



**UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI**  
**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**

**Leonardo Viegas da Rocha**

**UMA APLICAÇÃO DA TECNOLOGIA DE IMPRESSÃO 3D NO ENSINO  
DA MATEMÁTICA: CONSTRUINDO INSTRUMENTOS DIDÁTICOS  
PARA A SALA DE AULA**

**Teófilo Otoni**

**2018**



Leonardo Viegas da Rocha

**UMA APLICAÇÃO DA TECNOLOGIA DE IMPRESSÃO 3D NO ENSINO  
DA MATEMÁTICA: CONSTRUINDO INSTRUMENTOS DIDÁTICOS  
PARA A SALA DE AULA**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Sílvia Swain  
Canôas

Coorientador: Prof. Dr. Nolmar Melo de  
Souza

Teófilo Otoni

2018

Ficha Catalográfica  
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM  
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

R672a Rocha, Leonaldo Viegas da.  
2018 Uma aplicação da tecnologia de impressão 3D no ensino da matemática: construindo instrumentos didáticos para a sala de aula. / Leonaldo Viegas da Rocha. Teófilo Otoni, 2018.  
103 p. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Sílvia Swain Canôas.  
Coorientador: Prof. Dr. Nolmar Melo de Souza.

1. Material didático. 2. Ensino. 3. Impressão 3D. 4. Geometria.  
5. Cálculo. I. Título.

**CDD: 510**

LEONALDO VIEGAS DA ROCHA

**UMA APLICAÇÃO DA TECNOLOGIA DE IMPRESSÃO 3D NO ENSINO DA  
MATEMÁTICA: CONSTRUINDO INSTRUMENTOS DIDÁTICOS PARA A  
SALA DE AULA.**

Dissertação apresentada ao  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL,  
nível de MESTRADO como parte dos  
requisitos para obtenção do título de  
MAGISTER SCIENTIAE EM  
MATEMÁTICA

Orientador (a): Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Silvia Swain  
Canôas

Data da aprovação : 17/07/2018



Prof.Dr.<sup>a</sup> SILVIA SWAIN CANÔAS - UFVJM



Prof.Dr. MAURO LUCIO FRANCO - UFVJM



Prof.Dr. JOSE FERNANDES SILVA - IFMG



“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”.

“This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) Finance Code 001”.





Dedico este trabalho aos meus pais, João (in memoriam) e Esmeralda. E ao meu irmão Aduino pelo apoio, incentivo, confiança e paciência.

Dedico também a todos os professores que lutam constantemente por uma Educação melhor.



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, pelo dom da vida, por ter me dado saúde e força para superar as inúmeras dificuldades, por ter guiado meus passos e me oportunizado a chegar até aqui.

Aos meus pais, João Viegas (in memoriam) e Esmeralda Ventura, por terem me dado Educação, Valores e por sempre me apoiarem. Meu exemplo de vida!

Aos meus familiares, em especial meus irmãos, pela presença, carinho e apoio de sempre.

À Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), pela oportunidade de fazer o curso e pelo espaço do Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores - LIFE.

À FAPEMIG pelo financiamento da impressora 3D e dos insumos utilizados na confecção dos instrumentos didáticos.

À Profa. Dra. Sílvia Swain Canôas, orientadora deste trabalho e ao Coordenador Prof. Dr. Nolmar Melo de Souza, pelas sugestões e contribuições dadas.

Agradeço aos professores membros da Banca Examinadora, Dr. José Fernandes da Silva e Dr. Mauro Lúcio Franco, pelas colaborações dadas para enriquecimento desse trabalho.

Ao Prof. Mestre Rogério Starich pelo carinho, disponibilidade, paciência e atenção com que me auxiliou no processo de impressão dos objetos.

A todos os professores do PROFMAT pelos ensinamentos.

Aos colegas mestrandos do PROFMAT, pelas contribuições e trocas de experiências ao longo desses dois anos.

À Ana Cristina, que se tornou grande amiga ao longo desse tempo em que dividimos angústias, trabalhos, aprendizados e alegrias. Pela colaboração de boa vontade durante todo o curso, inclusive nesse trabalho, por sempre acreditar no meu potencial e me incentivar. Obrigado Ana, serei eternamente grato!

Ao Lucas Rodrigues pela disponibilidade e contribuições.

Aos meus amigos que compreenderam a minha ausência nesse tempo de dedicação às atividades do curso.

Aos meus colegas de trabalho, pelo apoio recebido e por acreditarem no meu potencial.

À Capes pela ajuda financeira, sem a qual teria sido muito difícil custear todos os gastos.

A todos aqueles que, direto ou indiretamente, tenham contribuído com este trabalho.



“O homem científico não pretende alcançar um resultado imediato. Ele não espera que suas ideias avançadas sejam imediatamente aceitas. Seus trabalhos são como sementes para o futuro. Seu dever é lançar as bases para aqueles que estão por vir e apontar o caminho.”

Nikola Tesla



## RESUMO

O presente trabalho dedicou atenção ao estudo da tecnologia de impressão 3D na construção de instrumentos didáticos para o Ensino da Matemática. Com a difusão dessa tecnologia, inclusive na área acadêmica, é importante que sejam investigadas suas potencialidades no ensino. Diante da necessidade de metodologias que contribuam no processo de Ensino e Aprendizagem, objetivou apresentar um processo de uso da tecnologia emergente de impressão 3D na construção de materiais didáticos para a sala de aula, no ensino de conceitos de Cálculo e Geometria plana e espacial. Adotou-se uma metodologia com abordagem de natureza qualitativa, recorrendo-se à pesquisa exploratória e à pesquisa bibliográfica, com o empreendimento da construção de um material didático. A princípio, apresenta-se a fundamentação teórica matemática que motivou a proposta da criação do material em 3D visando contribuir com o ensino das Somas de Riemann e sua aplicação na determinação aproximada da área do círculo e do volume da esfera. Apresentou os softwares utilizados na criação virtual do modelo, bem como aquele que o prepara para a impressora e descreveu o processo desde a construção à exportação e impressão dos instrumentos. Por fim, apresentou uma estimativa dos custos e as perspectivas de utilização da tecnologia de impressão 3D em sala de aula. Acredita-se que o processo de construção apresentado, pode proporcionar direcionamento aos principiantes interessados na investigação sobre o uso dessa ferramenta na confecção de instrumentos didáticos. Considera-se que este trabalho contribui para a reflexão do educador sobre sua prática, bem como proporciona novo conhecimento e desperta para novos estudos sobre o tema.

**Palavras-Chave:** Material didático. Ensino e Aprendizagem. Impressão 3D. Geometria. Cálculo.





## ABSTRACT

The present work focused on the study of 3D printing technology in the construction of teaching tools for Teaching Mathematics. With the diffusion of this technology, including in the academic area, it is important that their potentialities in teaching are investigated. Faced with the need for methodologies that contribute to the Teaching and Learning process, the objective was to present a process of using emerging 3D printing technology in the construction of teaching materials for the classroom, teaching concepts of Calculus and Geometry, flat and spatial. We adopted a methodology with a qualitative approach, using exploratory research and bibliographic research, with the construction of a didactic material. At first, the theoretical mathematical foundation that motivated the proposal of the creation of the material in 3D aiming to contribute with the teaching of Riemann Sums and its application in the approximate determination of the area of the circle and the volume of the sphere. He presented the software used in the virtual creation of the model, as well as the one that prepares it for the printer and described the process from the construction to the export and printing of the instruments. Finally, he presented an estimate of the costs and the perspectives of using 3D printing technology in the classroom. It is believed that the construction process presented, can provide guidance to the interested beginners in the investigation about the use of this tool in the making of didactic instruments. It is considered that this work contributes to the reflection of the educator on its practice, as well as provides new knowledge and awakens to new studies on the subject.

**Keywords:** Didactic material. Teaching and Learning. 3D Printing. Geometry. Calculation.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	(a) Um parabolóide hiperbólico, mostrando fatias através da superfície nas direções $x$ e $y$ e (b) mostrando curvas de nível. Usado com permissão, copyright 2010, David Bachman . . . . .	38
2	(a) Um sólido de largura constante criado pela rotação de um triângulo reuleaux (ou triângulo esférico) em torno de um de seus eixos de simetria. (b) Uma representação de PG (3,2), que é o menor espaço projetivo finito . . . . .	38
3	Unidade de área . . . . .	44
4	Retângulo de dimensões $m$ por $n$ . . . . .	44
5	Região sob a curva da função $f(x)$ . . . . .	48
6	Aproximação da área da região sob a curva de $f(x)$ pelas somas de Riemann Inferior e superior . . . . .	49
7	Comprimento da circunferência . . . . .	50
8	Aproximação da área do círculo pela soma da área de retângulos:(a) círculo com 8 partições do diâmetro, (b) círculo com 12 partições do diâmetro, (c) círculo com 22 partições do diâmetro, (d) círculo com 32 partições do diâmetro, (e) círculo com 62 partições do diâmetro, (f) círculo com 102 partições do diâmetro. . . . .	51
9	Área sob a curva da função do círculo de raio unitário . . . . .	52
10	Soma de Riemann superior com seis partições do raio . . . . .	53
11	Soma de Riemann Inferior com seis partições do raio . . . . .	53
12	Soma de Riemann Superior(a) e Inferior(b) com dez partições do raio . . . . .	54
13	Curva das funções da circunferência . . . . .	56
14	Área de um quarto da circunferência . . . . .	56
15	Triângulo retângulo . . . . .	57
16	Rotação em torno do eixo $x$ de uma região plana . . . . .	59
17	Região da intersecção de um plano com o sólido . . . . .	60
18	Esfera . . . . .	62
19	Cilindro . . . . .	63
20	(a) Esfera fatiada em camadas paralelas e (b) a aproximação dessas camadas por cilindros de mesma altura . . . . .	63
21	Círculo aproximado por retângulos: secção transversal da esfera aproximada . . . . .	64
22	Círculo aproximado por retângulos de mesma altura . . . . .	64
23	Secção meridiana do cilindro de maior raio . . . . .	65
24	Secção meridiana dos dois cilindros maiores . . . . .	66
25	Cubo unitário com $n$ divisões da aresta . . . . .	70
26	Cubo de aresta $\frac{1}{n}$ . . . . .	70
27	Bloco retangular. Representação do segundo termo . . . . .	71

