [c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}], (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Exemplo 2.2.3. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. *Segue que* $A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & 3-5 \\ 2-6 & 4-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

Definição 2.2.4. *(Multiplicação de uma matriz por um escalar)*
Seja α um número real e A uma matriz, então o produto de α pela matriz A, denotado por $\alpha \cdot A$, é a matriz obtida multiplicando cada elemento de A por α.

Exemplo 2.2.4. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *e α um número real, então* $\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 2 & \alpha \cdot 6 & \alpha \cdot 1 \\ \alpha \cdot 0 & \alpha \cdot 4 & \alpha \cdot 5 \end{bmatrix}$.

Propriedades 2.2.2. *Se α e β são números reais e A, B matrizes de mesma ordem $m \times n$, então valem as seguintes propriedades:*

i) **(Associativa)** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

ii) **(Distributiva)** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

iii) **(Distributiva)** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

iv) **(Elemento neutro)** $1 \cdot A = A$.

Demonstração:

i) **(Associativa)** Observe que

$$[\alpha(\beta A)] = \alpha [\beta \cdot a_{ij}] = (\alpha\beta) \cdot [a_{ij}] = [(\alpha\beta)A].$$

$\square$

ii) **(Distributiva)** Note que, pelas propriedades dos números reais,

$$[(\alpha+\beta)A] = [(\alpha+\beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] = (\alpha A) + (\beta A).$$

$\square$

iii) **(Elemento neutro)** Segue das propriedades dos números reais que

$$[\alpha(A+B)] = [\alpha(a_{ij}+b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = (\alpha A) + (\alpha B).$$

$\square$

Definição 2.2.5. *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^t é denominada transposta de A.*

Exemplo 2.2.5.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$. *Segue que* $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

b) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 2}$. *Segue que* $B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1}$.

Definição 2.2.6. *Uma matriz $A_{n\times n}$ é simétrica se, e somente se, ela é sua transposta, isto é $A^t = A$*

Exemplo 2.2.6.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$. *Segue que* $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$. *Logo a matriz A é simétrica.*

Definição 2.2.7. *Uma matriz $A_{n\times n}$ é anti-simétrica se, e somente se, $A^t = -A$*

Exemplo 2.2.7.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$. *Segue que* $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$. *Logo a matriz A é anti-simétrica.*

b) Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$. *Segue que* $B^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$.

Propriedades 2.2.3. *Enunciaremos algumas propriedades que envolvem o conceito de matriz transposta.*

i) A transposta da transposta de uma matriz é igual a ela mesma, isto é, $(A^t)^t = A$.

ii) A transposta de uma soma é igual à soma das transpostas, isto é , $(A+B)^t = A^t + B^t$

iii) $(kA)^t = kA^t$, *onde* k *é qualquer escalar.*

iv) $(AB)^t = B^tA^t$.

Demonstração:

i) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}, A^t = (a_{ji})_{n\times m}$. Logo, tem-se que

$$(A^t)^t = [(a_{ji})_{n\times m}]^t = (a_{ij})_{m\times n} = A.$$

ii) Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$, tais que $A + B = C$, então $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo,

$$C^t = (A + B)^t = [c_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = A^t + B^t.$$

iii) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}, A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ e k um escalar qualquer. Observe que $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$, logo tem-se

$$(kA)^t = [(ka_{ij})_{m\times n}]^t = (ka_{ji})_{n\times m} = kA^t.$$

iv) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$, $B = (b_{ik})_{n\times p}$ e $B^t = (b_{ki})_{p\times m}$. Segue que,

$$(AB)^t = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}b_{ik}]^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b_{ki}a_{ji} = B^tA^t,$$

o que mostra que de fato $(AB)^t = B^tA^t$.

□

2.3 Multiplicação de Matrizes

Definição 2.3.1. *(Multiplicação entre matrizes) Sejam* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$*matrizes. Definimos* $C = AB = [c_{ij}]_{m\times p}$ *onde,*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ip}b_{jp}.$$

O produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ *e* $B_{q\times p}$ *é possível se, e somente se,* $n = q$*, ou seja o número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao números de linhas da segunda matriz.*

Observe o produto entre matrizes a seguir:

i) $A_{1\times 5} \cdot B_{5\times 3} = C_{1\times 3}$

ii) $A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 1} = C_{1\times 1}$

Cada matriz produto é obtida a partir de uma linha da primeira matriz e uma coluna da segunda matriz. Esta noção de produto pode ser estendida para o caso mais geral e os elementos da matriz produto serão obtidos pela adição dos produtos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos elementos de uma coluna da segunda matriz. Portanto o elemento c_{ij} *é obtido pela soma dos produtos dos elementos da í-ésima linha da primeira matriz com os elementos da j-ésima coluna da segunda matriz.*

Exemplo 2.3.1. *Veremos a seguir alguns exemplos.*

1) Sejam $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ *e* $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$*.Note que*

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

2) Sejam $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$*. A multiplicação AB não é possível, pois o número de colunas da matriz A é diferente do número de linhas da matriz B. Contudo BA é possível, como segue:*

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 4 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 1\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

A comutatividade no produto de matrizes não é verdade em geral, veja o exemplo:

3) Sejam $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Então, $AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 4 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 6 + 1\cdot 3 \\ (-3)\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & (-3)\cdot 2 + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 2 & (-3)\cdot 3 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & (-2)\cdot 2 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 & (-2)\cdot 3 + 1\cdot 6 + 0\cdot 3 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $BA = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot(-3) + 6\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 6\cdot 1 & 2\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 6\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$*, ou seja,* $AB \neq BA$.

Propriedades 2.3.1. *Considere as matrizes $A_{m\times p}$, $B_{p\times q}$ e $C_{q\times n}$. Então são validas as seguintes propriedades:*

i) ***(Associatividade)*** $(AB)C = A(BC)$.

ii) ***(Distributividade à esquerda da soma)***$A(B + C) = AB + AC$.

iii) ***(Distributividade à direita da soma)*** $(A + B)C = AC + BC$.

iv) ***(Elemento neutro)*** $AI = IA = A$*, sendo I a matriz identidade.*

v) ***(Elemento nulo)*** $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$*, sendo 0 a matriz nula.*

Demonstração:

i) **(Associatividade)** $(AB)C = A(BC)$.

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(BC)_{kj} &&= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) &&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(a_{ik}b_{kl})c_{lj}\\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{q} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} &&= \sum_{k=1}^{p}(AB)_{il}\,c_{lj}\\
&= [(AB)C]_{ij}\,.
\end{aligned}$$

□

ii) **(Distributividade à esquerda da soma)**$A(B+C) = AB + AC$.

$$\begin{aligned}
[A(B+C)] &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(B+C)_{kj} &&= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\\
&= \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj}+a_{kj}c_{kj}) &&= \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj})+\sum_{k=1}^{p}(a_{kj}c_{kj})\\
&= (AB)_{ij}+(AC)_{ij} &&= [AB+AC]_{ij}\,.
\end{aligned}$$

□

iii) **(Distributividade à direita da soma)** $(A+B)C = AC + BC$.

$$\begin{aligned}
[(A+B)C] &= \sum_{j=1}^{n}(A+B)_{il}c_{lj} &&= \sum_{j=1}^{n}(a_{il}+b_{il})c_{lj}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(a_{il}c_{lj}+b_{il}c_{lj}) &&= \sum_{j=1}^{n}(a_{il}c_{lj})+\sum_{j=1}^{n}(b_{il}c_{lj})\\
&= (AC)_{ij}+(BC)_{ij} &&= [AC+BC]_{ij}\,.
\end{aligned}$$

iv) **(Elemento neutro)** $AI = IA = A$, sendo I a matriz identidade.

Sendo $I = (d_{ij})_{n\times n}$ e $B = AI = (b_{ij})_{m\times n}$. Temos:

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= a_{i1}d_{1j}+a_{i2}d_{2j}+a_{i3}d_{3j}+\ldots+a_{ii}d_{ii}+\ldots+a_{in}d_{nj}\\
&= = a_{i1}\cdot 0+a_{i2}\cdot 0+a_{i3}\cdot 0+\ldots+a_{ii}\cdot 1+\ldots+a_{in}\cdot 0\ \ ,\\
&= a_{ij}
\end{aligned}$$

A volta é análoga.

$\square$

Capítulo 3

FUNÇÃO EXPONENCIAL E MATRIZES NO LIVRO DIDÁTICO

Nesse capítulo serão respondidos alguns questionamentos que fomentaram a construção dessa pesquisa, são eles:

- Como é a proposta para o ensino dos tópicos da função exponencial e matrizes nos livros didáticos?
- Os livros didáticos estabelecem alguma relação entre a função exponencial e as matrizes ?

Para tal, foram analisados livros didáticos que integram o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) oferecidos nos últimos anos para as escolas estaduais do leste de Minas Gerais, microrregião de Governador Valadares. Gostaria de ressaltar que a análise dessas propostas didáticas tem intuito de auxiliar a reflexão profissional do professor e na construção do saber do educando, proporcionando para suas aulas um olhar crítico sobre as contextualizações e aplicações empregadas no ensino da função exponencial e matrizes.

Foi dado maior ênfase às contextualizações que envolvem aplicações, pois são responsáveis por fazer a conexão entre a abstração e a realidade e têm papel preponderante na interdisciplinaridade.

Para fazer essas análises, primeiramente defenderemos o que caracteriza boas contextualizações e contextualizações inadequadas, que ao nosso ver serão de extrema importância para a organização do conteúdo dessa pesquisa.

As contextualizações adequadas (situações verossímeis que tenham ligação com o mundo real), proporcionam significado aos conteúdos, motivação e estímulo encontrando o sentindo, um porquê de se dedicar tempo e energia para compreensão do conteúdo em sala de aula. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento e também vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos.

Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (NACIONAIS, 1997, p.19)

Para Vasconcelos (2008) embora as situações do dia-a-dia tenham grande importância no sentido de favorecer a construção de significados para muitos conteúdos a serem estudados, faz-se necessário considerar a possibilidade de construção de significados a partir de questões internas da própria Matemática, caso contrário, muitos conteúdos seriam descartados por não fazerem parte da realidade dos alunos.

Segundo Oliveira (2014), as boas contextualizações são aquelas que por meio da problematização envolvam aplicações ou manipulações. Podem vir ou não acompanhadas de fórmulas que as modelem, desde que as informações contidas no problema sejam reais, ou simulem a realidade, fazendo conexão entre temas da própria Matemática, entre esses temas e outras ciências, Matemática e as práticas sociais ou entre a Matemática e História da Matemática.

Para norteia nossa pesquisa deverá ser usada a definição acima como boa contextualização e consideraremos contextualização inadequadas quando, as mesmas forem falsas, artificiais ou trouxerem dados incorretos, ou seja, que caracterizarem situações aparentemente reais, mas trazem incoerências com a realidade.

Agora que já estão estabelecidos os conceitos que serão usados, será dado continuidade a análise das contextualizações e aplicações, que são feitas através das problematização nos seguintes livros:

1) Matemática: interação e tecnologia - Volume 1; Rodrigo dias Balestri; São Paulo; 2° edição ; 2016.

2) Matemática: ciência e aplicações: ensino médio - Volume 1; Autores : Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. São Paulo, 2016.

3) Conexões com a Matemática - 1° ano do ensino médio; Fabio Martins de Leonardo; São Paulo; 2016.

4) Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 1; Luiz Roberto Dante ; 3° edição ; São Paulo; 2016.

5) Matemática: interação e tecnologia: ensino médio - Volume 2; Rodrigo Balestri; São Paulo; 2° edição; 2016.

6) Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2; Autores : Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. São Paulo, 2016.

7) Conexões com a Matemática - 2° ano do ensino médio; Fabio Martins de Leonardo; 3° edição; São Paulo; 2016.

8) Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2; Luiz Roberto Dante; 3° edição; São Paulo; 2016.

A estrutura de análise utilizada é:

i) Analisar as contextualizações das funções exponenciais com exemplos encontrados no livro didático.

ii) Analisar as contextualizações das matrizes com exemplos encontrados no livro didático.

iii) Verificar se o livro usa alguma relação ou conexão entre as funções exponenciais e matrizes.

Na seguir próxima seção, será realizada a análise das contextualizações dos livros didáticos na ordem apresentada anteriormente nessa seção.

3.1 Análise do livro Matemática: interação e tecnologia - Volume 1

Nesse livro foram analisadas as contextualizações presentes nos exercícios que estão no capitulo 5 a partir da página 142, que são voltados para a função exponencial.

O processo de aprendizagem e abordagem sobre função exponencial nessa obra se inicia com uma breve revisão dos conceitos de potência e suas propriedades. Observe que o autor contextualiza as potências na notação científica dando ao educando uma amostra da aplicabilidade da matemática no mundo real.

O autor introduz os conceitos de função exponencial com o uso das contextualizações tais como juros compostos, lei do esfriamento de Newton, crescimento populacional, curva de aprendizagem e decaimento radioativo.

Dentre as contextualizações encontradas destaca-se como boas contextualizações, os exemplos a seguir:

Exemplo 3.1.1. *(Exercício retirado da página 148.) A depreciação de certo modelo de motocicleta, nos primeiros 5 anos de uso, é dado pela função* $V(t) = P \cdot (0,89)^t$, *em que* $V(t)$ *é o valor após* t *anos de uso e* P *o preço pago pela motocicleta nova.*

a) Qual é o domínio dessa função ?

b) Se a motocicleta nova custa R$ 15 000,00, qual era seu valor ao final de:

i) 2 anos de uso?

ii 5 anos de uso?

Comentário 3.1.1. *Consideramos o exemplo 3.1.1 uma boa contextualização, pois vincula o abstrato com o mundo real, e não traz nenhum dado incoerente.*

Exemplo 3.1.2. *(Exercício retirado da página 149.) Certa instituição financeira disponibilizou cartão de crédito a seus clientes e aplica taxa de juros de* 12% *ao mês sobre o todo o capital* C *com pagamento em atraso. Desse modo, após* n *meses o cliente deve pagar à instituição um montante* M, *que pode ser calculado por* $M(n) = C.(1,12)^n$.

a) Ao fazer uma compra de R$ 900,00 com o cartão de crédito, que valor será cobrado pela instituição financeira caso haja um atraso no pagamento de:

i) 2 meses ?

ii) 5 meses ?

iii) 1 ano ?

b) Quanto reais de juros clientes deve pagar se efetuar uma compra de R$ 2000,00 e quitá-la 7 meses após o vencimento?

Comentário 3.1.2. *Por ser uma situação real e possível consideramos o exercício 3.1.2 uma boa contextualização.*

Comentário 3.1.3. *O exemplo 3.1.3 a seguir é uma boa contextualização exceto pela letra c que traz um fato incoerente, pois cita que um indivíduo absorve 4 mg de nicotina ao fumar um cigarro, o que seria de* *certo modo irregular, visto que a quantidade de nicotina que podemos ingerir ao consumir um cigarro varia de 0,4 mg a 1,2 mg. Pesquisa realizada no site* $http : //institutomarat1.hospedagemdesites.ws/metodo-auricular/reposicao-de-nicotina-tabela-comparativa/$*, às 18:39, do dia 08/03/18.*

Exemplo 3.1.3. *A nicotina é altamente tóxica e pode trazer uma série de prejuízos à saúde, tanto de fumantes quanto de fumantes passivos, que são pessoas que não fumam, porém entram em contato com a fumaça do cigarro. Após a nicotina ser absorvida pelo organismo, a cada hora aproximadamente, a quantidade dessa substância no organismo é reduzida à metade.*

a) Se c é a quantidade inicial de nicotina presente no organismo de um indivíduo, qual das funções a seguir, permite calcular a quantidade de nicotina restante t horas após a absorção dessa substância?

i) $f(t) = c \cdot (\frac{1}{2})^{-\frac{t}{2}}$

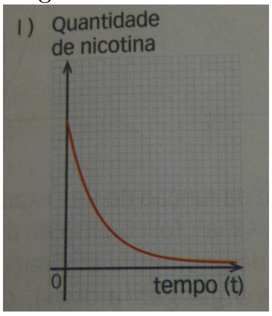
ii) $f(t) = c \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{2}}$

iii) $f(t) = c \cdot (-\frac{1}{2})^{t}$

b) Que gráfico melhor representa a função escolhida no item a ?

i) Representação gráfica, Figura 3.1.

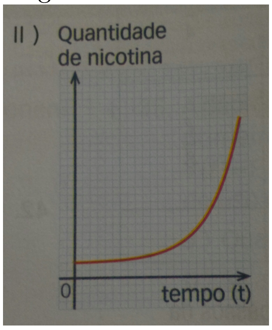
Figura 3.1: Gráfico 1



Fonte: Livro MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA - Volume 1, página 150.

ii) Representação gráfica, Figura 3.2.

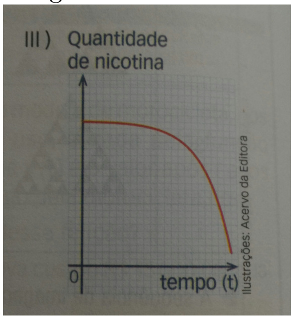
Figura 3.2: Gráfico 2



Fonte: Livro MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA - Volume 1, página 150.

iii) Representação gráfica, Figura 3.3.

Figura 3.3: Gráfico 3



Fonte: Livro MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA - Volume 1, página 150.

c) *Se, ao fumar um cigarro, um indivíduo absorve 4 mg de nicotina, qual a quantidade dessa substancia em seu organismo após 8 horas ?*

d) *Ao ingerir bebidas alcoólicas, o fígado metaboliza uma quantidade fixa de álcool no decorrer do tempo, cerca de 10 mililitros por hora. A função que representa a quantidade de álcool no corpo de um indivíduo após ingerir bebida alcoólica é do tipo exponencial? Por quê?*

Exemplo 3.1.4. *(Exercício retirado da página 148.) (UEPG-PR) Certa população de insetos cresce de acordo cm a expressão* $N = 500 \cdot 2^{\frac{t}{6}}$*, sendo* t *o tempo em meses e* N *o número de insetos na população após o tempo* t*. Nesse contexto, indique as afirmações corretas.*

a) *O número inicial de insetos é de 500.*

b) *Após três meses o número de insetos será maior que 800.*

c) *Após um ano o número total de insetos terá quadruplicado.*

d) *Após seis meses o número de insetos terá dobrado.*

Comentário 3.1.4. *Como o exemplo 3.1.4 não se refere a qual inseto, não há como definirmos a existência deste , portanto consideramos como uma contextualização inadequada.*

Comentário final sobre o livro 3.1. *Ao analisar a obra verificamos a existência de boas contextualizações e apenas uma contextualização inadequada, contudo a diversidade de contextualização é pequena e não há uma conexão entre a função exponencial e as matrizes.*

3.2 Análise do livro MATEMÁTICA: ciência e aplicações: ensino médio - Volume 1

Nesse livro iremos analisar as contextualizações presentes nos exercícios que estão no capitulo 7 a partir da página 127, que são voltados para a função exponencial.

Semelhante ao livro anterior, sua introdução traz uma recordação das potencias e suas propriedades com o uso da aplicação da mesma em notação científica.

Veremos a seguir algumas boas contextualizações dessa obra.

Exemplo 3.2.1. *(Exercício retirado da página 141.) Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após t semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar p unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona p e t é :* $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$.

a) *Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?*

b) *Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use* $e^{0,2} \simeq 1,2$.

c) *Qual é o limite teórico de unidades que o funcionário pode empacotar, por hora?*

Comentário 3.2.1. *Por se tratar de uma situação real, consideramos o exemplo 3.2.1 sendo uma boa contextualização.*

A seguir algumas contextualizações que ao nosso ver são consideradas inadequadas.

Exemplo 3.2.2. *(Exercício retirado da página 141.) Grande parte do brasileiro guarda suas reserva financeira na caderneta de poupança. O rendimento líquido anual da caderneta de poupança gira em torno de 6%. Isso significa que, a cada ano, o saldo dessa poupança cresce 6% em relação ao saldo do ano anterior.*

a) *Álvaro aplicou hoje R$ 2.000,00 na poupança. Faça uma tabela para representar, ano a ano, o saldo dessa poupança nos próximos cinco anos.*

b) *Qual é a lei da função que relaciona o saldo s, em reais, da poupança de Álvaro e o número de anos x transcorridos a partir de hoje* $(x = 0)$*?*

c) *É possível que em 10 anos o saldo dessa poupança dobre? Use* $1,06^{10} \simeq 1,8$.

Comentário 3.2.2. *Em pesquisa realizada no site* $http://www.investimentosenoticias.com.br/poupanca/caderneta-de-poupanca-como-funciona$ *no dia 17/08/18 as 12:55 horas, verificou-se que a variação da poupança depende do valor da taxa referencial (TR), taxa calculada diariamente pelo Banco Central do Brasil, e que seu rendimento líquido ou real esta condicionado a inflação vigente. Por esses motivos o rendimento líquido da poupança é bem pequeno e inferior a 6% a.a , logo a contextualização acima é inadequada.*

Exemplo 3.2.3. *(Exercício retirado da página 141.) Uma moto foi adquirida por R$ 12.000,00. Seu proprietário leu, em uma revista especializada, que a cada ano a moto perde 10% do valor que tinha no ano anterior.*

a) *Represente, em uma tabela, o valor da moto depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.*

b) *Qual é o valor da moto após 7 anos da aquisição?*

c) *Determinação a lei que relaciona o valor v da moto, em reais, em função do tempo t, expresso em anos.*

Comentário 3.2.3. *O exemplo 3.2.3 é uma contextualização inadequada, visto que a depreciação seria de 25% a.a. determinada pela Secretaria da Receita Federal pelo decreto 3.000/99 (RIR/99) que estabelece, no caput de seu art.310, que a taxa anual de depreciação deve ser fixada em função do prazo durante o qual se possa esperar a utilização econômica do bem pelo contribuinte na produção de seus rendimentos.*

Exemplo 3.2.4. *(Exercício retirado da página 145.) Os antibióticos são utilizados no tratamento de infecções causadas por bactérias. A má utilização desse tipo de medicamento. Leva ao surgimento de bactérias cada vez mais resistentes, tornando alguns antibióticos ineficazes. Isso implica um círculo vicioso que já ocasionou o desenvolvimento de mais de 200 tipos de diferentes de antibióticos. Afim de inibir a auto medicação e o uso indiscriminado, em maio de 2011, a Agencia Nacional de Vigilância Sanitária(Anvisa) publicou a resolução que determina que as farmácias devem comercializar antibióticos mediante a retenção de receita médica. Ainda assim, é importante utilizar antibióticos apenas nos casos realmente necessários, seguindo as orientações médicas e respeitando a posologia e a duração de tratamento.*

A amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de diversas infecções não complicadas, receitado por médicos do Brasil. A bula da amoxicilina, como a de todos medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, as informações ao paciente, as informações técnicas e a posologia. Nas informações técnicas, é possível ler que a ***meia-vida da amoxicilina após administração do produto é de 1,3 hora.*** *Mas o que essa informação significa? A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de amoxicilina no organismo decresce 50% do valor que tinha no início do período.*

Considere que um adulto ingeriu uma cápsula com 500 mg de amoxicilina e faça o que se pede a seguir:

a) Complete a tabela abaixo, copiando em seu caderno.

Quantidade de amoxicilina no organismo (mg)							
Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6

b) Faça, em seu caderno, o gráfico da função que relaciona a quantidade de amoxicilina no organismo (em miligramas), e o tempo (em horas) transcorridos após a ingestão.

c) Responda: qual é a lei da função que relaciona a quantidade q de amoxicilina no organismo e o número n de meias - vidas.

O tempo da meia-vida é um importante parâmetro para os médicos e também para indústria farmacêutica. O conhecimento da meia-vida dos medicamentos possibilita uma estimativa da velocidade com o que o processo ocorre, originando informações importantes para interpretação dos efeitos terapêuticos, da duração do efeito farmacológico e do regime posológico adequado. A posologia recomendada para uma cápsula de amoxicilina 500 mg, por exemplo, é de 8 em 8 horas.

d) Responda: considerando a quantidade amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual é a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas de ingestão ? Por que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelos médicos?

Comentário 3.2.4. *Observando a bula da amoxicilina verificamos que a principal via de eliminação da amoxicilina são os rins. Cerca de 60% a 70% de amoxicilina são excretados inalterados pela urina durante as primeiras seis horas após a administração de uma dose padrão. A meia-vida de eliminação é de aproximadamente* ***uma hora*** *. A amoxicilina também é parcialmente eliminada pela urina, como ácido peniciloico inativo, em quantidades equivalentes a 10% a 25% da dose inicial. A administração simultânea de probenecida retarda a excreção da amoxicilina. Como o exemplo 3.2.4 refere-se que a* *meia-vida da amoxicilina e de 1,3 horas, consideramos ele uma contextualização inadequada, pois trouxe um dado importante em sua estruturada que não é verdadeiro, principalmente quando consideramos que a resolução dele está diretamente relacionada a meia - vida da amoxicilina que é citada na sua estrutura.*

Comentário final sobre o livro 3.2. *Observamos que a obra apresenta no capitulo 7 boas contextualizações e pouquíssimas contextualizações inadequadas, contudo não trouxe uma conexão entre a função exponencial e matrizes.*

3.3 Analise do livro Conexões com a Matemática - 1° ano do ensino médio

Iremos analisar nesse o livro o capitulo 7, função exponencial, que se inicia na a partir da página 149, as contextualizações encontradas nos exercícios oferecidos.

A introdução da função exponencial nessa obra segue com a mesma caracterização encontrada nos livros anteriores, começando com as potências e as suas propriedades, trazendo exemplos de contextualizações no decorrer do seu texto básico.

Exemplo 3.3.1. *(Exercício 16, retirado da página 158) Certo montante pode ser calculado pela fórmula* $M = C \cdot (1+i)^t$*, em que C é o capital, i é a taxa corrente e t é o tempo. Com um capital de R\$ 20.000,00, a uma taxa anual de 12%*$(i = 0,12)$*, qual será o montante após 3 anos ?*

Comentário 3.3.1. *Consideramos o exemplo 3.3.1 sendo uma boa contextualização por ser uma caracterização da realidade, pois existe a aplicação financeira que possibilita ter ganhos de até 14,4 %, pesquisa realizada no dia 17/08/18 às 16:16 horas no site https : //www.btgpactualdigital.com/blog/investimentos /poupanca/rendimento − da − poupanca.*

Exemplo 3.3.2. *(Exercício 13, retirado da página 163.) (Enem) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, exitem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões lineares. As formulas que determinam esses índices são:*

Tabela 3.1: Índice de massa corporal

$IMC = \dfrac{massa(Kg)}{[altura(m)]^2}$	$RIP = \dfrac{altura(cm)}{[massa(Kg)]^{\frac{1}{3}}}$

Fonte: Araujo, C.G.S.; RICARDO, D.R.; Índice de massa corporal: um questionamento científico baseado em evidencias. Arq. Bras. Cardiologia, v.79, n.1,2002(adaptado)

Se uma menina, com $64Kg$ *de massa, apresenta IMC igual a* $25kg/m^2$*, então ela possui RIP igual a:*

a) $0,4cm/Kg^{\frac{1}{3}}$

b) $2,5cm/Kg^{\frac{1}{3}}$

c) $8cm/Kg^{\frac{1}{3}}$

d) $20cm/Kg^{\frac{1}{3}}$

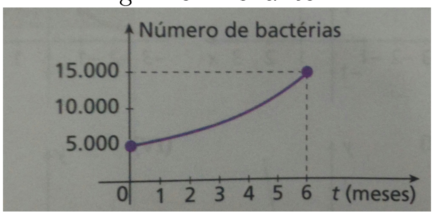
e) $40cm/Kg^{\frac{1}{3}}$

Comentário 3.3.2. *Como o IMC e RIP são situações do cotidiano e por não trazer informações inverídicas, consideramos o exemplo 3.3.2 sendo uma contextualização boa.*

Os exemplos a seguir foram considerados contextualizações inadequadas.

Exemplo 3.3.3. *(Exercício 18, retirado da página 158) Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses.*

Figura 3.4: Gráfico 4



Fonte: Livro Conexão com a Matemática - 1° ano do ensino médio, página 158.

a) Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa?

b) Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias?

c) Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = k \cdot a^t$, determine os valores de a e k.

d) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

e) Qual é o número de bactérias após 3 meses?

Comentário 3.3.3. *O exemplo 3.3.3 trata de uma situação improvável. Em pesquisa realizada nos sites https : //brasilescola.uol.com.br/biologia/reproducao − das − bacterias.htm e https : //www.sobiologia .com.br/conteudos/Reinos/biomonera3.php, observamos que uma bactéria em condições ideais se reproduzem muito rapidamente, basicamente se duplicam a cada vinte minutos. Portanto consideramos como uma contextualização inadequada, devido ao fato de que a quantidade inicial de bactéria e de 5000, sendo impossível ter apenas 16000 bactérias no final de 6 meses.*

Exemplo 3.3.4. *(Exercício 25, retirado da página 160.) (Unicamp - SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.*

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial $(t = 0)$ seja igual a 1.024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.

b) Qual é o tempo minimo para que a população se reduza a $\dfrac{1}{8}$ da população inicial?

c) Esboce o gráfico da função $f(t)$ para $t \in [0, 40]$.

Comentário 3.3.4. *O exemplo 3.3.3 trata de uma situação possível, porém exemplo não traz dados concretos, reais. Assim, consideramos como o exemplo 3.3.3 uma contextualização inadequada, conforme conceitos predefinidos na introdução desse capítulo.*

Comentário final sobre o livro 3.3. *Nessa obra não foi encontrado uma conexão entre a função exponencial e matrizes.*

3.4 Análise do livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 1

Iremos analisar nesse livro o capitulo 5 que se encontra a partir da página 147, destinado a função exponencial, dando ênfase às contextualizações encontradas nos exercícios.