28	Bloco retangular. Representação do terceiro termo . . . . .	71
29	Bloco com sobreposição de três camadas . . . . .	71
30	Volume por aproximação . . . . .	72
31	Esfera com centro na origem dos eixos . . . . .	73
32	Impressora 3D, GTMax3D Core H4 . . . . .	77
33	Processo de utilização da tecnologia de impressão 3D no ensino . . . . .	81
34	Círculo aproximado por retângulos . . . . .	82
35	Esferas aproximadas por cilindros: (a)seis cilindros (diâmetro particionado em oito partes iguais); (b) quatorze (diâmetro particionado em dezesseis partes iguais); (c) trinta cilindros (diâmetro particionado em oito partes iguais) . . . . .	83
36	Cubos . . . . .	83
37	Círculo aproximado por retângulos e representação do retângulo de maior altura . . . . .	85
38	Representação do segundo retângulo . . . . .	85
39	Esboço para o cálculo da medida do comprimento dos retângulos aproximantes . . . . .	87
40	Semiesfera aproximada por cilindros e sua respectiva secção transversal . . . . .	88
41	Esboços do círculo aproximado por retângulos e da esfera aproximada por cilindros . . . . .	89
42	Captura de tela do OpenSCAD. Aproximação da esfera como a união de cilindros . . . . .	90
43	Captura de tela do OpenSCAD. Alguns cilindros que compõem a esfera aproximada por cilindros de mesma altura . . . . .	90
44	Captura de tela do OpenSCAD. Exportação do arquivo .scad para o formato .stl . . . . .	91
45	Captura de tela do programa <i>Cura</i> . Fatiamento do objeto. . . . .	92
46	Preparação da mesa de impressão com o uso do adesivo líquido . . . . .	92
47	Construção da colmeia na impressão do cilindro . . . . .	93
48	Iniciando a impressão, delimitação da forma e construção da primeira camada . . . . .	94
49	Impressão dos cilindros aproximantes da esfera (camadas finais) . . . . .	94
50	Verificação da medida da altura dos cilindros após a impressão . . . . .	94
51	Esferas aproximadas por cilindros . . . . .	95
52	Fluxo de trabalho geral de impressão 3D com OpenSCAD e Cura . . . . .	95

## LISTA DE TABELAS

1	Estimativas para a área $S$ em função de $n$ . . . . .	55
2	Custo com o material utilizado na confecção dos sólidos . . . . .	96



## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	21
1    CAPÍTULO I - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	25
1.1    O Processo de Ensino e Aprendizagem da Geometria.....	25
1.2    Tecnologias.....	29
1.3    Impressoras 3D.....	31
1.3.1 <i>A Impressora 3D no Ambiente Educacional</i> .....	33
1.3.2 <i>Impressoras 3D e a Matemática</i> .....	35
1.3.3 <i>Impressoras 3D e o Professor</i> .....	39
1.3.4 <i>Tecnologia de Impressão 3D em Números</i> .....	41
2    CAPÍTULO II - REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO....	43
2.1    Conceitos Matemáticos Motivadores .....	43
2.1.1 <i>Noção de Área</i> .....	43
2.1.2 <i>Integral de Riemann</i> .....	45
2.1.3 <i>Soma de Riemann</i> .....	45
2.1.4 <i>Integral de Riemann: Definição</i> .....	47
2.2    A Soma de Riemann Aplicada no Cálculo de Áreas .....	48
2.2.1 <i>Área do Círculo Aproximada pela Soma da Área de Retângulos</i> .	49
2.2.2 <i>Exemplificando Numericamente a Área do Círculo pelas Somas             de Riemann</i> .....	52
2.3    Cálculo da Área do Círculo Utilizando Integral .....	56
2.4    Cálculo do Volume por Aproximações.....	59
2.4.1 <i>Aplicações da Integral no Cálculo de Volume</i> .....	59
2.4.2 <i>Volume de um Sólido Qualquer</i> .....	60
2.4.3 <i>Volume da Esfera Usando Aproximações por Cilindros: Uma             Aplicação do Processo das Somas de Riemann</i> .....	62
2.4.4 <i>Cálculo do Volume da Esfera pela Integral Definida</i> .....	73
3    CAPÍTULO III - FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS APLICA- DAS NO PROCESSO .....	75
3.1    A Impressora e a Técnica de Impressão .....	75
3.2    O Software de Modelagem 3D e a Preparação para Impressão ....	77

4	CAPÍTULO IV - ETAPAS DO PROCESSO .....	81
4.1	Calculando o Comprimento dos Retângulos Aproximantes do Círculo .....	84
4.2	Preparação de Esboços .....	88
4.3	A Modelagem 3D e a Exportação .....	89
4.4	Preparação para Impressão (Fatiamento).....	91
4.5	Estimativa dos Custos com a Impressão dos Instrumentos .....	95
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	97
	REFERÊNCIAS .....	101



## INTRODUÇÃO

Atualmente, o ensino, em especial o da Matemática, carece de métodos mais dinâmicos e atrativos aos estudantes. O modelo de ensino tradicional clama por complementações de atividades práticas e experimentais mais reais, que proporcione maior envolvimento dos estudantes e torne a aprendizagem mais completa.

Faz-se necessária a busca por novas perspectivas de ensino de forma a estar em sintonia com os estudantes da atualidade. É importante que professores e alunos façam uso de novas ferramentas didáticas capazes de propiciar a construção do conhecimento.

Dessa forma, diante da necessidade em buscar recursos pedagógicos em prol dos processos de ensino e aprendizagem e a suma importância do saber geométrico como essencial na compreensão do mundo no qual estamos inseridos e de sua relevância no despertar da atividade cognitiva, acredita-se que através da utilização de novas metodologias, seja possível estimular a criatividade dos estudantes para resolverem problemas, aproximando assim, do papel de professor descrito pelo psicólogo e filósofo Jean Piaget: “Professor não é o que ensina, mas o que desperta no aluno a vontade de aprender”.

Oshima e Pavanello (2010) defendem que desenvolver e construir instrumentos matemáticos a serem utilizados como facilitadores da aprendizagem, podem ajudar o professor a tornar as aulas mais atrativas e agradáveis, facilitando para o aluno o processo de construção do conhecimento. Enfatizam que o uso de materiais didáticos, desde que não utilizados em um único contexto concreto, mas transferido a outros, torna-se uma ferramenta importante para o professor, ajudando no cumprimento da função de contextualizar o conhecimento e torná-lo compreensível aos alunos. E salientam que “o uso de material didático (MD), por proporcionar aos alunos a participação em atividades manipulativas e visuais, pode ser de grande importância no processo de ensino e promover a compreensão de conceitos e propriedades matemáticas.” (OSHIMA; PAVANELLO, 2010, p.5).

Essa ideia é reforçada por Pereira, Corcoll e Santos (2016), que defendem que materiais manipuláveis podem ser vistos como instrumentos projetados para, de forma explícita e concreta, representar ideias matemáticas abstratas. Estes materiais têm a grande vantagem do apelo visual e tátil, propiciando aos alunos uma aprendizagem mais sólida pelas experiências sensoriais.

Segundo descrito por Reynolds (1971) os materiais manipuláveis são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”.

A utilização desses instrumentos matemáticos contribui no processo de Aprendizagem dos estudantes. Segundo os PCNs (BRASIL, 1998a) é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico de forma que pos-

sibilita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

As ferramentas tecnológicas nos trazem estas possibilidades. É uma necessidade saber utilizar os avanços tecnológicos em prol do melhoramento no processo educacional, tendo-os como aliados no processo, capaz de trazer “transformações e benefícios inimagináveis.” (TECHNOLOGIES, 2016, p.1).

É comum a improvisação com materiais recicláveis quando algum profissional adota a metodologia do uso de materiais concretos no ensino básico. O reaproveitamento de materiais é sem dúvida um bem social sendo feito em favor de outro, o ensino.

Porém, esses materiais são pouco duráveis e muitas vezes, difíceis de serem mantidos em bom estado após o uso. Outro fator desfavorável é o tempo que o professor precisa disponibilizar para a confecção dos materiais em sala de aula, tendo em vista o extenso currículo que é imposto para o ano letivo. Por vezes, o professor acaba se desmotivando frente a esse cenário, optando apenas pelo método da visualização.

Investigar as “novas tecnologias” e explorar seu uso é uma prática que se faz oportuna à sociedade atual, especialmente no campo educacional. O ensino e aprendizagem da matemática é um processo que pode ser aprimorado ao se beneficiar dos avanços tecnológicos.

Diante dos vários recursos disponíveis, a tecnologia de impressão 3D vem se expandindo rapidamente no mercado nos mais variados setores e também na área acadêmica. Essa tecnologia surgiu na década de 80 e oferece muitas possibilidades e oportunidades, por exemplo, na confecção de instrumentos didáticos para uso no ensino das mais variadas disciplinas, pois oferecem a representação de situações abstratas.

Algumas vantagens oferecidas pela impressão 3D na confecção de materiais para uso no ensino são a durabilidade, a qualidade, o baixo custo e um menor tempo de confecção se comparado a algumas técnicas manuais. Assim, “esta tecnologia pode conduzir a novas perspectivas ao olhar para a história da Matemática e engenharia. A nova tecnologia possibilita a todos criarem modelos para a sala de aula” (KNILL; SLAVKOVSKY, 2013a, tradução nossa).

Diante da necessidade de melhorias no ensino, em especial de campos da Matemática como o da Geometria, propomos neste trabalho, apresentar um processo de uso da tecnologia emergente de impressão 3D na construção de materiais didáticos para serem explorados em sala de aula, no ensino básico e superior, com vistas a contribuir, facilitar e oportunizar novos métodos de ensino. Através de ferramentas tecnológicas apresentamos a criação de material em 3D para o ensino de conceitos de Cálculo e da Geometria plana e espacial, para estudo da área e do volume visando contribuir no processo de Ensino e Aprendizagem.