A introdução do conteúdo se dá com a demostração de aplicabilidade da função exponencial através do crescimento populacional de uma colonia de bactérias e do juros compostos, logo após começa uma revisão das potencias, definindo em seguida a função exponencial.

Exemplo 3.4.1. *(Exercício 54, retirado da página 173) A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiação. A medida de tempo na qual a metade da quantidade do material radioativo se desintegra é denominada meia-vida ou período de semi desintegração* (P)*. A cada período de tempo* P *a quantidade de material radioativo caí a metade da anterior, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo coma quantidade inicial por meio de uma função exponencial:* $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}$ *em que* N_0 *é a quantidade inicial do material radioativo,* t *é o tempo decorrido e* P *é o valor da meia-vida do material radioativo considerado. A radioatividade faz parte da nossa vida, como quando se faz tomografia. um dos isótopos mais usados nos radiofármacos injetados nos pacientes submetidos à tomografia é o carbono - 11, cuja a meia vida é de 20 minutos. O tempo necessário, em minutos, para que uma amostra de carbono - 11 se reduza a* $\frac{1}{4}$ *do que era quando foi obtida é:*

a) 5.

b) 10.

c) 20.

d) 40.

e) 80.

Comentário 3.4.1. *O exemplo 3.4.1 é considerado uma boa contextualização devido a veracidade de suas informações, como a meia-vida do carbono - 11 que realmente e 20 minutos, dados confirmados por pesquisa realizada no dia 20 de abril de 2018, no site* $http://www.cerebromente.org.br/n01/pet/petcyclo_port.htm$.

Exemplo 3.4.2. *(Exercício 55, retirado da página 173) O carbono - 14 é um isótopo raro do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte o nível de C-14 no corpo começa a decair. Como é um isótopo radioativa de meia-vida de 5730 anos, e como é relativamente fácil saber o nível original de C-14 no corpo do seres vivos, a medição da atividade de C-14 em fóssil é uma técnica muito utilizada para dotações arqueológicas. A atividade radioativa do C-14 decaí com o tempo pós-morte seguindo a função exponencial* $A(t) = A_0 \cdot \frac{1}{2}^{\overline{5730}}$ *(com t acima), em que* A_0 *é atividade natural do C-14 no organismo vivo e* t *é o tempo decorrido em anos após morte. Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter a sua idade estimada. Verificou-se que emitida 7 radiações de C-14 por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama por hora, então a idade aproximada do fóssil, em anos, seria;*

a) 400 mil anos.

b) 200 mil anos.

c) 80 mil anos.

d) 40 mil anos.

e) 20 mil anos.

Comentário 3.4.2. *O exemplo 3.4.2 é uma boa contextualização devido a veracidade das informações contidas em sua estrutura, podemos confirmar pelo site* $https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/datacao - carbono - 14.htm$*, que a meia-vida do C - 14 e de 5730 anos.*

Exemplo 3.4.3. *(Exercício 56, retirado da página 173) Em uma certa cultura, há 1000 bactérias em determinado instante. Após 10 minutos, existem 4000. Quantas bactérias existirão em 1 hora, sabendo que elas aumentam segundo a fórmula* $P = P_0 \cdot e^{kt}$*, em que* P *é o número de bactérias,* t *é o tempo em horas e* k *é uma contante?*

Comentário 3.4.3. *O exemplo 3.4.3 não se refere qual bactéria que esta tendo esse comportamento e, em pesquisa realizada nos sites* $https://brasilescola.uol.com.br/biologia/reproducao - das - bacterias.htm$ *e* $https://www.sobiologia .com.br/conteudos/Reinos/biomonera3.php$ *no dia 19/08/2018 às 09:57, observamos que uma bactéria em condições ideais se reproduzem muito rapidamente, basicamente se duplicam a cada vinte minutos. Portanto consideramos o exemplo 3.4.3 como uma contextualização inadequada, devido ao exagero na quantidade de bactérias após 10 minutos.*

Exemplo 3.4.4. *(Exercício 58, retirado da página 173) Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico axetilcefuroxima apresenta* ***meia-vida de 3 horas.*** *Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:*

a) após 12 horas de sua ingestão?

b) após t horas de sua ingestão?

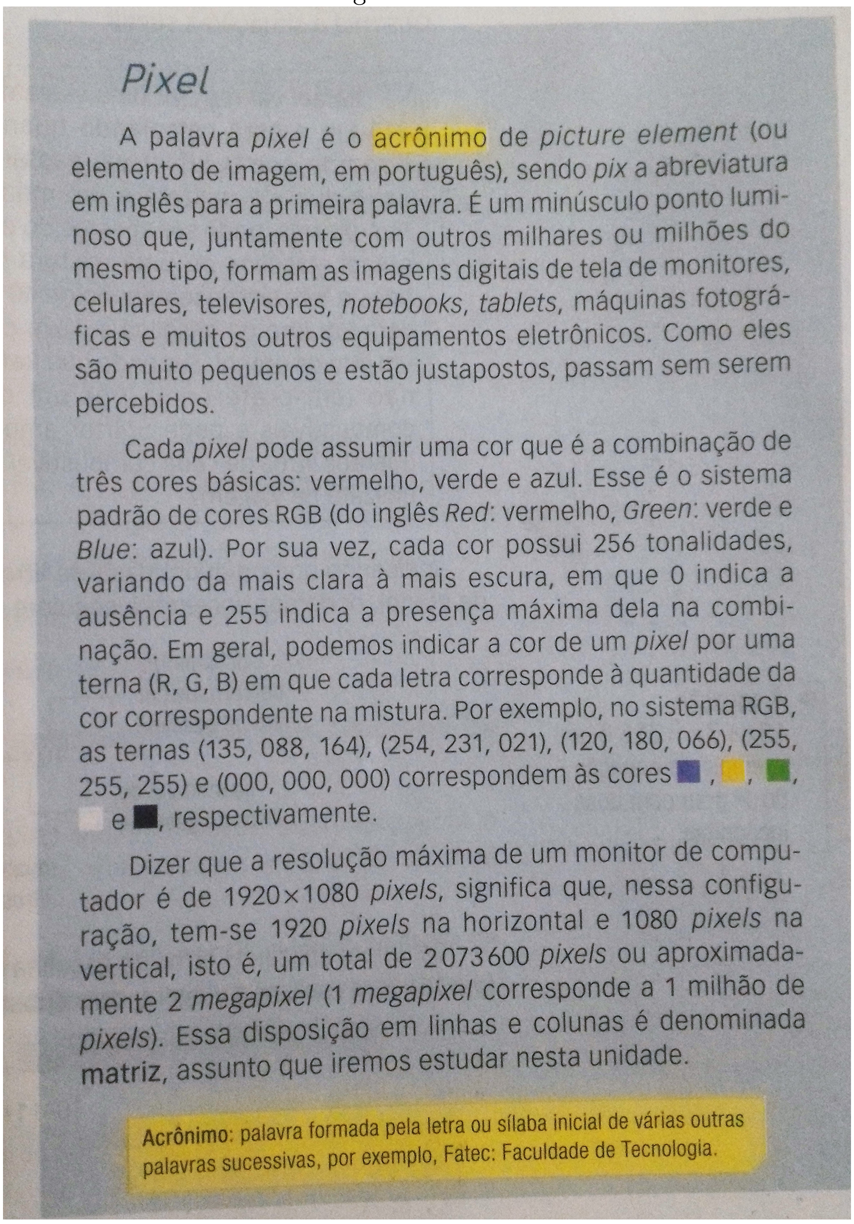
Comentário 3.4.4. *O exemplo 3.4.4 é considerado uma contextualização inadequada, devido a um erro na hora de mencionar a meia-vida do antibiótico axetilcefuroxima. Por pesquisa realizada no dia 20 de abril de 2018 no site* $http://www.anvisa.gov.br/datavisa/fila_bula/frmVisualizarBula. asppNuTransacao = 4816222014\&pIdAnexo = 2087845$*, a meia-vida do antibiótico é de 1 a 1,5 horas.*

Comentário final sobre o livro 3.4. *Não foi encontrado nesse livro uma conexão entre a função exponencial e matrizes. A quantidade de aplicações da função exponencial é bem reduzida, então finalizamos a análise por não haver mais aplicações diferentes da que já foram citadas.*

3.5 Análise do livro Matemática: interação e tecnologia - Volume 2

Analisaremos nesse livro o capitulo 3 destinado a sistemas lineares e matrizes a partir da página 83, onde daremos ênfase as contextualizações encontradas nos exercícios voltados a matrizes. O processo de aprendizagem e abordagem sobre matrizes nessa obra se inicia com a vinculação do conhecimento matricial e o uso de tabelas, introduzido com objetivo de usá-lo para demostrar a possível utilização na resolução de sistemas lineares. O tema matrizes se inicia logo após a definição e aplicação dos sistemas lineares. Dentre as informações contidas destacamos alguns exemplos de contextualizações indiretas no texto básico construtivo da obra tais como:

Figura 3.5: Pixel



Pixel

A palavra *pixel* é o acrônimo de *picture element* (ou elemento de imagem, em português), sendo *pix* a abreviatura em inglês para a primeira palavra. É um minúsculo ponto luminoso que, juntamente com outros milhares ou milhões do mesmo tipo, formam as imagens digitais de tela de monitores, celulares, televisores, *notebooks*, *tablets*, máquinas fotográficas e muitos outros equipamentos eletrônicos. Como eles são muito pequenos e estão justapostos, passam sem serem percebidos.

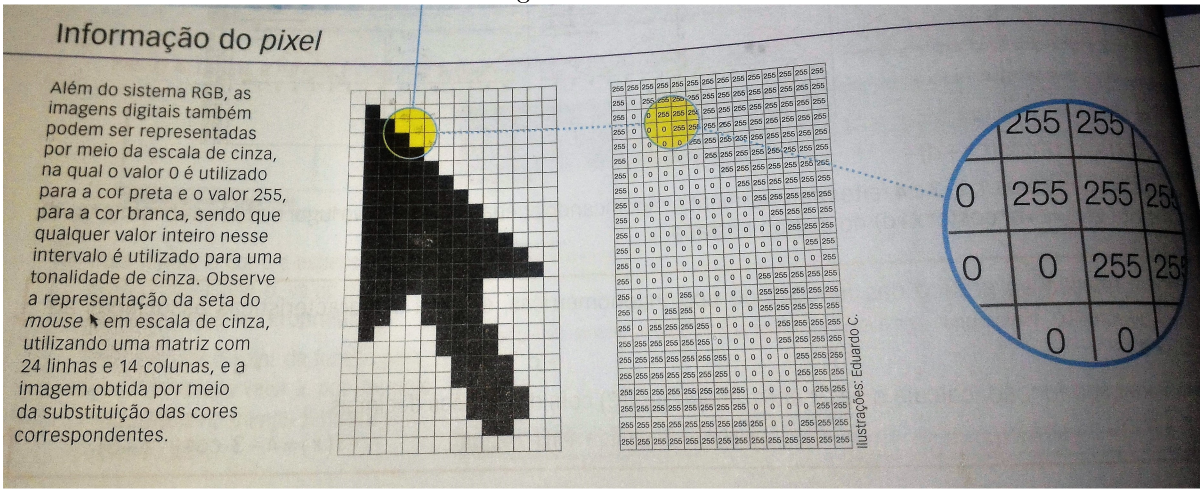
Cada *pixel* pode assumir uma cor que é a combinação de três cores básicas: vermelho, verde e azul. Esse é o sistema padrão de cores RGB (do inglês *Red*: vermelho, *Green*: verde e *Blue*: azul). Por sua vez, cada cor possui 256 tonalidades, variando da mais clara à mais escura, em que 0 indica a ausência e 255 indica a presença máxima dela na combinação. Em geral, podemos indicar a cor de um *pixel* por uma terna (R, G, B) em que cada letra corresponde à quantidade da cor correspondente na mistura. Por exemplo, no sistema RGB, as ternas (135, 088, 164), (254, 231, 021), (120, 180, 066), (255, 255, 255) e (000, 000, 000) correspondem às cores , , , e , respectivamente.

Dizer que a resolução máxima de um monitor de computador é de 1920×1080 *pixels*, significa que, nessa configuração, tem-se 1920 *pixels* na horizontal e 1080 *pixels* na vertical, isto é, um total de 2 073 600 *pixels* ou aproximadamente 2 *megapixel* (1 *megapixel* corresponde a 1 milhão de *pixels*). Essa disposição em linhas e colunas é denominada **matriz**, assunto que iremos estudar nesta unidade.

Acrônimo: palavra formada pela letra ou sílaba inicial de várias outras palavras sucessivas, por exemplo, Fatec: Faculdade de Tecnologia.

Fonte: Livro Matemática: interação e tecnologia - Volume 2, página 66.

Figura 3.6: Pixel 2



Fonte: Livro Matemática: interação e tecnologia - Volume 2, página 66.

Esses exemplos são usados para dar introdução a matrizes nessa obra. Observe que foi utilizado uma situação real e que esta presente na vida do educando, assim, mostrando de forma simples que o assunto que seria tratado no capítulo é importante para sua vivência. E, consequentemente, motivando-o para aprender e posteriormente aplicar o conhecimento adquirido.

Iremos destacar a seguir alguns exemplos de exercícios que o livro traz que são boas contextualizações para o ensino de matrizes.

Exemplo 3.5.1. *(Exercício de número 32, retirado da página 88) Observe a tabela.*

Tabela 3.2: Cinco Primeiros colocados ao final do campeonato brasileiro de futebol da série **A**, em 2015.

Equipe	Vitórias	Empates	Derrotas
Corinthians/SP	24	9	5
Atlético/MG	21	6	11
Grêmio/RS	20	8	10
São Paulo/SP	18	8	12
Internacional/RS	17	9	12

*O campeonato brasileiro de futebol da série **A** de 2015 foi disputado por 20 equipes.*

*a) Escreva uma matriz **F** que representa os dados da tabela.*

b) Determine F^t * .

*c) Qual é a posição da matriz **F** que representa a quantidade de empates da equipes do São Paulo/SP? E na matriz* F^t*?*

*d) Escreva a matriz transposta de **F** na forma de tabela.*

Comentário 3.5.1. *O exemplo 3.5.1, é considerado uma boa contextualização devido a veracidade do seus dados, ou seja, a classificação dos times no campeonato brasileiro de 2015, as vitórias, empates e derrotas são exatamente a mesma proposta pela contextualização, e podem ser conferidos pelo endereço eletrônico*

*A matriz transposta da matriz F

https : //www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro − serie − a/classificacao /2015#.WtC8WYjwbIV, acesso realizado no dia 13 de abril de 2018.

Exemplo 3.5.2. *(Exercício 40, retirado da página 92) Observe as tabelas.*

Tabela 3.3: População da Região Sul do Brasil, em 2000

	Rio Grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	4994719	2669311	4737420
Mulheres	5193079	2687049	48266038

Tabela 3.4: População da Região Sul do Brasil, em 2010

	Rio Grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	5202057	3100360	5130994
Mulheres	5488872	3148076	5313532

a) *Utilizando as linhas para representar o sexo dos habitantes e as colunas para representar a unidade da federação, escreva a matriz **A** e **B** que indicam a população da região sul do Brasil no ano de 2000 e 2010, respectivamente.*

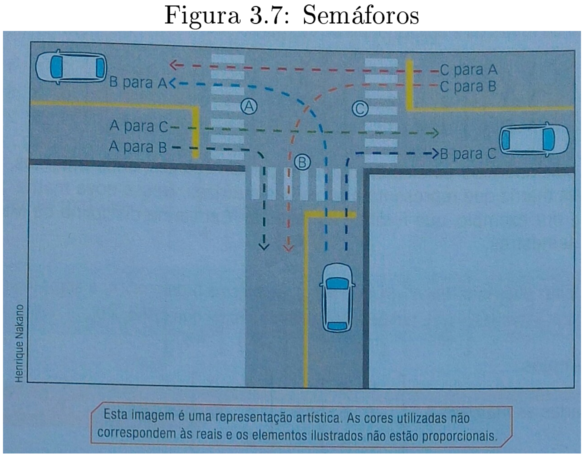
b) *Calcule $B - A$.*

c) *O que representa a matriz formada pela operação $B - A$?*

Comentário 3.5.2. *O exemplo 3.5.2 é considerado uma boa contextualização devido a veracidade de seus dados, comprovados por consulta realizada nos endereços eletrônicos https : //ww2.ibge.gov.br/home /estatistica/populacao/censo2000/tabelagrandes/_regioes211.shtm e https : //censo201.ibge.gov.br /sinopse/index.php?dados = 1R&uf = 00, no dia 13 de abril de 2018.*

Exemplo 3.5.3. *(Exercício Semáforos e matrizes, retirado da pagina 89.) O esquema representa o encontro de duas vias de mão dupla em que o fluxo de veículos que passam pelo ponto A, B e C é organizado por três semáforos.*

Figura 3.7: Semáforos



Fonte: Livro Matemática: interação e tecnologia - Volume 2, páginas 89.

Na matriz a seguir, os valores indicam tempo, em minutos, que cada semáforo fica aberto (verde) a cada período de 2 minutos, no sentido de acesso na via indicada pela linha para via indicada pela coluna da matriz. O valor 1,5 indicado pelo elemento a_{12}, por exemplo, indica o semáforo que dá acesso da via A(linha A) para a via B (coluna B) fica aberto 1,5 minutos a cada período de 2 minutos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Quanto tempo fica aberto o semáforo que dá acesso de:

- *B para C, considerando um período de 2 minutos?*
- *C para B, considerando um período de 2 minutos?*
- *A para C, considerando um período de 2 minutos?*

b) Considere que entrem em cada via 20 veículos por minuto, qual a quantidade máxima de veículos que podem ir de:

- *C para A,em 6 minutos?*
- *B para A,em 30 minutos?*
- *A para B,em 2 horas?*

Comentário 3.5.3. *O exemplo 3.5.3 relaciona algo simples do cotidiano com a linguagem matricial. Portanto, o consideramos como uma boa contextualização.*

Comentário final sobre o livro 3.5. *Na análise do livro não foi encontrado nenhuma contextualização que o nosso ver, possa ser considerada inadequada, nem contextualizações que envolvam matrizes e função exponencial.*

3.6 Análise do livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2

Nesse livro iremos analisar o capitulo que se refere a matrizes e suas operações. Inicialmente observamos que se destina o capitulo 5 a partir da página 65 para esse tópico, e que o pontapé inicial sobre o assunto se dá com uso de tabelas, como veremos a seguir:

Figura 3.8: Censos Demográficos

População nos Censos Demográficos, segundo as Grandes Regiões, as Unidades da Federação e a situação do domicílio – 1980/2010

Ano	Situação do domicílio	BRASIL	Região Norte	Região Nordeste	Região Sudeste	Região Sul	Região Centro--Oeste
1980[1]	Urbana	82 013 375	3 398 897	17 959 640	43 550 664	12 153 971	4 950 203
	Rural	39 137 198	3 368 352	17 459 516	9 029 863	7 226 155	2 053 312
1991[2]	Urbana	110 875 826	5 931 567	25 753 355	55 149 437	16 392 710	7 648 757
	Rural	36 041 633	4 325 699	16 716 870	7 511 263	5 724 316	1 763 485
2000[2]	Urbana	137 755 550	9 002 962	32 929 318	65 441 516	20 306 542	10 075 212
	Rural	31 835 143	3 890 599	14 763 935	6 855 835	4 783 241	1 541 533
2010[2]	Urbana	160 925 792	11 644 509	38 821 246	74 696 178	23 260 896	12 482 963
	Rural	29 830 007	4 199 945	14 260 704	5 668 232	4 125 995	1 575 131

(1) População recenseada. (2) População residente.

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1980, 1991, 2000 e 2010. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>.Acesso em: 10 mar. 2016.

Fonte: Livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2, página 65.

Figura 3.9: Produção, consumo de feijão

Produção, consumo e importação de feijão (mil toneladas)

Ano	Produção		Consumo		Importação	
	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior
2015/16	3 363	4 022	3 357	3 778	150	296
2016/17	3 334	4 267	3 364	3 959	149	357
2017/18	3 345	4 290	3 371	4 100	149	403
2018/19	3 355	4 313	3 379	4 219	149	442
2019/20	3 366	4 335	3 386	4 326	149	476
2020/21	3 376	4 358	3 393	4 423	148	507
2021/22	3 387	4 380	3 400	4 512	148	536
2022/23	3 397	4 403	3 407	4 596	148	562
2023/24	3 408	4 425	3 414	4 675	147	587
2024/25	3 418	4 447	3 421	4 751	147	611

Fonte: Projeções do agronegócio Brasil 2014/15 a 2024/25 — Projeções de longo prazo. jul. 2015. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/PROJECOES_DO_AGRONEGOCIO_2025_WEB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Fonte: Livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2, página 66.

É importante destacar que as figuras 3.8 e 3.9 são boas contextualizações, pois tratam-se de situações reais. Dados comprovados por pesquisa realizada nos endereços eletrônico *https : //censo2010.ibge.gov.br /sinopse/index.php?dados = 8* e *http : //www.agricultura.gov.br/assuntos /politica−agricola/todas−publicacoes−de−politica−agricola/projecoes−do−agronegocio/projecoes−do−agronegocio−brasil−2014 − 2015 − a − 2024 − 2025.pdf/view*, pesquisa realizada no dia 14 de abril de 2018.

Exemplo 3.6.1. *(Exercício 10, retirado da pagina 70) Na matriz a seguir, estão representados as quantidades de sorvetes de 1 bola de 2 bolas comercializados no bimestre de uma ano em uma sorveteria:*

$$A = \begin{pmatrix} 1320 & 1850 \\ 1485 & 2040 \end{pmatrix}$$

Figura 3.10: Sorvetes

Fonte: Livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2, página 70.

Cada elemento a_{ij} dessa matriz representa o número de unidades do tipo **i** *($i = 1$ representa a bola e $i = 2$, duas bolas) vendidas no mês* **j** *($j = 1$ representa janeiro e $j = 2$, fevereiro).*

a) Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que os de uma bola?

c) Se o sorvete de um bola custa R$ 3,00 e o de duas bolas custa R$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no primeiro bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

Comentário 3.6.1. *O exemplo 3.6.1 foi considerado uma boa contextualização devido a sua conexão com a realidade, e seus dados serem possíveis no mundo real.*

Exemplo 3.6.2. *(Exercício 10, retirado da pagina 70) As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A,B e C) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, Historia, e Física, representados por suas iniciais), nos meses de março e abril.*

Tabela 3.5: Março

	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

Tabela 3.6: Abril

	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) Qual é a matriz que representa o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre em cada disciplina?

b) No primeiro bimestre, qual aluno teve maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em Historia?

Comentário 3.6.2. *O exemplo 3.6.2 demonstra uma situação do cotidiano, vinculando com conceito matricial, por esse motivo consideramos como uma boa contextualização.*

Exemplo 3.6.3. *(Exercício 50, retirado da pagina 90) Uma dona de casa registrou, na tabela seguinte, as quantidades (em gramas) de frutas compradas em duas semanas consecutivas, em um mesmo supermercado:*

Tabela 3.7: Quantidades (g) e Fruta

	Banana	Maçã	Laranja	Mamão
$1^{c}irc$ semana	2700	2430	3450	4155
$2^{c}irc$ semana	1640	3120	3390	3700

Os preços do quilograma (Kg) da banana, maçã, laranja e mamão, em vigor nesse período, eram respectivamente R$ 2,35, R$3,40, R$ 1,70 e R$ 2,60.

Determine, a partir do cálculo de um produto de matrizes, a quantia, em reais, gasta pela dona de casa, em cada semana.

Comentário 3.6.3. *O exemplo 3.6.3 é uma representação da realidade com o uso do conceitos matriciais, por esse motivo consideramos como uma boa contextualização.*

Iremos destacar a seguir algumas contextualizações encontradas nas páginas 91, 92 e 93 dessa obra.

Figura 3.11: Computação gráfica

Aplicações

Computação gráfica e matrizes

As transformações geométricas no plano (ou transformações 2D – duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para a construção de figuras e produção de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, além de servir de ferramenta de auxílio em várias áreas da atividade humana.

As três transformações básicas são: **translação**, **rotação** e **escala**. Vamos estudá-las, relacionando-as com a teoria das matrizes e com a Trigonometria.

Representaremos um ponto qualquer P(x, y) de uma figura pela matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o ponto correspondente P'(x', y'), obtido pela transformação, por $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Para cada transformação, vamos obter uma relação entre **P** e **P'** por meio de uma matriz (**M**) de transformação.

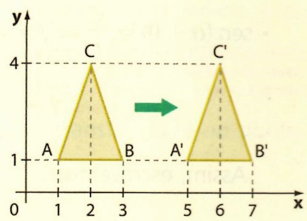
EVERETT COLLECTION/AGB PHOTO

O filme *Guardiões da Galáxia* apresenta personagens criados por computação gráfica, como o Groot.

Translação

A translação é uma transformação que desloca uma figura sem alterar sua forma e suas dimensões. Esse deslocamento pode ser vertical, horizontal ou segundo uma certa direção.

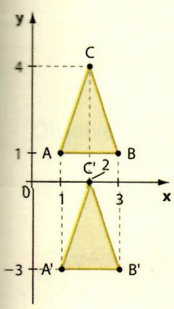
Consideremos o triângulo ABC ao lado, o qual é transformado no triângulo A'B'C' por uma translação horizontal.



Observe que, nessa transformação, a abscissa de cada ponto do △ABC é deslocada quatro unidades à direita, e a respectiva ordenada não sofre alteração.

Temos, portanto: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, isto é, P' = P + M, sendo $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

Suponha agora que o △ABC fosse deslocado, na vertical, quatro unidades para baixo, como mostra a figura seguinte:



Observe, no △A'B'C', obtido pela translação, que a ordenada de cada um de seus pontos é deslocada quatro unidades para baixo e a respectiva abscissa não sofre alteração.

Assim, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e, desse modo, P' = P + M, sendo

$M = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

PENSE NISTO:

Qual é a matriz que transforma o triângulo de vértices A(1, 1), B(3, 1) e C(2, 4) no triângulo de vértices A'(5, 6), B'(7, 6) e C'(6, 9)?

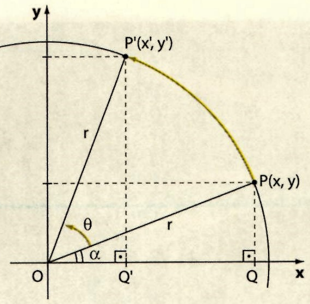
Se P(x, y) é um ponto do triângulo ABC e P'(x', y') é um ponto do triângulo A'B'C', temos $P' = P + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, ou seja, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Fonte: Livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2, página 91.

Figura 3.12: Computação gráfica 2

Rotação

Vamos considerar unicamente a rotação ("giro") de um ponto P(x, y), em torno da origem (0, 0), de um ângulo de medida θ graus ($\theta > 0$), tomado no sentido anti-horário.



De acordo com o $\triangle$OPQ, o ponto P(x, y) tem suas coordenadas expressas por:

$$x = r \cdot \cos \alpha \quad (1)$$
$$y = r \cdot \text{sen}\, \alpha \quad (2)$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a medida do raio da circunferência de centro na origem, passando por **P** e **P'**.

Ao girarmos **P** de um ângulo de medida θ (graus), ele se transforma no ponto **P'**. Da Trigonometria, obtemos as fórmulas sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a e cos (a + b) = cos a · cos b − sen a · sen b, válidas para quaisquer **a** e **b** reais. De acordo com o $\triangle$OP'Q', temos:

- $\cos(\alpha + \theta) = \dfrac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cdot (\cos \alpha \cos \theta - \text{sen}\, \alpha\, \text{sen}\, \theta)$ e, usando 1 e 2, escrevemos:

$$x' = r \cdot \left(\frac{x}{r} \cos \theta - \frac{y}{r} \text{sen}\, \theta\right) \Rightarrow \boxed{x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \text{sen}\, \theta}$$

- $\text{sen}(\alpha + \theta) = \dfrac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \text{sen}(\alpha + \theta) = r \cdot (\text{sen}\, \alpha \cos \theta + \text{sen}\, \theta \cos \alpha)$ e, usando 1 e 2, escrevemos:

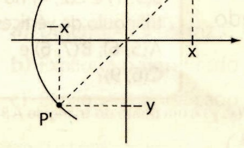
$$y' = r \cdot \left(\frac{y}{r} \cos \theta + \text{sen}\, \theta \cdot \frac{x}{r}\right) \Rightarrow \boxed{y' = y \cdot \cos \theta + x \cdot \text{sen}\, \theta}$$

Assim, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen}\, \theta \\ \text{sen}\, \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é, P' = M · P, sendo $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen}\, \theta \\ \text{sen}\, \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Observe a figura seguinte, em que o ponto P(x, y) é rotacionado em torno da origem, no sentido anti-horário, de 180°. Quais são suas novas coordenadas?