Sobre a organização, o presente trabalho está dividido em capítulos, distribuídos como descrito a seguir.

No Capítulo I discorre-se sobre o ensino da Geometria, sua importância se-

gundo os currículos e as literaturas pesquisadas sobre o tema, bem como da necessidade de novas práticas de ensino deste conteúdo, para melhor compreensão e assimilação dos conceitos. Aborda-se o uso das tecnologias no ensino, onde se apresenta a tecnologia de impressão 3D e suas contribuições no campo educacional, especialmente no ensino da Matemática. Ao final, descreve-se sucintamente a evolução cronológica dessa tecnologia.

Abordam-se no Capítulo II os conceitos matemáticos que motivaram a criação do instrumento didático para uso em sala de aula, bem como o desenvolvimento de atividades que podem ser melhores compreendidas com o auxílio do material no momento da abordagem dos conceitos básicos envolvidos.

No Capítulo III é apresentada a impressora 3D usada na impressão dos objetos propostos neste trabalho e também a técnica de impressão por ela utilizada. Aborda-se o software de modelagem 3D que foi empregado na construção virtual dos modelos.

No Capítulo IV descreve-se o processo de construção dos instrumentos didáticos com a utilização de ferramentas tecnológicas. As etapas estão organizadas segundo a sucessão de trabalho da impressão 3D no ensino, observadas por Aguiar (2016). Assim, relatam-se cada passo, desde a seleção de conteúdos e conceitos, passando pelo plano de construção à impressão dos objetos. Em seguida é feita uma estimativa dos custos com o material utilizado para a confecção dos artefatos.

Por fim, apresentam-se as considerações finais, explicitando algumas perspectivas para a utilização da tecnologia de impressão 3D no ensino e as referências bibliográficas.

## Metodologia

Segundo Minayo (2001), entende-se por metodologia, “o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade.” Nesta pesquisa, adotou-se o modelo de metodologia que se baseia em uma abordagem de natureza qualitativa. Recorreu-se à pesquisa bibliográfica e à pesquisa exploratória, com o empreendimento da construção de um material didático. Sobre essa metodologia, Godoy (1995) esclarece que:

Em função da natureza do problema que se quer estudar e das questões e objetivos que orientam a investigação, a opção pelo enfoque qualitativo muitas vezes se torna a mais apropriada. [...] Quando estamos lidando com problemas pouco conhecidos e a pesquisa é de cunho exploratório, este tipo de investigação parece ser o mais adequado. (GODOY, 1995b, p.63).

Para Flick (2008) as discussões e a prática das pesquisas de natureza qualitativa se caracterizam por diversas abordagens teóricas e seus métodos. Essa pluralidade de abordagens é, segundo o autor, uma consequência das diferentes linhas de desenvolvimento na história da pesquisa qualitativa, cujos avanços aconteceram, parte de modo paralelo e parte de maneira sequencial.

Essa variedade de abordagens que se apresentam em pesquisas de cunho qualitativo é reforçada por (RICHARDSON, 2017, p.83).

Há vários tipos de estudos que apresentam abordagem de controle qualitativo, e entre eles podemos citar a pesquisa para a elaboração de material didático e a pesquisa documentária. A pesquisa para elaborar material didático é um processo que consiste em desenvolver e validar produtos educacionais. Relativamente nova, essa metodologia de trabalho aparece como uma das mais promissoras estratégias já utilizadas, particularmente, no campo educacional.

Para Richardson (2017), a funcionalidade desse tipo de metodologia caracteriza-se pelo direcionamento do produto a determinado tipo de escolas e sobretudo às necessidades psicossociais do educando. E acrescenta que os estudos com foco na elaboração de material didático diferem-se da pesquisa básica, pois, visa à elaboração de um produto que possa ser efetivamente usado em escola, em vez de se voltar diretamente para a busca de conhecimentos em uma área específica.

Segundo Gil (2008), as pesquisas exploratórias têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. Desenvolvem-se com a finalidade de proporcionar visão geral aproximada, acerca de determinado fato, especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis. Quanto à pesquisa bibliográfica, defende que sua principal vantagem reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente.

Godoy (1995a) defende ainda que:

A abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques. (GODOY, 1995a, p.21).

Inicialmente foi realizado um estudo bibliográfico sobre o Ensino da Geometria, da tecnologia de impressão 3D e dos conceitos matemáticos que motivaram a proposta de criação do material. Destaca-se que “[...] na revisão da literatura, além de se considerarem os conhecimentos existentes sobre a área de interesse, é conveniente saber como tais conhecimentos podem ser aplicados em relação ao produto que se deseja desenvolver.” (RICHARDSON, 2017, p.84).

Assim, buscou-se, na sequência, apresentar ordenadamente, um processo de construção de instrumentos didáticos com o uso da tecnologia de impressão 3D. Foi feita uma busca a fim de compreender a funcionalidade das ferramentas tecnológicas utilizadas no processo. Em seguida descrevem-se as etapas de construção dos modelos com a utilização dessas ferramentas na elaboração do material, passando pelo planejamento até chegar à sua impressão física.

# 1 CAPÍTULO I - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 1.1 O Processo de Ensino e Aprendizagem da Geometria

A Geometria é um segmento da Matemática que estuda as propriedades do espaço. Desde os tempos mais remotos, tem sido uma disciplina essencial no cotidiano das pessoas e como tal é descrita como um corpo de conhecimentos necessários para que se compreenda o mundo. Por ser um conteúdo voltado para a realidade dos homens, pode ser considerada uma das mais antigas disciplinas, mesmo que na antiguidade seu uso tenha sido informal e por acaso.

Em sua forma mais elementar, trata de problemas métricos, como o cálculo da área de figuras planas e volume de corpos sólidos.

No ensino, a Geometria tem sua importância como facilitadora da ordenação mental na transição de dados concretos, para o método de abstração e generalização. Possui em seu âmago o poder de despertar a intuição e a conjectura.

A importância de se aprender a Geometria é reconhecida. Nos documentos curriculares encontramos a descrição de sua fundamental importância na construção de conhecimentos para a compreensão do mundo, “e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos” (BRASIL, 2013e, p.44), que facilitam a solução de questões matemáticas e de outras áreas do conhecimento.

Segundo Pavanello (1993), a Geometria apresenta como campo profícuo ao desenvolvimento da capacidade dos alunos, despertando assim o raciocínio lógico-dedutivo.

Para Lorenzato (1995), em resposta ao por que se aprender Geometria, bastaria o argumento de que as pessoas não desenvolvem o raciocínio visual ou o pensar geométrico, o que dificultaria ou impossibilitaria solucionar as situações de vida que forem geometrizadas. Assim, não a teriam como um elemento facilitador na compreensão e aplicação a fim de solucionar questões de outras áreas do conhecimento. “Sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.” (LORENZATO, 1995, p.5).

A importância dos seus conhecimentos é reforçada por Guimarães:

Percebemos que a Geometria é de suma importância como um conhecimento matemático na formação do indivíduo, pois dá a possibilidade de uma visão equilibrada da matemática e uma interpretação mais completa do mundo, proporciona a descoberta e compreensão da realidade e permite o desenvolvimento de capacidades intelectuais como a percepção espacial, criatividade, raciocínio através de elementos presentes em diversos espaços. (GUIMARÃES, 2014, p.11).

De acordo com os PCN's (BRASIL, 1998a), os conceitos geométricos representam no currículo de Matemática papel fundamental, tal como oportunizar ao aluno o

desenvolvimento de uma forma de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de modo organizado, o mundo em que vive.

A Geometria estimula a capacidade de observação do aluno, sua criatividade, por meio do uso de formas geométricas para visualizar, representar ou descrever objetos. Ela, ainda, propicia a oportunidade de utilizar o raciocínio lógico-dedutivo para a validação de seus resultados, permite calcular e/ou fazer estimativas. (MINAS, 2007, p.37).

Lorenzato (1995, p.6) enfatiza que “aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, encontrarão na Geometria o que precisam: prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar”.

Embora reconhecida a importância de seu ensino como objeto próprio de estudo ou como instrumento para outras áreas, na prática é dada pouca atenção à Geometria, desconsiderando assim a formação efetiva dos estudantes que fica prejudicada devido uma abordagem inadequada.

A respeito do ensino da Geometria nas escolas, com base em pesquisas realizadas no âmbito da Educação Matemática, é possível constatar que este é um tema que possui vasta discussão há algumas décadas e que perduram até a atualidade. Apesar de todos os destaques dados à sua importância no ensino, estudos apontam que o ensino da Geometria no Brasil deixa a desejar. De acordo com Lorenzato (1995, p.1), “a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula”.

Ainda de acordo com Lorenzato (1995, p.3-4), as causas dessa omissão são inúmeras, com destaque a duas que, segundo ele, atuam diretamente na sala de aula: “a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de sua prática pedagógica” e a outra é devida “à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático” nos quais, em muito deles, a Geometria não é abordada adequadamente, contribuindo para que ela seja de fato preterida na sala de aula.

No entanto, outros fatores que afetam indiretamente o ensino da Geometria são destacados pelo autor. Como a posição frágil que a Geometria possui, isso quando consta, nos currículos de cursos que permitem, ao seu término, o ensino da Matemática. Obviamente, ninguém pode ensinar bem aquilo que não se conhece. Os programas e guias curriculares, os quais os autores de livros se baseiam, também afetam indiretamente o ensino da Geometria. Dado que nesses documentos ela é colocada como complemento ou apêndice, de modo fragmentado e, geralmente, isolada da Aritmética e da Álgebra.

O descaso em relação ao ensino da Geometria é apontado por outros autores brasileiros, como Pavanello (1993), Guimarães (2014) e Gazire (2000). Segundo os pesquisadores esses problemas com o Ensino da Geometria, e conseqüentemente, em sua aprendizagem, são maiores a partir do movimento da Matemática Moderna (MMM).

De acordo com Fillos (2006), esse movimento eclodiu devido à necessidade de profissionais capacitados para atender a expansão tecnológica mais acentuada a partir da segunda guerra mundial. Nesse período, o ensino da Matemática no Brasil encontrava-se em crise, dado que era trabalhado desvinculado da realidade, difícil e de acesso a poucos. Então, vários educadores passaram a repensar e buscar melhorias para o ensino. Assim, segundo o autor, o MMM, que foi idealizado nos Estados Unidos em torno de novos métodos de ensino, em um clima de busca por novas descobertas, teve repercussão mundial e foi amparado pelo governo brasileiro, vindo ao encontro dos anseios de pesquisadores.

Um dos propósitos desse movimento era a unificação dos três campos fundamentais da Matemática: Álgebra, Aritmética e Geometria. Essa unificação se daria por elementos tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que constituiriam a base para a construção lógica matemática. As ideias defendidas pelo MMM centravam-se no rigor e abstração, no formalismo e na geometria não-euclidiana. (FILLOS, 2006, 3).

Segundo Pavanello (1993), a influência desse movimento, se generaliza no Brasil no início da década de 60 com a ideia central de adaptar o Ensino da Matemática às novas concepções surgidas com a evolução deste ramo do conhecimento. Consistia em trabalhar a Matemática do ponto de vista das estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos, o que, no entendimento da autora, enfatizava o ensino da álgebra e inviabilizava o da Geometria da forma como era feito tradicionalmente.

Desde então, os livros didáticos são escritos sob nova orientação, e, quanto à Geometria, inicialmente, opta-se por acentuar as noções de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. É feita uma abordagem mais “intuitiva” por meio dos teoremas desprezando-se uma construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas.

Problemas ainda maiores surgem com a proposição de programas nos quais a Geometria é desenvolvida sob o enfoque das transformações. A maioria dos professores de matemática não domina esse assunto, o que acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer enfoque. (PAVANELLO, 1993, 13).

Os sintomas do abandono do Ensino da Geometria nas escolas podem ser encontrados em pesquisas de âmbito nacional e internacional, segundo afirma Gazire (2000). “Frequentemente, a Geometria é completamente ignorada, ou, então, apenas alguns itens ligados a ela são incluídos. Nesse caso, as questões tendem a limitar-se a certos fatos sobre figuras simples e suas propriedades e a abordagem é relativamente pobre”. (GAZIRE, 2000, p.35)

Segundo a autora, a situação com relação ao Ensino da Geometria é mundial, como deduzido por ela da Conferência “Perspectivas para o Ensino de Geometria no Século

XXI”, organizado pela International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). Para Gazire (2000), de acordo com o documento a crise pela qual passa o ensino de Geometria tem como um dos motivos, dentre outros, os danos deixado pelo MMM.

O Movimento da Matemática Moderna’ contribuiu - ao menos indiretamente - para o declínio do papel da Geometria euclidiana, favorecendo outros aspectos da Matemática e outros pontos de vista sobre seu ensino por exemplo: teoria dos conjuntos, lógica, estruturas abstratas. (GAZIRE, 2000, 38).

Gazire (2000), em sua tese de doutorado “O não Resgate das Geometrias” buscou explicação do porquê do não resgate dessa disciplina passados tantos anos do seu abandono.

Pavanello (2004) relata por suas próprias experiências a preocupação que já carregava consigo desde a década de setenta, quando ainda professora de Matemática do ensino básico, sobre os rumos do seu ensino. “... o que estava acontecendo com o ensino da Geometria, cujas ideias e conceitos as pessoas pareciam não mais conhecer?” (PAVANELLO, 2004, p.1). Daí é possível observar que, no que tange ao seu ensino, há problemas antigos e novos a serem encarados, portanto, é preciso enfrentar as lacunas no ensino dessa disciplina e buscar novas alternativas a fim de minimizá-las.

A indagação da autora é uma pergunta ainda feita nos dias de hoje. Esses problemas em relação à Aprendizagem da Geometria podem ser confirmados através das experiências vivenciadas pelos professores em sala de aula e dos resultados obtidos em avaliações internas e externas. É relevante ressaltar, que a análise das avaliações, pode se tornar um grande aliado para que novas ações sejam tomadas a partir das dificuldades observadas.

As avaliações em larga escala sobre o ensino, principalmente o ensino da Matemática, tem retratado a situação em que o ensino brasileiro se encontra.

Dentre os conteúdos trabalhados pela Matemática ao longo das etapas de escolaridade, todos eles, em regra, rotulados como intrinsecamente difíceis, a Geometria chama atenção quando observamos os resultados das avaliações em larga escala. [...]A observação do percentual de acerto por item revela que, na escola, há conteúdos matemáticos com relação aos quais os estudantes parecem apresentar maiores dificuldades. É o caso da Geometria. (CAED, 2015, 54-55).

Dentre uma gama de fatores presentes como explicativos para o mau rendimento escolar dos alunos em matemática, parece prevalecer a afirmação categórica de que o problema é inerente à própria disciplina. “E a geometria tem tido uma considerável participação nesse fracasso.” Nogueira (2009, p.3). É preciso reconhecer que a dificuldade é produzida social e culturalmente, e, portanto, pode ser alterada.

D’ambrosio (1989) comenta que muitas vezes o aluno demonstra, através de respostas a exercícios, que aparentemente entendeu algum conceito matemático, porém, uma vez modificado algum aspecto do exercício, surpreende os professores com erros inusitados.



Segundo pesquisa realizada pelo CAEd/UFJF sobre os problemas de aprendizagem em Geometria, mesmo apresentando resultados insatisfatórios nas avaliações em larga escala, o problema com o desenvolvimento de habilidades em Geometria não é por ser mais difícil que os demais campos da Matemática. Eles podem ser encontrados em outros fatores, a exemplo, na metodologia aplicada para o ensino desse conteúdo.

É preciso refletir sobre quais outros fatores ocasionam essa deficiência na aprendizagem e buscar meios de como lidar com a Geometria de maneira significativa para os estudantes.

Também, é necessário que professores repense suas próprias práticas. Relata Guimarães (2014) que não havendo tempo de cumprir todo o programa, a Geometria é a primeira a ser sacrificada, pois o professor não se sente muito à vontade em ensiná-la. E complementa que o ensino da mesma se encontra defasado devido à utilização de uma metodologia ainda tradicional.

O uso das tecnologias favorece o ensino nesse aspecto, pois, possibilitam aos professores a inserção de novas metodologias e minimizam a prática dos métodos puramente tradicionais, isto é, em vez de, unicamente, seguir o livro didático ou aderir a uma mecanização dos processos (Resolva, Calcule) de exercitação, estas ferramentas possibilitam estratégias de modo que os alunos sejam envolvidos mais diretamente na construção do próprio conhecimento. A utilização das tecnologias possibilita o enfrentamento de problemas na aula de Matemática.

## 1.2 Tecnologias

Para Kenski (2003), a tecnologia se faz presente não só no momento atual, mas desde o início da civilização. Esteve presente nas mais variadas formas que, de tão naturais, não são vistas como tecnologias.

[...]desde o início da civilização, todas as eras correspondem ao predomínio de um determinado tipo de tecnologia. Todas as eras, portanto, cada uma à sua maneira, ‘eras tecnológicas’. Assim tivemos a Idade da Pedra, do Bronze... até chegarmos ao momento tecnológico atual. (KENSKI, 2003, p.17)

Segundo Chaves (1999), embora haja variadas formas de compreender a tecnologia, vista inclusive por alguns como o fruto do conhecimento científico especializado, é mais razoável interpretá-la de modo mais geral, “como qualquer artefato, método ou técnica criado pelo homem para tornar seu trabalho mais leve, sua locomoção e comunicação mais fáceis, ou simplesmente sua vida mais satisfatória, agradável e divertida”. (CHAVES, 1999, p.1).

Estes “artefatos, métodos ou técnicas” sempre estiveram presentes na vida do homem, e com o passar do tempo vieram sendo aprimorados e também acrescidos pelo

surgimento de novos equipamentos, cada vez mais modernos, dispondo de novas utilidades e promovendo trabalhos com maiores facilidades.

Kenski (2003) descreve *tecnologia* como sendo o conjunto de ferramentas e técnicas que correspondem aos usos que lhes foram destinados em cada época. E caracteriza que as *ferramentas* tecnológicas são tudo aquilo que fazemos uso no nosso dia a dia, no âmbito pessoal ou profissional. A *técnica* é descrita como sendo a maneira como são utilizadas essas ferramentas a fim de realizar certa ação.

Ainda segundo Kenski (2003), o avanço tecnológico não está restrito apenas aos novos usos de determinados equipamentos e produtos. Esta evolução provoca mudanças de comportamento tanto individual quanto de todo um grupo social.

Na era da informação, comportamentos, práticas, informações e saberes se alteram com extrema velocidade. Um saber ampliado e mutante caracteriza o atual estágio do conhecimento na atualidade. Essas alterações refletem-se sobre as tradicionais formas de pensar e fazer educação. Abrir-se para novas educações – resultantes de mudanças estruturais nas formas de ensinar e aprender possibilitadas pela atualidade tecnológica – é o desafio a ser assumido por toda a sociedade. (KENSKI, 2003, p.23).

As novas gerações devem ser preparadas para encarar novas responsabilidades e atividades essenciais para a sua existência, o que será possível com a transmissão do conhecimento, que conseqüentemente leva ao progresso. Daí então se entende que é uma necessidade vital saber utilizar os avanços tecnológicos em prol do melhoramento no processo educacional.

Existe uma gama de possibilidades em favor de melhores resultados no processo. Os avanços vêm ocorrendo velozmente e é preciso voltar os olhares para o ambiente da tecnologia em busca de soluções e melhorias para a educação. É importante ter a tecnologia como uma aliada no processo, que traz “transformações e benefícios inimagináveis” (TECHNOLOGIES, 2016, p.1).