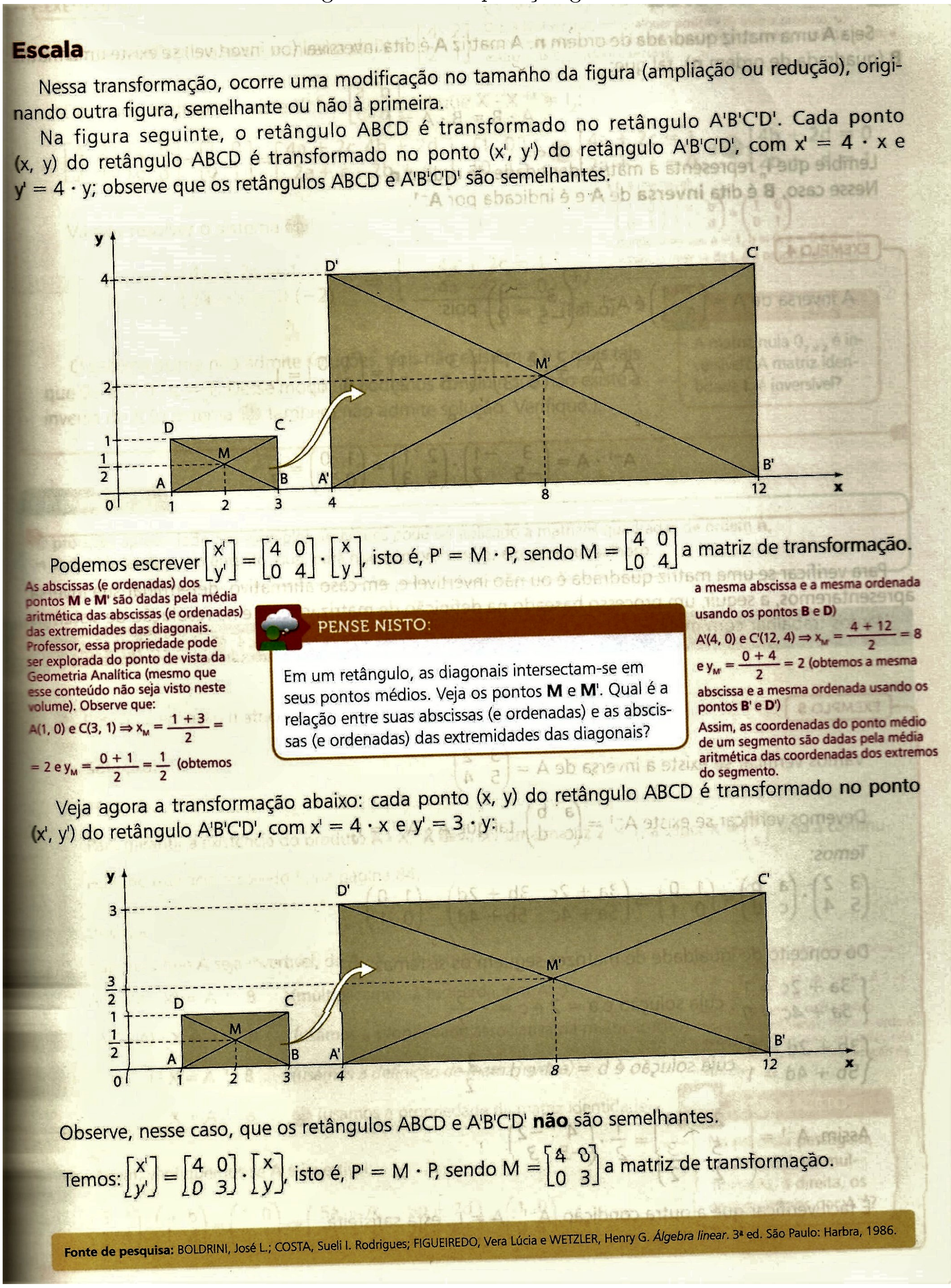
Como $\theta = 180°$, temos:

$$M = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\, 180° \\ \text{sen}\, 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } P' = M \cdot P \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x \text{ e } y' = -y$$

Fonte: Livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2, página 92.

Figura 3.13: Computação gráfica 3



Escala

Nessa transformação, ocorre uma modificação no tamanho da figura (ampliação ou redução), originando outra figura, semelhante ou não à primeira.

Na figura seguinte, o retângulo ABCD é transformado no retângulo A'B'C'D'. Cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$; observe que os retângulos ABCD e A'B'C'D' são semelhantes.

Podemos escrever $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

As abscissas (e ordenadas) dos pontos **M** e **M'** são dadas pela média aritmética das abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais. Professor, essa propriedade pode ser explorada do ponto de vista da Geometria Analítica (mesmo que esse conteúdo não seja visto neste volume). Observe que: A(1, 0) e C(3, 1) $\Rightarrow x_M = \frac{1+3}{2} = 2$ e $y_M = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ (obtemos a mesma abscissa e a mesma ordenada usando os pontos **B** e **D**) A'(4, 0) e C'(12, 4) $\Rightarrow x_{M'} = \frac{4+12}{2} = 8$ e $y_{M'} = \frac{0+4}{2} = 2$ (obtemos a mesma abscissa e a mesma ordenada usando os pontos **B'** e **D'**) Assim, as coordenadas do ponto médio de um segmento são dadas pela média aritmética das coordenadas dos extremos do segmento.

PENSE NISTO:

Em um retângulo, as diagonais intersectam-se em seus pontos médios. Veja os pontos **M** e **M'**. Qual é a relação entre suas abscissas (e ordenadas) e as abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais?

Veja agora a transformação abaixo: cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 3 \cdot y$:

Observe, nesse caso, que os retângulos ABCD e A'B'C'D' **não** são semelhantes.

Temos: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Fonte de pesquisa: BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia e WETZLER, Henry G. *Álgebra linear*. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1986.

Fonte: Livro Matemática: ciências e aplicações: ensino médio - Volume 2, página 92.

Comentário 3.6.4. *As contextualizações demostradas nas figuras 3.11 , 3.12 e3.13, são transformações geométricas no plano: translação, rotação e escala. Além disso faz analogia a computação gráfica e utilizando o contexto do filme Guardiões da Galáxia na sua estrutura, vinculando o abstrato da matéria com o cotidiano do aluno. Assim, consideramos o exemplo como uma boa contextualização.*

Comentário final sobre o livro 3.6. *Observamos a inexistência de contextualizações inadequadas nessa obra, e consideramos as contextualizações encontradas em seus exercícios tanto quanto no decorrer dos textos informativos do capítulo 5 de muito valor educacional. Contudo, não encontramos uma conexão entre função exponencial e matrizes nesse livro.*

3.7 Análise do livro Conexões com a Matemática - 2° ano do ensino médio

Analisaremos nesse livro o capítulo 8 a partir da página 160, destinado ao estudo das matrizes e determinantes. O capítulo se inicia com a definição de matrizes com a utilização de tabelas, logo após são dados alguns exemplos.

Exemplo 3.7.1. *(Exercício 25, retirado da página 171.) (Ibmec) Uma agência de propaganda nas campanhas publicitárias que elabora para seus clientes três tipos de material para divulgação em papel:*

- *impresso tipo PB, em preto e branco no papel simples;*
- *impresso tipo CK, colorido no papel simples;*
- *impresso tipo CKX, colorido no papel mais grosso;*

Tabela 3.8: Tabela 1

Tipo	PB	CK	CKX
Gráfica A	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica B	R$ 3,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica C	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 6,00

a) *Determine a gráfica que, para fazer 300 impressões do tipo PB, 150 do tipo CK e 200do tipo CKX, apresentaria o menor custo.*

b) *No ultimo ano, a agência fez 25% dos seus impressos com a gráfica A, 45% co m a gráfica B e o restante com a gráfica C. Supondo que, em cada campanha deste último ano, a agencia sempre fez os três tipos de impressão com a mesma gráfica e que os preços unitários foram os valores dados na tabela 3.7.1, determine o custo unitário médio que a agência teve em cada tipo de impressão.*

Comentário 3.7.1. *O exemplo 3.7.1 relaciona a impressão de uma material para divulgação com o conhecimento matricial, algo simples mas que esta presente no nosso cotidiano. Assim, como o exemplo destaca uma situação real consideramos uma boa contextualização.*

Exemplo 3.7.2. *(Exercício 3, retirado da página 175.) (UEL-PR) Durante a primeira fase da copa do mundo realizada na frança,em 1998, o grupo A era formado por quatro países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada país, registrados na tabela I.*

Tabela 3.9: Tabela I

Tabela I	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem uma pontuação que pode ser observada na tabela II.

Tabela 3.10: Tabela II

Tabela II	Pontuação
Vitórias	3
Empate	1
derrota	0

A matriz $C = \begin{bmatrix} Noruega \\ Marrocos \\ Esccia \\ Brasil \end{bmatrix}$*, que representa a pontuação final de cada país, ao termino dessa primeira fase,é:*

a) $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Comentário 3.7.2. *O exemplo anterior é considerado uma boa contextualização devido a veracidade de seus dados, comprovados por pesquisa realizada no site* $http://esportes.terra.com.br/futebol/copa2006/interna/0,,OI685678-EI5509,00.html$*, no dia 21 de abril de 2018 e também por vincular o conhecimento matricial a um evento real e de importância na vida da sociedade.*

Exemplo 3.7.3. *(Exercício 11, retirado da página 176.) (UFSC) A matriz* $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *está sedo usada para representar as coordenadas dos vértices* $A(0,0), B(2,0)eC(4,3)$ *de um triângulo* ABC*. Multiplicando-se* M *por uma constante* $k > 0$*, a matriz resultante da operação indicará os vértices do triângulo* $A'B'C'$*, de acordo com o mesmo padrão anterior de representação. Em tais condições, a área do triângulo* $A'B'C'$ *será igual a:*

a)$3k$ *b)*$6k$ *c)*k^2 *d)*$3k^2$ *e)*$6k^2$

Comentário 3.7.3. *O exemplo 3.7.3 utiliza conceito de geometria analítica com aplicação na matrizes. O que demostrar a existência de conexão real entre os diversos temas e conceitos da matemática. Portanto, consideramos como uma boa contextualização.*

Comentário final sobre o livro 3.7. *Nesse livro não foi encontrado nenhuma contextualização que possa ser considerado inadequada, e nem uma conexão entre função exponencial e matrizes. Porém a última página do capítulo traz uma autoavaliação que deixaremos a seguir, como exemplo didático válido para enriquecimento da aula do professor leitor dessa pesquisa.*

Figura 3.14: Autoavaliação

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Uma matriz de ordem 2 é uma matriz: alternativa b

a) identidade.
b) quadrada.
c) nula.
d) linha.

2. Só existe adição ou subtração de matrizes se elas forem: alternativa c

a) opostas.
b) nulas.
c) de mesmo tipo.
d) quadradas.

3. Sejam as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$. Os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostos.
c) respectivamente, dos tipos 3×3 e 2×2.
d) respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

4. As matrizes $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostas.
c) identidades.
d) diagonais.

5. Na [redacted] de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. alternativa a

a) multiplicação
b) adição
c) subtração
d) igualdade

6. Multiplicando-se as matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtém-se uma matriz de ordem: alternativa a

a) 3×4
b) 3×5
c) 2×2
d) 3×3

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade: alternativa c

a) associativa.
b) distributiva à esquerda.
c) comutativa.
d) distributiva à direita.

8. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ é: alternativa d

a) -10
b) 22
c) 10
d) -22

9. Se $\det A \neq 0$, então a matriz A é: alternativa d

a) matriz linha.
b) nula.
c) diagonal.
d) nenhuma das anteriores.

10. Se $\det A = 5$ e A é uma matriz de ordem 2, podemos afirmar que: alternativa d

a) $\det(-A) = -5$
b) $\det\left(\frac{A}{10}\right) = 0{,}5$
c) $\det(2A) = 10$
d) $\det(2A) = 20$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar e classificar uma matriz.	X		X	X		X			X	
Operar com matrizes.		X	X		X	X	X			
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.								X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	160 a 165	165 a 167	160 a 171	160 a 165	163 a 171	160 a 171	168 a 171	172 e 173	160 a 165, 172 e 173	172 e 173

177

Fonte: Livro Conexões com a Matemática - 2° ano do ensino médio, pagina 177.

Consideramos essa auto avaliação de muito valor. Contudo, acreditamos que haveria a necessidade de exigir a resolução das operações matriciais para se alcançar a resposta, o que não acontece nas questões. Poderia ter usado mais questões voltadas para manipulação de adição, subtração e multiplicação de matrizes. e também questões contextualizadas em sua estrutura, visto que no capítulo havia questões desse tipo. Alguns exemplos que poderiam ter sido usados são;

Exemplo 3.7.4. *Em uma editora a venda de livros de Matemática, Português e Química no 1º trimestre de um ano estão representadas na matriz, onde as linhas representam os livros e as colunas os meses.*

$$A = \begin{bmatrix} 20000 & 32000 & 45000 \\ 10000 & 20000 & 8700 \\ 15000 & 2000 & 20100 \end{bmatrix}$$

.

a) Quantos livros de matemática foram vendidos?

b) Qual o livro mais vendido no mês de março?

c) Em janeiro foram vendidos quantos livros de Química?

d) Quantos livros de Português foram vendidos nos três meses?

Exemplo 3.7.5. *(UFU) Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Então* $A^4 + 2A^3 + 4A^2 + 8A$ *é igual a:*

a) A^6

b) A^8

c) A^{10}

d) A^5

Exemplo 3.7.6. *(PM ES ? AOCP) Considere as duas matrizes A e B a seguir:*

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 40 \\ 30 & 40 & 50 \\ 60 & 50 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Cada linha da matriz A indica a pontuação obtida, em cada tentativa, em uma prova de tiro ao alvo por um competidor. Assim, a primeira linha indica as pontuações do competidor X, a segunda linha indica as pontuações do competidor Y e a terceira linha indica as pontuações do competidor Z. Obtendo-se uma matriz $C = A.B$, *na matriz C aparece a nota de desempenho final de cada um dos três competidores X, Y e Z, respectivamente, na primeira, na segunda e na terceira linha. Dessa forma, é correto afirmar que:*

a) O competidor X obteve a menor nota de desempenho final, igual a 250.

b) O competidor Y obteve a maior nota de desempenho final, igual a 260.

c) O competidor Z obteve a menor nota de desempenho final, igual a 230.

d) Os competidores X e Y obtiveram a mesma nota de desempenho final.

e) Os competidores X e Z obtiveram a mesma nota de desempenho final.

E assim terminaremos nossa análise das contextualizações encontradas nos exercícios dessa obra.

3.8 Análise do livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2

Iremos analisar nessa obra o capítulo 4 intitulado Matrizes e determinantes onde dedicaremos nossa atenção as contextualizações empregadas nos exercícios. O capítulo se inicia com uma breve analogia a obra Smaller and Smaller de Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) e a aplicação das matrizes nas transformações geométricas e também utiliza a tabela como porta de entrada para o conceito matricial. Em seu texto básico o autor insere muitas contextualizações como exemplos, o que não ocorre em seus exercícios. Porém, dentre as poucas contextualizações encontradas nos exercícios destacamos.

Exemplo 3.8.1. *(Exercício 30, retirado da pagina 70) Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três tipos modelos de caminhões, com a seguinte especificação:*

Tabela 3.11: Números de eixos e rodas de cada modelo de caminhão

Componentes/ Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Tabela 3.12: Números caminhões nos meses de janeiro e fevereiro

Componentes/ Meses	janeiro	fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Usando a multiplicação de matrizes, respondam: nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada?