Para Aguiar (2016, p.20) “estamos hoje na era da Informação, pois vivemos num mundo em que a tecnologia representa o modo de vida da sociedade.” No que tange à adesão pela sociedade em geral, aos diversos recursos tecnológicos, em especial os mais modernos, o autor complementa que “devido à velocidade com que a tecnologia perturba a sociedade, tentar enxergar o mundo de maneira mecanicista ou humanista não é mais adequado.” (AGUIAR, 2016, p.50).

Kenski (2003), fala das possibilidades de aprendizado mediada pelas tecnologias.

As atuais tecnologias digitais de comunicação e informação nos orientam para novas aprendizagens. Aprendizagens que se apresentam como construções criativas, fluidas, mutáveis, que contribuem para que as pessoas e a sociedade possam vivenciar pensamentos, comportamentos e ações criativas e inovadoras, que as encaminhem para novos avanços socialmente válidos no atual estágio de desenvolvimento da humanidade. (KENSKI, 2003, p.9).

Temos vivenciado a cada dia o avanço tecnológico. Vários instrumentos tornam-se obsoletos em curto prazo: computadores, celulares, TVs, filmadoras, entre outros. Crianças, adolescentes e jovens são os que mais acompanham esse avanço, atraídos por jogos, filmes, aparelhos celulares cada vez mais modernos, etc. Esta busca pela novidade desperta neste público grande interesse e fascinação.

O computador é um recurso tecnológico de grande potencialidade para o ensino, presente na maioria das escolas e já introduzido em nosso cotidiano e na sociedade em geral. Seu uso faz-se necessário na busca por novas perspectivas de ensino de forma a estar em sintonia com a geração da atualidade.

Assim, de modo a acompanhar e se adequar a uma sociedade tecnologicamente desenvolvida, vale destacar que a utilização da tecnologia de impressão 3D vem se tornando comum às mais variadas áreas, inclusive a acadêmica. Portanto, investigar suas potencialidades no ensino é um trabalho que se acredita ser necessário também para os professores.

### 1.3 Impressoras 3D

Segundo Aguiar e Yonezawa (2014), as impressoras 3D são uma tecnologia datada de 1984. Onde, os primeiros testes e protótipos foram criados pelo norte-americano Charles W. Hull, mais conhecido como Chuck Hull, um engenheiro físico, formado na Universidade do Colorado, na Califórnia. Desde então, houve vários aprimoramentos dessa máquina, que hoje já funciona com boa *performance* e tem vasta aplicabilidade. Hull é o inventor da Estereolitografia, tecnologia precursora da impressão 3D.

Essa tecnologia surge primeiramente, para a criação de protótipos para design industrial; este recurso permite transformar um modelo de protótipo no computador em um objeto físico, em um curto prazo de tempo comparado às tecnologias anteriores, em maioria.

Depois da Estereolitografia surgiram outros métodos. Ainda de acordo com Aguiar e Yonezawa (2014), em 1989 Scott Crump deu sua contribuição no desenvolvimento das impressoras 3D ao lançar a tecnologia FDM (Fused Deposition Modeling) que significa Modelagem por fusão e Deposição. Esse método constrói o objeto tridimensional por meio da deposição de um filamento plástico derretido, sobrepondo camadas que dão forma ao modelo projetado. Por ter um funcionamento mais simples que a estereolitografia, o FDM é hoje o método dominante nas impressoras 3D de uso pessoal; a estereolitografia ficou mais restrita a aplicações profissionais, como o design de produtos, engenharia e manufatura.

Segundo Aguiar (2016), essa tecnologia em desenvolvimento, conhecida hoje como impressão 3D, oferece perspectivas de mudanças na sociedade. Sobre esta denominação, explica:

O termo “Impressão 3D” é relativamente novo; passou a ser um termo que engloba os dispositivos que, controlados por computadores, constroem objetos tridimensionais camada por camada. Essa associação deve-se à similaridade de arquitetura das impressoras 3D, principalmente das que depositam filamento fundido, com a arquitetura das impressoras de papel, que trabalham em duas dimensões. (AGUIAR, 2016, p.20).

Esse recurso moderno está acessível na web. Empresas oferecem trabalhos de impressão de modelos 3D a custos razoáveis, o que isenta da necessidade de possuir ou acessar uma impressora 3D para iniciar. Várias faculdades e universidades já possuem essa ferramenta em seus departamentos de arquitetura ou design.

Uma grande vantagem do acesso direto a esta ferramenta é a economia de tempo. Mesmo que dependendo do tamanho, a impressão de um objeto possa levar algumas horas, com a contratação de uma empresa baseada na web, esse tempo é muito maior, podendo chegar a duas semanas a contar desde o envio do projeto até ter em mãos o objeto construído.

Segundo Aguiar (2016, p.18), com a disponibilização de projetos Open-Source de impressora 3D, como as RepRap<sup>1</sup>, o custo deste equipamento se tornou menor. Este fato foi essencial, tornando a impressora 3D mais acessível àqueles que desejam utilizá-la de maneira mais abrangente e em prol da educação.

As potencialidades desta tecnologia emergente já vêm sendo investigada há alguns anos, como afirma Aguiar (2016) em sua pesquisa. É bem verdade, que não raramente o noticiário informa os benefícios da utilização desta ferramenta na área da medicina, em especial na confecção de próteses. Mas não se limita a isso. Hoje esta tecnologia tem sido cobiçada para a construção de uma infinidade de modelos. Está presente no mundo da moda, na confecção de joias, peças para automóveis, na aviação, na arquitetura, engenharia, etc.

Na educação, esta tecnologia também vem ganhando créditos, embora segundo Aguiar (2016) seja um processo ainda tímido, com poucas literaturas discorrendo sobre seu uso no ensino. Sobre esse problema já existe novas perspectivas, como destaca Knill e Slavkovsky (2013b) ao afirmarem que a literatura sobre a impressão 3D está se expandindo de modo similar como na literatura sobre a informática quando os PCs entraram no mercado de consumo.

---

<sup>1</sup>RepRap: <http://reprap.org/>. Criado pelo Doutor Adrian Bowyer a RepRap foi possivelmente, a mais importante contribuição do meio acadêmico para a prototipagem rápida. De acordo com reprap.org, esta é a primeira máquina de fabricação auto replicadora de uso geral da humanidade. RepRap assume a forma de uma impressora 3D desktop livre capaz de imprimir objetos de plástico. Foi a primeira das impressoras 3D de baixo custo, e o Projeto RepRap iniciou a revolução da impressora 3D de código aberto.

### *1.3.1 A Impressora 3D no Ambiente Educacional*

Com o avanço tecnológico em ritmo acelerado, a busca por novas opções e inserção de recursos para usos na educação, em favorecimento ao ensino aprendizagem nas variadas áreas passa a ser uma necessidade inquestionável.

Na atualidade, os instrumentos de impressão 3D são um dos recursos que vêm conquistando espaço no campo educacional. O uso de impressão 3D para a produção de objetos físicos está de forma célere se tornando uma alternativa alcançável.

A impressão 3D se propõe a resolver problemas, cultiva pensamentos criativos, desperta interesses e incentiva o aprendizado. Seu uso traz ainda o benefício da diminuição de custos de desenvolvimento e tempo de produção de projetos.

Atentando para as mudanças sociais, o uso de novos recursos tecnológicos se faz indispensável no ensino. Segundo Kenski (2003), incorporar essas tecnologias no processo educacional é oportunizar à sociedade a se abrir para novas educações.

Pensando nisso, a impressão 3D, merece maior destaque e uma investigação sobre suas potencialidades e contribuições para o ensino. Não se pode ignorar o progresso e os novos horizontes no processo de ensinar e aprender, em virtude das constantes mutações das tecnologias na atualidade. “A sociedade moderna é dominada pelo conhecimento, é, sem dúvida, a sociedade do conhecimento.” (AGUIAR, 2016, p.49).

Segundo a Technologies (2016), a impressora 3D tem hoje grande utilidade no campo da educação. Em alguns países como Estados Unidos o processo de utilização dessa ferramenta já está mais avançado, no Brasil estamos no início dessa transformação, e este é \_ “um momento importante quando esses produtos se tornam uma ferramenta essencial no processo de aprendizado.” A impressão 3D pode ser utilizada em todas as etapas da educação, contribuindo com tarefas específicas em cada momento, desde o ensino básico até a universidade no desenvolvimento de linhas de pesquisas mais complexas.

Sobre a inserção das impressoras 3D, estudos feitos pela Wishbox technologies<sup>2</sup>, resalta a importância de reconhecimento da tecnologia da impressora 3D como facilitadora e colaboradora no processo de ensino.

O objetivo, então, é utilizar a tecnologia das impressões 3D para tornar o aprendizado mais palpável, dinâmico e interessante, permitindo que os alunos vivenciem experiências mais reais, fugindo um pouco do esquema tradicional estritamente teórico que, por vezes, se torna maçante. (TECHNOLOGIES, 2016, p.5).

É importante salientar que este recurso, assim como outros, tem por objetivo, no campo educacional contribuir para um processo de ensino mais dinâmico e eficiente.

---

<sup>2</sup>Empresa de tecnologia 3D que trabalha com renomadas marcas de impressoras 3D e oferecem serviços como: impressão tridimensional, Scanners 3D, venda de filamentos, corte a laser. <http://wishbox.net.br/>

Não devem ser encarados em nenhum momento como um instrumento capaz de substituir o professor, estes são indispensáveis. O que de fato precisa acontecer, é o professor se capacitar para o uso destas ferramentas, para que concretamente possa assegurar a contribuição destes novos instrumentos no processo. Do contrário, a banalização destes recursos pode colocar em xeque suas potencialidades frente ao ensino.

Nesse sentido, as impressoras 3D podem ser vistas como novas ferramentas colaboradoras no processo de ensino, dinamizando o que é tradicional. Este recurso tem a vantagem de levar a discussões mais ricas e melhor orientadas, com base em objetos reais, tornando assim o conteúdo ensinado mais concreto.

É um novo mundo repleto de possibilidades que, a partir de uma dinâmica mais interativa, estimula a criação, aumenta o interesse e otimiza o aprendizado dos alunos em todas as fases de sua educação, aproximando teoria e prática de formas nunca antes vistas. (TECHNOLOGIES, 2016, p.8).