Comentário 3.8.1. *O exemplo 3.8.1 refere-se a uma situação real e utiliza a manipulação de matrizes em sua estrutura, por isso consideramos como uma boa contextualização. Porém acreditamos que o exercício poderia ter peguntado algo mais, como: Quantos eixos e rodas do tipo A e B ou B e C deverão ser produzidas no mês de janeiro? no mês de fevereiro? Poderíamos também no final acrescentar o custo de cada eixo e roda na forma de tabelas e logo depois pedir o valor de custo total nos meses, por exemplo:*

Modelos/eixos	*Valor(R$)*
A	*1.250,00*
B	*2.125,00*
C	*3.250,00*

e

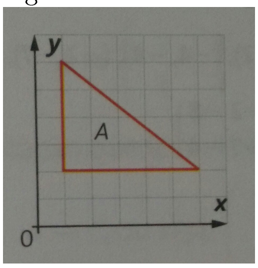
Modelos/rodas	*Valor(R$)*
A	*990,00*
B	*1.150,00*
C	*1.250,00*

,

e assim utilizando a multiplicação de matries alcançar o resultado pedido.

Exemplo 3.8.2. *(Exercício 49, retirado da pagina 87) Copie o diagrama abaixo em uma malha quadriculada. Translade o triangulo A de acordo com cada matriz coluna dada e desenhe o triângulo transladado.*

Figura 3.15: Gráfico 5



Fonte: Livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2, página 87.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, *dando origem ao triangulo B.*

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, *dando origem ao triangulo C.*

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, *dando origem ao triangulo D.*

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, *dando origem ao triangulo E.*

e) Em cada caso, escreva a adição de matrizes correspondentes.

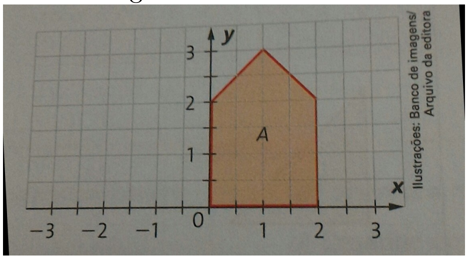
Comentário 3.8.2. *O exemplo 3.8.2 utiliza o conceito de transformação geométrica*[†] *(translação) , portanto consideramos como uma boa contextualização. Contudo, acreditamos que o exemplo 3.8.2 poderia ter definido o significado de translação. Poderia ter disponibilizando exemplos de matrizes rotação e reflexão possibilitando a utilização desses conhecimentos em sua estrutura. Por exemplo: A matriz de reflexão em torno do eixo x* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ou em torno do eixo y* $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 3.8.3. *(Exercício 55, retirado da pagina 92) Transformem a figura a seguir usando a matriz de transformação escala:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[†] Transformação geométrica é uma aplicação bijectiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de forma que, a partir de uma figura geométrica original, forma-se outra figura geometricamente igual ou equivalente. Uma transformação geométrica é, portanto, uma correspondência, um a um, entre pontos de um mesmo plano ou de planos diferentes

Figura 3.16: Gráfico 6



Fonte: Livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2, página 92.

a) Qual é a área da figura A?

b) Qual é a área de cada figura transformada?

c) Qual é a relação da figura inicial A e a área de cada figura transformada? O que ocorreu com a figura A após sofrer cada transformação?

Comentário 3.8.3. *O exemplo 3.8.3 utiliza o conceito de transformação geométrica , portanto consideramos como uma boa contextualização.*

Infelizmente não encontramos diversidade de contextualizações nessa obra, os poucos exercícios contextualizados encontrados são voltados para transformação geométrica.

Entre as poucas aplicações encontradas, gostaríamos de destacar a criptografia com uma boa contextualização, apesar de não fazer parte do cotidiano da maioria dos educandos. No próximo exemplo, iremos reproduzir o único exercício sobre essa aplicação que é proposto nessa obra.

Exemplo 3.8.4. *(Exercício 55, retirado da pagina 92)*

CRIPTOGRAFIA E MATRIZES

De acordo com a tabela numérica temos os números: 3,18, 9, 16, 20, 15, 7, 18, 1, 6, 9, 1, 28, 5, 28, 13, 1, 20, 18, 9, 26, 5, 19 e 27. Devemos arrumar a sequência de números acima em uma matriz M de duas linhas:

Figura 3.17: Matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 9 & 16 & 20 & 15 & 7 & 18 & 1 & 6 & 9 & 1 \\ 28 & 5 & 28 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 & 27 \end{pmatrix}$$

Fonte: Livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2, página 93.

O remetente utiliza a matriz A para codificar a mensagem fazendo $N = AM$ e, obtém a matriz N.

Figura 3.18: Matriz 2

$$BN = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37 & 59 & 55 & 61 & 61 & 65 & 39 & 63 & 29 & 23 & 46 & 30 \\ 90 & 51 & 102 & 71 & 43 & 90 & 68 & 63 & 80 & 27 & 75 & 83 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 18 & 9 & 16 & 20 & 15 & 7 & 18 & 1 & 6 & 9 & 1 \\ 28 & 5 & 28 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 & 27 \end{pmatrix} = M$$

Fonte: Livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2, página 93.

Os elementos de N constituem a mensagem codificada: 37,59, 55, 61, 61, 65, 39, 63, 29, 23, 46, 30, 90, 51, 102, 71, 43, 90, 68, 63, 80, 27, 75 e 83.

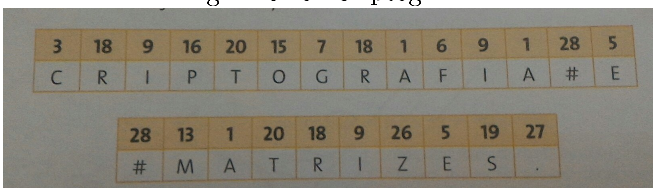
Quando a mensagem codificada chega ao destinatário, ele utiliza a matriz decodificadora B para desfazer os procedimentos anteriores; já deve ter sido estabelecido que :

$$BN = BAM = IM = M$$

Com os números da mensagem codificada recebida, o destinatário constrói uma matriz com duas linhas (N) e efetuar o produto BN. Veja:

Os elementos da matriz M obtida formam a sequência de números: 3, 18, 9, 16, 20, 15, 7, 18, 1, 6, 9, 1, 28, 5, 28, 13, 1, 20, 18, 9, 26, 5, 19, e 27, cuja decodificação é:

Figura 3.19: Criptografia



3	18	9	16	20	15	7	18	1	6	9	1	28	5
C	R	I	P	T	O	G	R	A	F	I	A	#	E

28	13	1	20	18	9	26	5	19	27
#	M	A	T	R	I	Z	E	S	.

Fonte: Livro Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 2, página 93

(Exercício 57 - página 93) Codifiquem uma mensagem utilizando os códigos dados acima, depois entreguem para outro grupo decodificar.

Comentário final sobre o livro 3.8. *Infelizmente, não foi encontrado nessa obra outro tipo de contextualização em seus exercícios além dessas apresentadas ate aqui. Não encontramos uma conexão entre os tópicos função exponencial e matrizes.*

Capítulo
4

EXPONENCIAL DE MATRIZ

Essa seção é dedicada a demostração da existência da relação entre a função exponencial e as matrizes. Para tal, serão usados o conceito de exponencial de matrizes, exemplos voltados apenas para manipulação, pois o intuito é de mostrar como se chega de fato a exponencial de matrizes.

A função exponencial e matrizes não são relacionadas no cotidiano escolar médio. Isso acontece devido a separação dos tópicos das disciplinas no CBC (conteúdo básico comum), pois geralmente a função exponencial é apresentada para o educando no 1° ano do ensino médio, já matrizes são apresentadas no 2° ano. Essa separação é um dos fatores preponderantes que causa a não existência da interdisciplinaridade de ambas nos livros didáticos ofertados aos alunos no ensino médio. Um momento oportuno para juntar esses conceitos no ensino médio seria no 3° ano, pois nesse momento o educando já esta familiarizado com os tópicos de função exponencial e matrizes, e já teria maturidade para receber esse conhecimento, possibilitando a conexão exponencial e matrizes.

Na expectativa de estar contribuindo com o professor que estará regendo em sala de aula essas disciplinas, sera definido a seguir o conceito de exponencial de matriz. No entanto, não haverá um aprofundamento nesse conteúdo visto que o objetivo é demonstrar que a relação entre a função exponencial e as matrizes é possível.

Considere $M(n)$, o espaço vetorial* das matrizes de ordem n com entradas reais, munido das operações de adição e multiplicação por escalar. Uma norma $\|\cdot\|$ do espaço vetorial das matrizes $M(n)$ é uma função que associa cada matriz um número real não negativo que satisfaz a seguintes condições: seja k uma escalar qualquer, A e B matrizes. Tem-se

i) $\|A\| = 0$ se, e somente se, $A = 0$

ii) $\|A\| \geqslant 0$

iii) $\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$

iv) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

*Um espaço vetorial real consiste em um conjunto não vazio de objetos que podem ser somados e multiplicados por um número real satisfazendo as propriedades usuais (comutativa, associativa, elemento neutro e distributiva) da adição e multiplicação por escalar

Definição 4.0.1. *Seja $A = [a_{ij}]_{r\times s}$ uma matriz. Chamamos de norma da matriz A e denotamos por $\|A\|$, o número não negativo*

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant r} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|,$$

que é o maior valor da soma do modulo de todos os elementos de cada linha da matriz.

Exemplo 4.0.1. *Determine a norma da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução 4.0.1. *Determinaremos o valor da norma* $\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant r} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|$ *somando os módulos de cada elemento de cada linha da matriz A, desde modo:*

$$\begin{aligned} |1| + |2| + |3| &= 6 \\ |3| + |4| + |1| &= 8 \\ |2| + |3| + |1| &= 6 \end{aligned}$$

assim, $\|A\| = \max\{6, 8, 6\} = 8$.

Um caso particular da definição 4.0.1 é o vetor coluna $n \times 1$ que enunciaremos a seguir.

Definição 4.0.2. *Seja* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *um vetor coluna. Chamamos de norma do máximo de um vetor coluna X o número*

$$\|X\| = \max\{|x_1| + \cdots + |x_n|\}.$$

Teorema 4.0.1. *Sejam $A = [a_{ij}]_{r\times s}$ e $B = [a_{kj}]_{s\times t}$ duas matrizes, então*

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|. \tag{4.1}$$

Um caso particular é quando B é um vetor coluna X, temos

$$\|A \cdot X\| \leq \|A\| \cdot \|X\|. \tag{4.2}$$

A demonstração do teorema 4.0.1 pode ser encontrado no livro Boldrini et al. (1980).

Consequentemente, pelo o teorema 4.0.1 temos

$$\|A^2\| = \|A \cdot A\| \leq \|A\| \cdot \|A\| \leq \|A\|^2,$$

por recorrência

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

Definição 4.0.3. *(Exponencial de matriz) Definimos como exponencial de uma matriz $A_{n\times n}$ com entradas reais por*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{k!}Ad$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$ e, ainda,

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^{k+1} = A^k A.$$

Como se trata de uma série, devemos ter o cuidado de verificar se a mesma converge. De fato, note que para matriz A de ordem 1 temos a serie de Taylor da exponencial escalar ou ainda série de Maclaurin dada por $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,^{\dagger}$ e essa série é convergente. De maneira geral usando a norma de matrizes em $M(n)$ temos,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left\| A^k \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left\| \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{j\ vezes} \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \ldots \|A\|}_{j\ vezes} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \|A\|^k . \end{aligned}$$

Se $N \to \infty$, então segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \\ &= e^{\|A\|}. \end{aligned}$$

Como $e^{\|A\|}$ é um número real não negativo, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k$$

é absolutamente convergente.

Por consequência, se fixar uma matriz $A_{n \times n}$, $t \in \mathbb{R}$. Como tA é uma matriz $n \times n$ temos:

$$\Phi(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \ldots. \tag{4.3}$$

Observe que se derivarmos $\Phi(t)$, obteríamos:

$$\Phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k = A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = A \cdot \Phi(t) = A \cdot e^{tA}. \tag{4.4}$$

Nos exemplos a seguir demostraremos como calcular o matriz exponencial e^A.

Exemplo 4.0.2. *Determine:*

a) $e^{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

†dados retirados da obra (Stewart, 2013) *b)* $e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}$

Resolução 4.0.2.

a) Observe que,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \\
A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5^2 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3^2 \\ 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

,deste modo temos

$$\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Observe que,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\
A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a + 0 \cdot 0 & a \cdot 0 + 0 \cdot b \\ 0 \cdot a + b \cdot 0 & 0 \cdot 0 + b \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \\
A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a^2 + 0 \cdot 0 & a \cdot 0 + 0 \cdot b^2 \\ 0 \cdot a^2 + b \cdot 0 & 0 \cdot 0 + b \cdot b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

, assim temos

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.0.3. *(matriz diagonal) Considere a matriz diagonal*

$$
A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda_3^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \\
A^3 &= \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda_3^3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
A^k &= \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda_3^k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Representaremos a matriz A^k com a seguinte notação $A^k = diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_3^k\right)$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right) \\
&= diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_1^k, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_2^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_n^k\right) \\
&= diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}). \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & e^{\lambda_3} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto se A e uma matriz diagonal, então e^A também é. Em consequência, temos

$$e^I = diag(e, e, \ldots, e) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & e & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e \end{pmatrix} = eI.$$

Definição 4.0.4. *Dada uma matriz $A_{n\times n}$, se existir um n tal que $A^n = 0$, então denominamos A como matriz nilpotente. De uma forma geral temos*

$$A = N_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se $N_a = A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$, então

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que para todo $n \geq 4$, $A^n = 0$. Desde que,

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots,$$

segue que

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resultando em

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 & 0 \\ \frac{a^3}{6} & \frac{a^2}{2} & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Por indução pode-se demostrar que para qualquer matriz nilpotente temos:

$$e^{N_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{a^3}{6} & \frac{a^2}{2} & a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} & \ldots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Seja $P(n) = e^{N_a}$. Observe que $P(2)$ é verdadeira, pois $e^{N_a} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

Suponha válida $P(n)$ para todo $n \geq 2$, ou seja, que

$$P(n) = e^{N_a} = e^{A_{n\times n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a^3}{6} & \frac{a^2}{2} & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos provar que $P(n+1) = e^{A_{n+1\times n+1}}$ é verdadeira. Observe que $P(n)$ é

$$\begin{aligned} e^{N_a} = e^{A_{n\times n}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a^3}{6} & \frac{a^2}{2} & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & a & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, $P(n+1)$ é dada por

$$e^{N_a} = e^{A_{n+1\times n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \quad \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad + \cdots + \quad \frac{1}{(n-1)!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \quad \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad + \quad \frac{1}{(n+1)!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a^3}{6} & \frac{a^2}{2} & a & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \frac{a^n}{n!} & \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \dots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $P(n+1)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, conforme queríamos demonstrar.

□

Para os exemplos a seguir, considere as séries de Taylor[‡] do $\cos b$ e $\sin b$ são dadas por

$$\begin{aligned} \cos b &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} b^{2k} \\ &= 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin b &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} b^{2k+1} \\ &= b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Exemplo 4.0.4. *Seja* $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. *Calcule* e^B.

[‡]Dados retirados da obra (Stewart, 2013)

Resolução 4.0.3. *Iremos começar a resolução observando as potências da matriz B, ou seja,*

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}.$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando o expoente par, por recorrência, temos

$$B^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} b^{2k} & 0 \\ 0 & b^{2k} \end{pmatrix},$$

e para expoente ímpar,

$$B^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & b^{2k+1} \\ -b^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando a série de Taylor para as funções seno e cosseno obtemos

$$\begin{aligned} e^B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots & b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7!}b^7 + \dots \\ -b + \frac{1}{3!}b^3 - \frac{1}{5!}b^5 + \frac{1}{7!}b^7 + \dots & 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para continuarmos o estudo sobre exponencial de matriz iremos apresentar a seguir conceitos que nos auxiliarão no cálculo.

Definição 4.0.5. *Duas Matrizes A e B de ordem n são ditas conjugadas, se existe uma matriz $C_{n\times n}$ invertível tal que $AC = CB$, ou seja, $A = CBC^{-1}$.*

Teorema 4.1. *Sejam as matrizes $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ conjugadas e a matriz $C_{n\times n}$, segue que:*

i) Se $AC = CB$, então $e^A C = Ce^B$.

ii) Se C é invertível e $A = CBC^{-1}$, então $e^A = e^{CBC^{-1}} = Ce^B C^{-1}$.

Demonstração:

i) Como $AC = CB$,

$$\begin{aligned} A^2C &= AAC \\ &= ACB \\ &= CBB \\ &= CB^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned} A^kC &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\ vezes} \cdot C \\ &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-1\ vezes} \cdot CB \\ &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-2\ vezes} \cdot CB \cdot B = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-2\ vezes} \cdot CB^2, \\ &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-3\ vezes} \cdot CB \cdot B^2 = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-3\ vezes} \cdot CB^3 \\ &\vdots \\ &= CB^k \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{N}$. Assim

$$\begin{aligned} e^AC &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k\right)C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kC \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}CB^k \\ &= C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k\right) \\ &= Ce^B. \end{aligned}$$

□

Afirmação 4.0.1. *Sejam as matrizes $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$. Tem-se:*

i) Se $AB = BA$, então $e^Ae^B = e^{A+B}$;

ii) A matriz e^A sempre é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, ou seja, $e^Ae^{-A} = I = e^{-A}e^A$.

A demonstração da afirmação 4.0.1 pode ser encontrada em Silva (2011).

Exemplo 4.0.5. *Seja $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Observe que $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + 0 \cdot b & a \cdot (-b) + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + a \cdot b & 0 \cdot (-b) + a \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ab \\ ab & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Logo pela propriedade 4.0.1 (i)* *temos:*

$$\begin{aligned} e^C &= e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosb & -senb \\ senb & cosb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a cosb & -e^a senb \\ e^a senb & e^a cosb \end{pmatrix} \\ &= e^a \begin{pmatrix} cosb & -senb \\ senb & cosb \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.0.6. *Sejam as matriz* $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Observe que* $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B \cdot A$. *Assim, pela propriedade 4.0.1 (i) podemos calcular* $e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t}$, *visto que* $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Desse modo temos:*

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t}.$$

Note que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *o que implica em* $e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Assim,*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Iremos apresentar a seguir um método alternativo para se calcular o exponencial de matriz. Para isto, conceitos exigidos podem ser encontrados no apêndice na seção 6.2.

Exemplo 4.0.7. *Determinar* $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}}$.

Resolução 4.0.4. *Primeiramente, calculamos os autovalores da matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, *ou seja,*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 9.1 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

que resulta em $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = -2$. *Como definirmos no apêndice na seção 6.2* $e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \lambda^k$ *temos,*

$$\begin{cases} e^4 = \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ e^{-2} = \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases},$$

Daí

$$\begin{cases} e^4 = \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ (e^{-2} = \alpha_1 - 2\alpha_2) \cdot 2 \end{cases} = \begin{cases} e^4 = \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ 2e^{-2} = 2\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad e^4 + 2e^{-2} &= \alpha_1 + 2\alpha_1 \\ e^4 + 2e^{-2} &= 3\alpha_1 \\ \alpha_1 &= \frac{e^4 + 2e^{-2}}{3} \end{aligned},$$

determinaremos α_2 *substituindo na equação*

$$e^4 = \alpha_1 + 4\alpha_2 \tag{4.5}$$

o α_1 *por* $\frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2})$, *dessa forma temos*

$$\begin{aligned} e^4 &= \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ e^4 &= \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2}) + 4\alpha_2 \\ e^4 - \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2}) &= 4\alpha_2 \\ \alpha_2 &= \frac{e^4 - \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2})}{4} \\ \alpha_2 &= \frac{\frac{3e^4 - e^4 - 2e^{-2}}{3}}{4} \\ \alpha_2 &= \frac{2(e^4 - e^{-2})}{3} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{2(e^4 - e^{-2})}{12} \\ \alpha_2 &= \frac{e^4 - e^{-2}}{6} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2}). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} e^A &= \alpha_1 I + \alpha_2 A \\ e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}} &= \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \\ e^A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2}) & \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2}) \\ \frac{9}{6}(e^4 - e^{-2}) & \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3e^4 + 3e^{-2} & e^4 - e^{-2} \\ 9e^4 - 9e^{-2} & 3e^4 + 3e^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.0.8. *Determine* $e^{t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$.

Resolução 4.0.5. *Primeiramente, calculamos os autovalores da matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *, ou seja*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - 3 \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

que resulta em $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 3$*. Como* $e^{t\lambda_k} = \alpha_1 + \alpha_2(t\lambda_k)$*, temos*

$$\begin{cases} e^{-t} = \alpha_1 - \alpha_2 t \\ e^{3t} = \alpha_1 + 3\alpha_2 t \end{cases},$$

Daí

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^{-t} = \alpha_1 - \alpha_2 t \\ e^{3t} = \alpha_1 + 3\alpha_2 t \end{cases} &= \begin{cases} (e^{-t} = \alpha_1 - \alpha_2 t) \cdot 3 \\ e^{3t} = \alpha_1 + 3\alpha_2 t \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3e^{-t} = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 t \\ e^{3t} = \alpha_1 + 3\alpha_2 t \end{cases} \\ \Rightarrow \quad 3e^{-t} + e^{3t} &= 3\alpha_1 + \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3e^{-t} + e^{3t} &= 4\alpha_1 \\ 4\alpha_1 &= e^{3t} + 3e^{-t} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t}) \end{aligned}$$

. Determinaremos α_2 utilizando a equação

$$e^{-t} = \alpha_1 - \alpha_2 t \tag{4.6}$$

, onde substituiremos α_1 por $\frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t})$, segue que

$$\begin{aligned} e^{-t} &= \alpha_1 - \alpha_2 t \\ e^{-t} &= \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t}) - \alpha_2 t \\ 4e^{-t} &= e^{3t} + 3e^{-t} - 4\alpha_2 t \\ 4e^{-t} - e^{3t} - 3e^{-t} &= -4\alpha_2 t \\ e^{-t} - e^{3t} &= -4t\alpha_2 \\ \frac{e^{-t} - e^{3t}}{-4t} &= \alpha_2 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4t}(e^{3t} - e^{-t}) \end{aligned}$$

.

Segue que

$$\begin{aligned} e^{tA} = \alpha_1 I + \alpha_2(tA) &= \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4t}(e^{3t} - e^{-t})t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{3t} + 3e^{-t}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{e^{3t} + 3e^{-t}}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2e^{3t} - 2e^{-t}}{4} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \\ \frac{3e^{3t} - 3e^{-t}}{4} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3e^{3t} + e^{-t}}{4} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \\ \frac{3e^{3t} - 3e^{-t}}{4}) & \frac{e^{3t} + 3e^{-t}}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4.0.9. *(e^{tA} onde A tem auto valores repetidos) Considere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$. O polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$ note que o autovalor duplo de A é $\lambda = 3$ e o autovalor duplo de tA é*

$\lambda = 3t$. *Assim*

$$e^{3t} = \alpha_1 + \alpha_2(3t) \ ,$$

como é um autovalor duplo não temos outra equação, para encontrar os coeficientes α_1 *e* α_2 *iremos derivar a equação anterior em relação ao parâmetro* t*, assim temos* $\alpha_2 = e^{3t}$ *e daí* $\alpha_1 = e^{3t}(1-3t)$*, logo*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \alpha_1 I + \alpha_2(tA) \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t}(1-3t) & 0 \\ 0 & e^{3t}(1-3t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} \\ -9e^{3t} & 6e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t}(1-3t) & e^{3t} \\ -9e^{3t} & e^{3t}(7-3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4.0.10. *(Matriz de ordem 3 com auto valores distintos)*

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *para calcularmos* e^{tA} *seguiremos os mesmos passos dos exemplos anteriores. Primeiramente calculamos o polinômio característico de* A*, que é*

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4),$$

e por sua vez os autovalores, que são respectivamente $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \quad e \quad \lambda_3 = 4$ *e os autovalores de* tA *são* $\lambda_1 = 2t, \quad \lambda_2 = 3t \quad e \quad \lambda_3 = 4t$*. Então como definimos na seção 6.2 do apêndice* $e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \lambda^k$*, ou seja,* $e^{\lambda t} = \alpha_1 + \alpha_2(\lambda t) + \alpha_3(\lambda t)^2$*, assim*

$$\begin{cases} e^{2t} = \alpha_1 + \alpha_2(2t) + \alpha_3(2t)^2 \\ e^{3t} = \alpha_1 + \alpha_2(3t) + \alpha_3(3t)^2 \\ e^{4t} = \alpha_1 + \alpha_2(4t) + \alpha_3(4t)^2 \end{cases}$$

resolvendo o sistema e descobrindo as variáveis α_1*,* α_2 *e* α_3 *é possível calcular o valor da exponencial, através de* $\alpha_1 I + \alpha_2(tA) + \alpha_3(tA)^2$ *a qual, deixaremos a critério do leitor terminar esse exemplo.*

Exemplo 4.0.11. *(Matriz de ordem 3 com autovalor um duplo e um simples)*

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *para calcularmos* e^{tA} *seguiremos os mesmos passos dos exemplos anteriores. Primeiramente calculamos o polinômio característico de* A*, que é*

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4),$$

e por sua vez os autovalores, que são respectivamente $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2 \quad e \quad \lambda_3 = 4$ *e os autovalores de* tA *são* $\lambda_1 = 2t, \quad \lambda_2 = 2t \quad e \quad \lambda_3 = 4t$*. Então como definimos na seção 6.2 do apêndice* $e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \lambda^k$*,* *ou seja,* $e^{\lambda t} = \alpha_1 + \alpha_2(\lambda t) + \alpha_3(\lambda t)^2$*, assim*

$$\begin{cases} e^{2t} = \alpha_1 + \alpha_2(2t) + \alpha_3(2t)^2 \\ e^{4t} = \alpha_1 + \alpha_2(4t) + \alpha_3(4t)^2 \end{cases},$$

nesse caso precisamos derivar em t *a equação* $e^{2t} = \alpha_1 + \alpha_2(2t) + \alpha_3(2t)^2$*, pois a mesma se refere ao autovalor duplo, dessa forma temos*

$$2e^{2t} = 2\alpha_1 + 8\alpha_2 t. \tag{4.7}$$

Rescrevendo o sistema e acrescentando a equação 4.7 temos

$$\begin{cases} e^{2t} = \alpha_1 + \alpha_2(2t) + \alpha_3(2t)^2 \\ e^{4t} = \alpha_1 + \alpha_2(4t) + \alpha_3(4t)^2 \\ 2e^{2t} = 2\alpha_1 + 8\alpha_2 t \end{cases},$$

resolvendo o sistema e descobrindo os coeficientes α_1, α_2 *e* α_3 *é possível calcular o valor da exponencial, através de* $e^{tA} = \alpha_1 I + \alpha_2(tA) + \alpha_3(tA)^2$.

Exemplo 4.0.12. *(Matriz de ordem 3 com autovalor triplo)*

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *para calcularmos* e^{tA} *seguiremos os mesmos passos dos exemplos anteriores. Primeiramente calculamos o polinômio característico de* A*, que é*

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2),$$

e por sua vez os autovalores, que são respectivamente $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2 \quad e \quad \lambda_3 = 2$ *e os autovalores de* tA *são* $\lambda_1 = 2t, \quad \lambda_2 = 2t \quad e \quad \lambda_3 = 2t$*. Então*

$$e^{2t} = \alpha_1 + \alpha_2(2t) + \alpha_3(2t)^2$$

nesse caso precisamos derivar em t *a equação* $e^{2t} = \alpha_1 + \alpha_2(2t) + \alpha_3(2t)^2$*, pois a mesma se refere ao autovalor triplo. Assim a equação fica da seguinte forma*

$$2e^{2t} = 2\alpha_2 + 8\alpha_3 t$$

resolvendo o sistema e descobrindo as variáveis α_1, α_2 *é possível calcular o valor da exponencial, através de* $e^{tA} = \alpha_1 I + \alpha_2(tA) + \alpha_3(tA)^2$.

Nessa seção a seguir veremos uma aplicação da exponencial de matriz.

4.1 Uma aplicação para exponencial de matriz

As matrizes podem ser utilizadas para obter a solução de um sistema homogêneo de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Podemos representar o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas (EDO's)[§] da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}x_n(t)\\ x'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n(t)\\ &\vdots\\ x'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned} \tag{4.8}$$

na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t)\\ x'(t)\\ \vdots\\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Denotaremos as matrizes X e A por

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

com x_i sendo funções diferenciáveis que satisfazem o sistema 4.8 associado a matriz A e a_{ij} os coeficientes desse sistemas.

De forma mais simples, o sistema 4.8 pode ser escrito na forma

$$X' = AX. \tag{4.10}$$

Proposição 4.1.

É possível definir exponencial de matriz e^{tA} de tal forma que $X = e^{tA}C$ seja uma solução do sistema linear homogêneo de

$$X' = AX,$$

onde A é uma matriz de ordem n e C é uma matriz coluna de constantes arbitrários.

A demonstração da proposição 4.1 pode ser encontrada em Stewart (2013).

Exemplo 4.1.1. *Considerando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ encontre uma solução para equação $X' = AX$.*

Resolução 4.1.1. *Sejam $X = (x_1, x_2)$ e $X' = (x'_1, x'_2)$ note que*

$$\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2 \end{pmatrix}.$$

[§]Equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem, são equações diferencias de primeira ordem onde a função incógnita depende apenas de uma única variável.