As possibilidades de uso da impressão 3D, possíveis nas principais disciplinas da Educação Básica, podem através da criação de modelos e representações mais tangíveis, aproximar a teoria de sala de aula com a realidade dos estudantes e tornar possível a construção de conhecimento Matemático.

Esta tecnologia traz possibilidades, facilidades e agilidade em várias áreas como educação, engenharia, arquitetura, medicina, design, dentre outras. As possibilidades de aplicações da tecnologia de impressão 3D no campo educacional são inúmeras. As instituições devem avaliar aquelas que mais se adequam às especificidades e se prepararem para a aplicação de formas de ensino voltadas para a contemporaneidade e que sejam mais eficientes.

No ensino superior e técnico, essa tecnologia desperta grande interesse. Ela oferece soluções que antes pareciam inalcançáveis ou bem complicadas, e isso, com velocidade, praticidade e facilidade.

É interessante que universidades e escolas técnicas, pensando em resultados a longo prazo, façam investimentos nessa tecnologia, visto que ela vem como um convite aos talentos a se envolverem em trabalhos e pesquisas. Pesquisas que podem trazer com seus resultados, empoderamento aos estudantes e oferecer novas oportunidades de criação e investigação dentro das instituições, tornando uma parceria benéfica para ambos.

Para Lipson (2007), o ensino pode ser melhorado através de atividades práticas com disponibilidade de recursos virtuais, mais ainda quando os conceitos envolvidos são difíceis de serem visualizados e compreendidos.

Impressoras 3D dão nova perspectiva à didática. Pesquisadores apontam mudanças nos ambientes de ensino com o uso das impressoras 3D, a partir da possibilidade de um conceito novo de recurso didático, capaz de tornar o processo de Ensino e Aprendizagem mais interativo e dinâmico.

### 1.3.2 Impressoras 3D e a Matemática

Segundo Segerman (2012), o termo “impressão 3D” abrange mais de uma tecnologia relacionada na produção de objeto físico tridimensional por meio de um modelo computacional, construído por camadas sucessivas.

Nessa perspectiva de inovar os métodos de ensino com foco em uma melhor aprendizagem, temos como importante ferramenta aliada, o uso de tecnologias como a impressão 3D. O uso desta tecnologia, “...que vem popularizando-se bastante nos últimos anos, pode contribuir com o processo de ensino da Matemática, como por exemplo, nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Cálculo e Álgebra Linear.” (SILVA; SIPLE; FIGUEIREDO, 2016, 1).

Silva, Siple e Figueiredo (2016), destacam como uma das potencialidades do uso da impressão 3D nessas disciplinas, o fato de que o manuseio e a visualização do objeto impresso podem facilitar a compreensão da mesma. Assim, a utilização da impressão 3D, proporciona vida aos conteúdos matemáticos e também em diversas outras disciplinas.

O manuseio do objeto facilita observar propriedades geométricas nas figuras tridimensionais que, somente com o acesso à visualização virtual, seria quase impossível de se perceber. “A construção desses objetos ativa os processos da construção do conhecimento.” (AGUIAR, 2016, p.25).

Encontramos à nossa volta, variadas formas regulares e irregulares. Estudar os elementos dos sólidos geométricos contribui para melhor visualização dessas figuras no espaço. É interessante que o professor ofereça aos seus alunos, recursos capazes de traduzir de forma clara e objetiva a construção de um sólido, por exemplo.

Os desenhos consistem numa forma simples de representar os sólidos geométricos, porém nem todos os alunos possuem habilidades nessa arte. Sendo assim, podem ser prejudicados se esta for a única metodologia utilizada.

Segerman (2012) destaca que na criação de modelos matemáticos, há uma série de vantagens, além de sua atratividade. Evidencia a grande liberdade de construção na geometria através do procedimento “aditivo” de impressão 3D, que minimiza os problemas existentes caso fossem remover material de um sólido inicial com técnicas de fabricação “subtrativas” como tornear, perfurar ou esculpir objetos com emaranhadas estruturas internas. “Esse tipo de objeto seria extremamente difícil de fabricar por outros meios que não a impressão em 3D” (Segerman, 2012, p.2, tradução nossa).

Proporcionado pela impressão 3D, o objeto representado em sua forma física, viabiliza a associação de conceitos, levando o aluno a perceber como a associação da teoria

à prática contribui na resolução de problemas reais e provoca o estudante ir ao encontro de novos desafios.

Silva, Siple e Figueiredo (2016, p.1), reiteram que

[...] é fundamental entender que a visualização de um objeto matemático e a sua manipulação tátil podem desempenhar um papel importante na elaboração de processos mentais mais eficientes[...].

Para Knill e Slavkovsky (2013b), a tecnologia de impressão 3D pode ajudar a visualizar as demonstrações matemáticas. De acordo com os autores, os modelos impressos permitem ilustrar conceitos em vários campos da Matemática como Cálculo, Geometria e Topologia. Afirmam com otimismo que essa ferramenta proporcionará grande impacto na Educação e asseguram a importância dos modelos físicos para o aprendizado ativo e prático.

A potencialidade da impressora 3D de agregar conhecimento e ativar as estruturas mentais é destacada em várias literaturas. Knill e Slavkovsky (2013), sobre a importância da visualização em Matemática possibilitada pela tecnologia de impressão 3D discorrem que:

Figuras e modelos ajudaram a expressar ideias mesmo antes que a linguagem matemática formal pudesse descrever as estruturas. [...] A pesquisa da matemática na antiguidade era muitas vezes visual: os números em tabuletas de argila da Babilônia ilustram triplos pitagóricos, o papiro matemático de Moscou apresenta um quadro que ajuda a derivar a fórmula volumétrica de um tronco. Al-Khwarizmi desenhou figuras para resolver a equação quadrática. A visualização não é apenas ilustrativa, educacional ou heurística, tem valor prático: os triângulos de Pitágoras realizados por cordas ajudaram a medir e dividir a terra na Babilônia. [...] A visualização é especialmente crucial para a educação e pode levar a uma nova visão. [...] . As figuras podem inspirar novas ideias, gerar novos teoremas ou auxiliar em cálculos [...]. (KNILL E SLAVKOVSKY, 2013b, p.1, tradução nossa).

Dessa forma, entende-se que a visualização sempre foi um ingrediente importante para a comunicação de matemática.

De acordo Passos e Nacarato (2014, p.1154), entende-se por visualização em Matemática:

Como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto.

Continuando, os mesmos autores acrescentam:

Seria a percepção visual do sujeito enquanto a construção de um processo visual, o qual sofre interferências de sua experiência prévia, associada a outras imagens mentais armazenadas em sua memória. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. A preocupação com a visualização quando se aborda o processo



de ensino e de aprendizagem da Geometria pode ser considerada como um dos processos envolvidos nas diferentes maneiras de representações. Entendemos também que a visualização está diretamente relacionada com a representação. Esta pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou como modelos manipuláveis, ou mesmo através da linguagem e de gestos. Os diferentes tipos de visualização que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis. (PASSOS; NACARATO, 2014, p.1154).

Os autores, Netz (1999) e Giaquinto (2005), citados por Knill e Slavkovsky (2013, p.1), reforçam a importância da visualização em Matemática desde o princípio e que continua a ser essencial no ensino. Para Netz, “Matemáticos gregos como Apolônio, Aristarco, Euclides ou Arquimedes dominaram a arte de representar a matemática com figuras.” e, Giaquinto assevera que “a imaginação visual desempenha um papel importante na extensão do conhecimento geométrico.”

A importância de incremento visual e tátil no ensino de matemática da atualidade é hoje sem dúvidas, uma ferramenta essencial e indispensável em prol de uma solidez da aprendizagem. A impressora 3D possibilita essa viabilidade.

Segerman (2012), também mostra com sua pesquisa intitulada “3D printing for mathematical visualisation” a importância da visualização e apresenta exemplos construídos em impressoras 3D de outros trabalhos também relacionadas a essa finalidade. Segundo o pesquisador, “o objeto resultante muito estreitamente aproxima o ideal matemático do modelo” (Segerman 2012, p.1, tradução nossa). Aguiar, (2016, p.41), complementa que “as visualizações também ajudam a mostrar a beleza da matemática e promovê-la para as pessoas.”

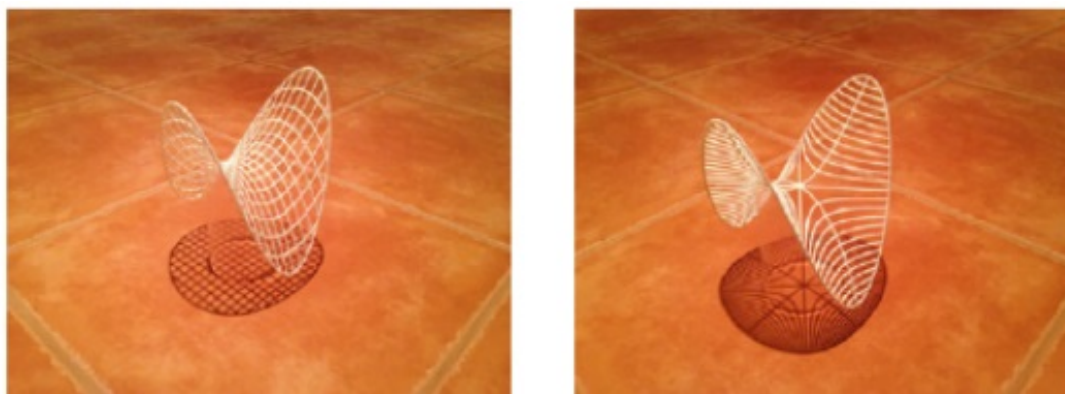
Os autores, Knill e Slavkovsky (2013b), consideram que mesmo com todo o aparato tecnológico que permite a exibição virtual de conteúdos espaciais e dinâmicos, tudo isso ainda é incomparável com a possibilidade de manuseio em nossas mãos nuas, e esta é uma possibilidade oferecida pela impressora 3D sem muito esforço.

O processo de impressão em 3D é o resultado final em uma sucessão de técnicas de visualização. Segerman (2012) aborda a sucessão de trabalho da impressora 3D do seguinte modo: conceito matemático  $\rightarrow$  modelo de computador  $\rightarrow$  objeto impresso em 3D.

Dessa maneira, entende-se que o conhecimento matemático antecede todo o processo, isto é, o resultado final é exatamente a consecução do que já é conhecido e aplicado por quem o desenvolve. Sendo a indicação da primeira seta a construção feita pelo administrador dentro de um programa de design assistido por computador ou por programa escrito pelo usuário. Assim, “em ambos os casos a geometria do modelo de computador pode ser extremamente fiel ao conceito matemático.” (SEGERMAN, 2012, p.1, tradução nossa).

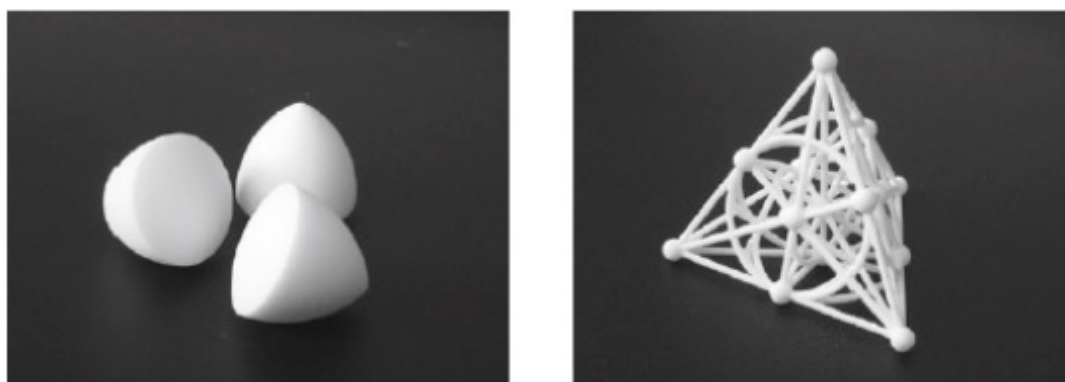
Em seu artigo, Segerman (2012) apresenta exemplos de visualizações impressas em 3D. Dentre outras, as criações dos matemáticos David Bachman e Burkard Polster, exibidas respectivamente na figura 1 e na figura 2. Estes desenhos, segundo o autor, estão disponíveis em Shapeways.com, um serviço de impressão 3D hospedado na Web.

**Figura 1 – (a) Um parabolóide hiperbólico, mostrando fatias através da superfície nas direções x e y e (b) mostrando curvas de nível. Usado com permissão, copyright 2010, David Bachman**



**Fonte:** (SEGERMAN, 2012)

**Figura 2 – (a) Um sólido de largura constante criado pela rotação de um triângulo reuleaux (ou triângulo esférico) em torno de um de seus eixos de simetria. (b) Uma representação de  $PG(3,2)$ , que é o menor espaço projetivo finito**



**Fonte:** (SEGERMAN, 2012)

Relata Segerman, que uma série de outros artistas matemáticos vem trabalhando com impressão 3D, citando Vladimir Bulatov, um criador de desenhos envolvendo simetria de poliedros ou geometria hiperbólica tridimensional. Ele apresenta em seu trabalho uma introdução em software de impressão 3D, apresentando exemplos de softwares desde os mais caros usados em filmes e jogos de computador e também de softwares livres e de código aberto.

Basniak e Liziero (2017), ao falar das novas perspectivas para o ensino e das possibilidades mediadas pelo uso de materiais concretos produzidos em impressoras 3D, trazem o relato de uma experiência por ocasião do projeto de iniciação científica, intitulado “Impressora 3D: Construindo representações para o Ensino”, como sendo o início de suas experiências com a impressora 3D. Neste trabalho, apresentaram um estudo sobre a impressora que dispunham para a pesquisa, e as aplicações da matemática para a criação de modelos 3D, na construção de modelos tridimensionais solicitados por professores para o ensino nas áreas em que atuavam.

### **1.3.3 Impressoras 3D e o Professor**

Com a tecnologia em avanço, é cada vez mais esperado um processo de ensino mais dinâmico. Professores podem por meio de suas práticas proporcionarem aos estudantes aulas mais interessantes que possibilitem experiências mais intensas na aprendizagem, como por exemplo, utilizando as tecnologias disponíveis.

Sobre o domínio e utilização dos recursos tecnológicos e as alterações que ela provoca no ambiente de ensino, Kenski (2003, p.10) ressalta que “as velozes transformações tecnológicas da atualidade impõem novos ritmos e dimensões à tarefa de ensinar e aprender. É preciso estar em permanente estado de aprendizagem e de adaptação ao novo.”

É cada vez mais desafiador para um professor de Matemática tornar suas aulas mais atrativas e motivar os estudantes a construírem uma Aprendizagem efetiva. A busca por alguma situação prática, cotidiana, que tenha correlação com o conteúdo trabalhado em sala, desperta no aluno a importância do conhecimento matemático para mudanças em sua realidade.

Através dos materiais impressos em 3D ou mesmo na criação dos modelos projetos para serem impressos, há uma maior proximidade do estudante com o real, absorvendo desse modo, mais informações nesta direção.

É mais fácil para os professores atrair e manter a atenção dos alunos e, para estes, mais interessante absorver e guardar uma grande quantidade de conteúdo. Basta pensar no interesse que crianças e adolescentes demonstram ao criar, tocar e interagir com objetos — a atenção é mais direcionada e as informações retidas com maior tranquilidade. (TECHNOLOGIES, 2016, p.10).

Basniak e Liziero (2017) discutem a dificuldade dos professores em visualizar as possibilidades oferecidas pelas tecnologias para o ensino, permeadas pela criação de novos materiais pedagógicos, através de suas experiências com o uso da impressora 3D.

Esses pesquisadores convidaram alguns professores para indicar representações tridimensionais a serem usadas em suas aulas no Ensino Superior ou na Educação Básica. Obtiveram retorno de três profissionais, dentre eles, um graduando em Matemática, que

solicitou alguns sólidos geométricos. Os outros dois solicitaram a representação da fita dupla de DNA e da ligação tetraédrica do carbono.

Um ano depois, após novo contato dos pesquisadores, uma quarta pessoa pediu a produção do modelo da Faixa de Möbius, do Triângulo de Penrose e da superfície de Seifert. Após a entrega dos modelos produzidos, foi solicitado aos professores uma avaliação e relato de suas experiências no uso destes objetos em suas aulas. Todos os solicitantes consideraram a representação satisfatória e, portanto, atenderam às expectativas. Alguns deles reiteraram que poderia haver aprimoramentos quanto à estética e aos encaixes. Reconheceram que o fato de manusear o objeto facilita a absorção do conhecimento através da visualização e enriquece as discussões sobre o tema trabalhado.

O graduando em Matemática considerou ricas as contribuições dos sólidos na abordagem de assuntos de geometria espacial. Os materiais foram usados pelo acadêmico em suas aulas no Ensino Fundamental, onde constatou que o manuseio dos objetos possibilitou melhor compreensão de conceitos geométricos, a partir da possibilidade dada de observarem propriedades que antes só viam por ilustrações.

O professor ressalta as cores atrativas e a facilidade de manuseio dos modelos, como sendo apropriados para o estudo de temas relacionados à geometria espacial tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Segundo Basniak e Liziero (2017), modelos solicitados durante a pesquisa por eles realizada, como a Faixa de Möbius ou do Triângulo de Penrose, não estão disponíveis no mercado na forma física, mas é possível encontrá-los virtualmente, inclusive projetos para impressão. Dessa forma, fica evidente a potencialidade da impressora na construção de novos materiais, alguns difíceis de serem adquiridos.

A tecnologia de impressão 3D é um recurso que pode ser muito útil para o processo de Ensino e Aprendizagem nas diferentes áreas, dada a possibilidade de confecção de materiais pedagógicos, inclusive de estruturas complexas. "Mais do que isso, a tecnologia da impressão 3D propicia a construção de que antes só eram acessíveis virtualmente, possibilitando que o aluno compreenda melhor o conteúdo trabalhado com estes modelos por meio do manuseio e exploração desses materiais."(BASNIAK; LIZIERO, 2017, p.4).

Assim, é importante destacar a importância do papel do professor como mediador. Sendo que, para êxito na aprendizagem dos estudantes é necessário que este profissional tenha domínio sobre esta tecnologia. A pesquisa desenvolvida por Aguiar (2016) colabora com esta formação, pois tem como objetivo principal compreender a utilização de impressoras 3D na confecção de instrumentos didáticos e examinar a utilidade dessa tecnologia na construção desses materiais diante das tradicionais formas de criá-los. Do mesmo modo, este trabalho contribui na atualização profissional do professor.

### 1.3.4 *Tecnologia de Impressão 3D em Números*

Segundo a Technologies (2016), as projeções de mercado da tecnologia de impressão 3D apresentam em três anos um surpreendente crescimento, tornando-se 50% mais barata e 400% mais rápida. Embora tenha surgido em 1983, apenas nos últimos anos esse mercado tem se expandido para áreas mais abrangentes, permitindo novas oportunidades e facilitando seu acesso para diversos setores.

A evolução da impressão 3D se deu em 1983 com o desenvolvimento da estereolitografia, tecnologia que viabilizou a impressão 3D, sendo esta patenteada três anos depois por Charles W. Hull. No ano seguinte a SLA-1, primeira impressora de estereolitografia, já estava disponível comercialmente pela empresa 3D Systems<sup>3</sup>. Somente em 1991, surgiu pela primeira vez o termo “impressão 3D”. Há exatos vinte anos após seu surgimento, esta tecnologia é experimentada em projetos de designer de joias.

A primeira impressora a cores de alta definição, a Spectrum Z510, foi lançada no mercado em 2005 e no ano seguinte um projeto Open Source RepRap foi criado pelo Dr. Adrian Bower, ocasião em que foi lançada a primeira impressora 3D auto-replicante.