Primeiramente, iremos calcular e^{At}*. Encontrando os autovalores da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *, temos*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

se, e somente se, $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$*. Como* $e^{t\lambda_k} = \alpha_1 + \alpha_2(t\lambda_k)$*, temos*

$$\begin{cases} e^t = \alpha_1 + \alpha_2 t \\ e^{2t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t \end{cases},$$

Daí

$$\begin{cases} e^t = \alpha_1 + \alpha_2 t \\ e^{2t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t \end{cases} = \begin{cases} (e^t = \alpha_1 + \alpha_2 t) \cdot (-2) \\ e^{2t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} -2e^t = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 t \\ e^{2t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad -2e^t + e^{2t} = -\alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^t - e^{2t} &= \alpha_1 \\ \alpha_1 &= 2e^t - e^{2t} \end{aligned}$$

. Determinaremos α_2 *utilizando a equação*

$$e^t = \alpha_1 + \alpha_2 t, \tag{4.11}$$

onde substituiremos α_1 *por* $2e^t - e^{2t}$*, segue que*

$$e^t = \alpha_1 + \alpha_2 t$$

$$\begin{aligned} e^t &= 2e^t - e^{2t} + \alpha_2 t \\ e^t - 2e^t + e^{2t} &= \alpha_2 t \\ \alpha_2 t &= e^{2t} - e^t \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{e^{2t} - e^t}{t}$$

.Segue que

$$
\begin{aligned}
e^{tA} \quad = \quad \alpha_1 I + \alpha_2 (tA) &= (2e^t - e^{2t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(e^{2t} - e^t\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} - e^t & 0 \\ 0 & 2e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim, como

$$X = e^{At} C,$$

então

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
x_1 &= e^t c_1 \\
x_2 &= e^{2t} c_2 \\
X &= e^t c_1 + e^{2t} c_2
\end{aligned}
$$

Com $C(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ *sendo a solução que satisfaz a condição inicial.*

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma analise nos livros didáticos que foram oferecidos pelo MEC as escolas publicas estaduais da região leste de minas, e ao mesmo tempo propiciou a revisão dos conceitos e propriedades da função exponencial e matrizes, e a obtenção do conhecimento sobre exponencial de matrizes.

Em cada livro didático, analisamos as contextualizações e aplicações encontradas nos exercícios presentes nos capítulos que se destinavam a função exponencial e matrizes. Observamos que ha uma diversidade maior em contextualizações nos exercícios que estão voltados para função exponencial. Esta tendência de diversidade em contextualizações nos exercícios de exponencial esta relacionado possivelmente a sua familiarização com situações do cotidiano do educando.

Através do presente estudo percebemos como as contextualizações ou aplicações de situações reais tem um valor significativo para educando. As contextualizações justificam a necessidade da aprendizagem do conteúdo, motiva- os a aprender, pois veem o conteúdo com mais significado.

Já as abordagem dos tópicos aqui mencionados em ambos livros possuem características semelhantes, iniciam com exemplos de aplicações, definem o conteúdo e logo após definem alguns exercícios. Acreditamos que é possível ensinar esses tópicos de uma maneira um pouco diferente, possibilitando ao educando a descoberta da importância do ensino que ele esta adquirindo. Uma abordagem diferente para esses tópicos seria através das contextualizações, vinculando o abstrato tratado em sala de aula com o real visto no cotidiano do educando, essa abordagem seria feita do seguinte modo:

i) Analisar situações reais que podem ser modeladas pelo conteúdo lecionado, tendo o cuidado de apresentar situações que sejam do cotidiano, diretamente ou indiretamente.

ii) Pesquisa direcionada sobre o temas mencionados, afim de trazer o máximo de familiarização do conteúdo .

iii) Explicação formal dos conteúdos.

iv) Aplicação de exercícios contextualizados e relacionados a situações antes mencionadas.

v) Construir uma modelagem de forma simples da situações relacionadas.

Infelizmente a conexão entre a função exponencial e matrizes nos livros didáticos é bem escassa, na nossa pesquisa não encontramos uma conexão direta entre esses tópicos. Porém no capítulo 4 demostramos que é possível a existência de uma conexão direta entre ambas, e também a aplicação dessa conexão. Possivelmente a escassez da conexão entre a função exponencial e matriz é devido a dificuldade de relacionar um assunto que viabilize a conexão e que possa ser compreendido no ensino médio, grau de estudo que os educandos estão.

Como professor, estamos sempre utilizando ferramentas diversas para ensinar. Ferramentas essas que devem ser precisas, pois, do contrario não alcançaremos os nossos objetivos. Como o livro didático e uma das ferramentas mais utilizadas pelo o professor, devemos tomar o coitado se os livros abordados estão trazendo em seu conteúdo instrumentos que fomentarão a busca pelo conhecimento. Como demostramos nessa pesquisa as boas contextualizações são eficientes nesse aspecto, portanto a acreditamos que a escolha do livro didático deve ser pautada também na verificação das contextualizações e aplicações encontradas em seu interior. Para assim proporcionar um ensino mais dinâmico para o educando, solucionando os questionamentos comuns em sala de aula, para que? Porque? Aonde vou usar isso? etc.

Capítulo 6

APÊNDICE

Nessa seção iremos relembrar alguns conceitos de álgebra linear, e não aprofundaremos nesses tópicos, deixando a critério do leitor tal aprofundamento.

6.1 Autovalores e Autovetores

Os resultados a seguir são importantes e iremos definir -los por completude de informação e podem ser encontrados no livro Geometria Analítica e Álgebra linear de Manuel Ferreira Filho - 2° edição - 2003.

Definição 6.1.1.

Seja $A_{n\times n}$ e $\lambda \in R$. Diremos que λ é o autovalor ou valor próprio de A se existe um vetor coluna K de $\mathbb{R}^n$, não nulo, tal que $AK = \lambda K$ e o vetor K será chamado de autovetor ou vetor próprio. Então

$$AK = \lambda K$$

$$AK = \lambda IK$$

$$AK - \lambda IK = 0$$

$$(A - \lambda I)K = 0.$$

Definição 6.1.2.

Seja $A_{n\times n}$. Chamaremos de polinômio característico de A o polinômio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$, onde I é a identidade e λ é o autovetor.

Exemplo 6.1.1.

Calcule os autovalores e autovetores de $A \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolução 6.1.1.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Portanto $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$ *logo para* $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto $\begin{cases} -2x-2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$ *, ou seja,* $x=-y$*, então o um autovetor vinculado* λ_1 *é* $K = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. O calculo para o autovetor vinculado a* λ_2 *e de maneira análoga de* λ_1*, e por isso na a realizaremos.*

6.2 Teorema de Cayley - Hamilton

Teorema 6.2.1.

Seja V *um* K*-espaço vetorial de dimensão finita* n *e* $T : V \to V$ *linear e* $p(\lambda)$ *o polinômio característico de* T*. Então*

$$p(T) = 0.$$

Demonstração:

Seja B uma base de V e $A = [T]_B$ a matriz de T nesta base. Consideremos $A_\lambda = \lambda I - A$, com I a matriz identidade de ordem n. Assim, $p(\lambda) = detA_\lambda$. Seja

$$B = adj(A_\lambda) = (b_{ij}).$$

Logo, cada b_{ij} é um polinômio de grau no máximo $n-1$ na variável λ. Podemos escrever tal polinômio para cada i, j como:

$$b_{ij} = b_{ij}^0 + b_{ij}^1\lambda + \ldots + b_{ij}^{n-1}\lambda^{n-1}.$$

A matriz dos coeficientes do termo k (fixa) destes polinômios é

$$B^k = \begin{pmatrix} b_{11}^k & b_{12}^k & \ldots & b_{1n}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}^k & b_{n2}^k & \ldots & b_{nn}^k \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Então, segue

$$B = B^0 + B\lambda + \ldots + B^{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Como $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$ é mônico e de grau n, temos

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + \lambda^n.$$

Escrevemos também

$$BA_\lambda = adj(A_\lambda)A_\lambda = (detA_\lambda)I = det(\lambda I - A)I$$

Substituindo as expressões para $B, A\lambda$ e $det(\lambda I - A) = p(\lambda)$ encontramos

$$\left(B^0 + B\lambda + \ldots + B^{n-1}\lambda^{n-1}\right)(\lambda I - A) = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + \lambda^n)\, I.$$

Donde segue

$$-B^0A + (B^0 - B^1A)\lambda + \ldots + B^{n-1}\lambda^n = a_0I + a_1I\lambda + \ldots + I\lambda^n.$$

Igualando-se os coeficientes dos termos de mesmo grau obtemos

$$\begin{array}{rcl} a_0I & = & -B^0A \\ a_1I & = & B^0 - B^1A \\ & \vdots & \\ a_{n-1}I & = & B^{n-2} - B^{n-1}A \\ I & = & B^{n-1}, \end{array}$$

multiplicando-se por $I, A, A^2, \ldots, A^n$, segue que

$$\begin{array}{rcl} a_0I & = & -B^0A \\ a_1AI & = & B^0A - B^1A^2 \\ & \vdots & \\ a_{n-1}A^{n-1} & = & B^{n-2}A^{n-1} - B^{n-1}A^n \\ A^n & = & B^{n-1}A^n. \end{array}$$

Adicionando os membros da igualdade anterior temos

$$a_0I + a_1AI + \ldots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = p_A(A) = 0.$$

□

Logo, pelo teorema temos que para toda matriz quadrada A

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} b_kA^k = 0,$$

onde $A^0 = I$ e $A^{k+1} = A \cdot A^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por consequência da definição do teorema temos

$$A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_kA^k.$$

Exemplo 6.2.1. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. *O polinômio característico de* A *e dado por* $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$, *pelo teorema de Cayley Hamilton substituindo e* λ *por* A, *temos que a equação* $p(A)$ *é nula, ou seja,*

$$A^2 - 2A - 8I \quad = \quad 0$$

Daí,

$$\begin{array}{rclclcl} A^2 & = & 2A+8I & & & & \\ A^3 & = & A(2A+8I) & = & 2A^2+8A & = & 12A+16I \\ A^4 & = & A(2A^2+8A) & = & 2A^3+8A^2 & = & 40A+96I, \end{array}$$

assim podemos dizer que toda as potencias da matriz A com expoente inteiro, podem ser escritas como uma combinação lineares das matrizes I e A,ou seja, $A^k = aI + bA$ onde a e b são dois escalar quaisquer, como e^{At} é uma soma de potencias de A chegamos a conclusão que $e^{At} = aI + bA$.

Da mesma forma podemos expressar os autovalores de uma matriz como uma combinação linear,

$$\begin{array}{rclclcl} \lambda^2-2\lambda-8 & = & 0 & & & & \\ \lambda^2 & = & 2\lambda+8 & & & & \\ \lambda^3 & = & \lambda(2\lambda+8) & = & 2\lambda^2+8\lambda & = & 12\lambda+16 \\ \lambda^4 & = & \lambda(2\lambda^2+8\lambda) & = & 2\lambda^3+8\lambda^2 & = & 40\lambda+96, \\ \lambda^k & = & a+b\lambda & & & & \end{array}$$

Dessa forma podemos calcular os valores dos coeficientes a e b, construindo um o sistema de equações formado pelas combinações lineares dos autovalores da matriz dada

$$\begin{cases} \lambda_1^k = a + b\lambda_1 \\ \lambda_2^k = a + b\lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^k = a + b\lambda_n. \end{cases}$$

De forma geral

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k A^k$$

e determinaremos os coeficientes α_k através de

$$e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \lambda^k.$$

Demonstramos o teorema 6.2.1 por completude de informação, e o mesmo pode ser encontrado em

Referências Bibliográficas

Balestri., R. D. (2016a). ***Matemática: interação e tecnologia - Volume 1***. Leya Brasil, São Paulo, 2Âª ed. edition.

Balestri., R. D. (2016b). ***Matemática: interação e tecnologia - Volume 2***. Leya Brasil, São Paulo, 2Âª ed. edition.

Boldrini, J. L., Costa, S. I., Figueredo, V., and Wetzler, H. G. (1980). *Álgebra linear*. Harper & Row.

BRASIL, M. (2006). Seb. orientações curriculares para o ensino médio. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB.*

Cardoso, J. (2003). Logaritmos de matrizes: Aspectos teóricos e numéricos. *Universidade de Coimbra.*

Cardoso, J. R. and Harris, W. F. (2013). Uma aplicação das funções de matrizes na óptica linear. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, (68).

D'AMBROSIO, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Papirus Editora.

Dante, L. R. (2016a). ***Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 1***. São Paulo, 3Âª ed. edition.

Dante, L. R. (2016b). ***Matemática : contexto & aplicações : ensino médio - Volume 1***. São Paulo, 3Âª ed. edition.

Degenszajn, D., DOLCE, O., and IEZZI, G. (2011). Matemática–volume único.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, D. d. R. P. e. N. D. A. (2016a). ***Matemática: ciência e aplicações: ensino médio - Volume 1***. São Paulo.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, D. d. R. P. e. N. D. A. (2016b). ***Matemática: ciência e aplicações: ensino médio - Volume 2***. São Paulo.

GERAIS, M. (2014). Proposta curricular. *Matemática: Ensino Fundamental e Médio. Currıculo Básico Comum-CBC. Secretaria de Estado de Educaçao de Minas Gerais.*

Giovanni, J. R., Bonjorno, J. R., and Giovanni Jr, J. R. (1994). *Matemática fundamental, 2. Grau: volume único*. FTD.

Iezzi, G., Murakami, C., Stewart, J., and Learning, E. T. (2004). *Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções, volume 1.* São Paulo: Atual Editora.

Leonardo, F. M. D. (2016a). ***Conexões com a Matemática - 1° ano do ensino médio***. São Paulo.

Leonardo, F. M. D. (2016b). ***Conexões com a Matemática - 2° ano do ensino médio***. São Paulo.

LIMA, E. L. (2007). Matemática e ensino: Coleção do professor de matemática.

Lima, E. L. (2013). *Números e funções reais*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Lima, L. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., and MORGADO, A. C. (2012). ***A Matemática do Ensino Médio***, volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática.

NACIONAIS, P. C. (1997). apresentação dos temas transversais. *Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF.*

Oliveira, MICHELLE NOBERTA ARAUJO DE e MORAIS FILHO, D. C. D. (2014). Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio.

PCNs, B. (2002). ***PCN+:ensino médio. Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio***. Ministério da Educação, Secretaria de Educaçãoo Média e Tecnológica.

Silva, M. B. (2011). Soluções de sistemas de equações diferenciais lineares. *Universidade Federal de Campina Grande.*

Sodré, U. (2001). Exponencial de uma matriz. *Arquivo: expA. tex, Londrina-PR.*

Stewart, J. (2013). Cálculo, volume ii/james stewart;[tradução ez2 translate]. *São Paulo: Cengage Learning.*

Trindade, J. R. (2017). Uma proposta de sequÊncia didÁtica para o ensino de matrizes no ensino mÉdio. *Universidade Federal do Espirito Santo.*

Vasconcelos, M. B. F. (2008). *A contextualização e o ensino de Matemática: um estudo de caso. 2007. 112p.* PhD thesis, Dissertação (Mestrado em Educação)?Centro de Educação, UFPB, João Pessoa (PB). Orientadora: Rogéria Gaudêncio do Rêgo.