Em 2008 surgiu a comunidade Thingiverse.com<sup>4</sup>, um site dedicado a disponibilizar modelos 3D prontos para impressão, criado pela Makerbot<sup>5</sup>, que em 2009 lançou a Cupcake CNC, sua primeira impressora 3D vendida em forma de kits para montagem. Em 2014 esta comunidade já contava com mais de duzentos milhões de downloads de projetos 3D.

A PUC Rio, pelo departamento de artes e designer criou em 2011 o NEXT, núcleo de experimentação tridimensional com laboratório de impressoras 3D. Em 2012 já era possível comprar uma impressora montada e pronta para uso. Neste mesmo ano a USP criou o primeiro FAB LAB<sup>6</sup> brasileiro, período em que a indústria já movimentava US\$ 2.2 bilhões.

No ano de 2013 funda-se a comunidade 3D Hubs onde se prestam serviços de impressão 3D. Ano em que também surgiu a rede E-NABLE onde próteses impressas em

---

<sup>3</sup> Cofundada por Chuck Hull em 1987, a 3D Systems é a primeira empresa de impressão em 3D do mundo. <https://br.3dsystems.com/>.

<sup>4</sup> <https://www.thingiverse.com/education> é um enorme recurso de objetos imprimíveis em 3D para download. Comunidade criada pela Makerbot.

<sup>5</sup> Makerbot: Fabricante de impressoras 3D, <https://www.makerbot.com/>.

<sup>6</sup> A rede Fab Lab é um programa educacional do Center for Bits and Atoms (CBA) do MIT – Massachusetts Institute of Technology – e cada um dos labs se caracteriza como uma plataforma de prototipagem de ideias visando a inovação e invenção e proporcionando estímulo para o empreendedorismo local. É também uma plataforma para a aprendizagem: um lugar para jogar, criar, aprender, orientar e inventar. Ser um Fab Lab significa estar conectado com uma comunidade mundial de empreendedores, alunos, educadores, técnicos, pesquisadores, fabricantes e inovadores – uma rede de compartilhamento de conhecimento que se estende por mais de 70 países e mais de 500 laboratórios. Também significa compartilhar ferramentas e processos comuns, construindo assim uma rede global fortemente conectada em torno da pesquisa e inovação. Essas informações podem ser consultadas no link <http://www.usinafablab.com.br/fablab>, acesso em maio 2018.

3D são oferecidas por voluntários, a pessoas em necessidade. Nesse mesmo ano a Wishbox torna-se a pioneira no acesso a impressoras 3D no Brasil, sendo a primeira distribuidora Makerbot fora dos Estados Unidos.

No ano de 2016, o mercado já movimentava 40,5% a mais do que em 2012, com previsões para 2018 de US\$ 12,8 bilhões e de US\$ 35 bilhões em 2020.

Segundo dados divulgados pela Wishbox, dos produtos impressos em 3D, 31,7% são fabricados para veículos motorizados. Seguido de produtos de consumo 18,4%, máquinas de negócio 11,2%, medicina 8,8% e em quinto lugar a educação com 8,6%. Aeroespacial, outras áreas e o Governo/Militar fecham com respectivamente 8,2%, 7,7% e 5,5%.

Os números para o futuro são promissores. Percebe-se numa busca rápida na internet sobre as impressoras 3D um otimismo em relação aos avanços desta tecnologia, visto que todos os segmentos parecem prontos para inovar e crescer, principalmente o setor industrial, sinalizando assim a chegada de uma nova era. A impressão 3D traz consigo um leque de possibilidades de inovação e vem prometendo eficiência, qualidade e produtividade.

## 2 CAPÍTULO II - REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO

### 2.1 Conceitos Matemáticos Motivadores

Antecedendo as etapas do processo de construção do instrumento didático confeccionado na impressora 3D, apresentam-se os conceitos matemáticos que motivaram a proposta da criação do material para ser explorado em sala de aula do ensino Básico e Superior.

A criação do material didático foi baseada no conceito das somas de Riemann, para exploração desses conceitos na aplicação no cálculo de área e volume por aproximações. Além disso, o material pode ser explorado para melhor compreensão da definição da integral de Riemann.

#### 2.1.1 Noção de Área

Assumimos o conceito de área de acordo com Lima (1991), como o conhecimento matemático utilizado com a finalidade de comparar e medir uma superfície. Entendemos por *superfície* uma região do plano limitada por uma figura bidimensional. Quando fazemos a medida de uma *superfície*, queremos um número para expressar a porção do plano coberto pela figura. A esta medida damos o nome de Área. A definição geral de área pode ser consultada em Lima (1991).

Para o cálculo de área devemos proceder de modo semelhante ao que é feito para a medição de comprimento de um segmento de linha. Inicialmente precisamos selecionar uma unidade de medida. Desse modo, devemos utilizar uma outra superfície como sendo a unidade de medida de área com a qual podemos medir a quantidade de espaço encerrado por uma região no plano, o que equivale a verificar quantas vezes essa unidade está dentro da região a ser medida. O resultado será um número que revela quantas vezes a unidade de área cabe naquela superfície. Determinando assim a área ocupada por uma região no plano.

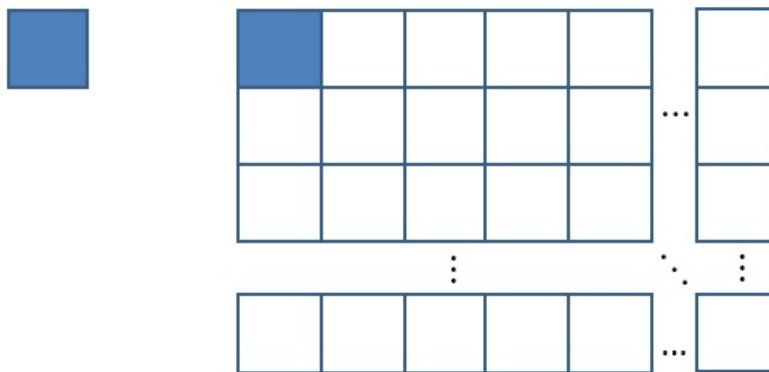
De modo geral, adotamos o quadrado com lado medindo uma unidade de comprimento (*quadrado unitário*) como unidade de área. Por definição, a área de um quadrado unitário será igual a uma unidade de área (1 *u.a.*).

**Figura 3 – Unidade de área**

Podemos exemplificar o que foi dito, calculando a área do retângulo na figura a seguir. *Retângulo* é um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

No que segue é necessário observar que estamos supondo que as medidas são múltiplos inteiros da unidade de comprimento utilizada. A regra obtida pode ser generalizada para medidas reais.

Consideremos um retângulo A com lados de medidas  $m$  e  $n$  unidades de comprimento, então, mediante paralelas aos lados, é possível decompor a figura em  $mn$  quadrados unitários, desse modo teremos que a área da região retangular é dada por  $m.n$ .

**Figura 4 – Retângulo de dimensões m por n**

Verifique que fazendo a sobreposição da unidade de medida sobre a superfície, serão necessários  $m.n$  quadrados unitários, com área 1 cada. Logo a área de A é dada pela expressão:

$$\text{Área de } A = m.n$$

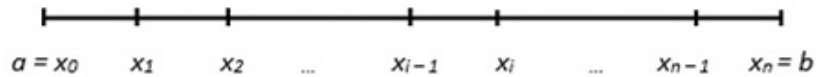
De outro modo, também é possível calcular a área de uma figura pela decomposição em outras figuras que já sejam de áreas conhecidas. Usaremos deste fato para justificarmos uma aproximação da área do círculo.

Para definir a área de uma figura plana qualquer, aproximamos a figura utilizando de polígonos cujas áreas possam ser encontradas pelos métodos da geometria elementar. Usaremos aqui do conceito da Soma de Riemann a fim de trabalharmos a área do círculo por aproximações por falta.



### 2.1.2 Integral de Riemann

Primeiramente, definimos a partição de um intervalo de acordo Guidorizzi (2001). Chama-se *partição*  $P$  do intervalo  $[a, b]$  a qualquer decomposição de  $[a, b]$  em subintervalos da forma  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  e os números  $x_i$  são tais que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Indicaremos uma partição  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  simplesmente por  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .



Indicaremos por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , a amplitude do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ , será indicada por Assim:

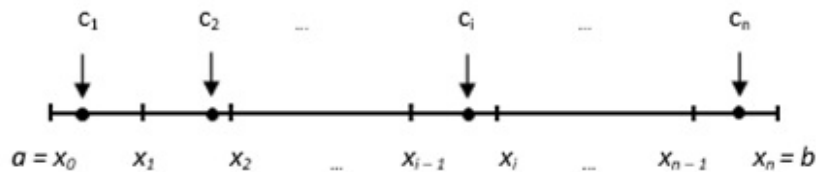
$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \text{ etc.}$$

Os números representados por  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$  não são necessariamente iguais e, o maior deles denomina-se *amplitude* da partição  $P$  e indica-se por  $\max \Delta x_i$ .

No caso de termos todos os  $n$  subintervalos da partição de mesmo comprimento, a amplitude é igual a  $\frac{b-a}{n}$ .

### 2.1.3 Soma de Riemann

Segundo Guidorizzi (2001), consideremos uma função  $f$  definida em  $[a, b]$  e  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . Seja  $c_i$  um número no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  escolhido arbitrariamente, para cada índice  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).



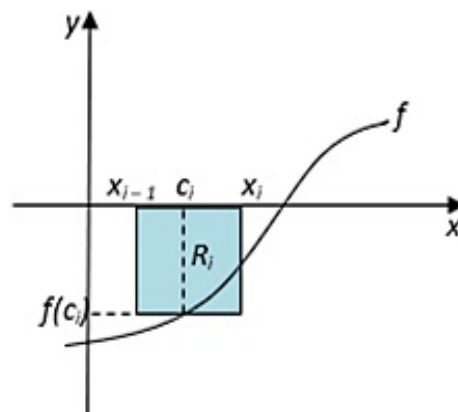
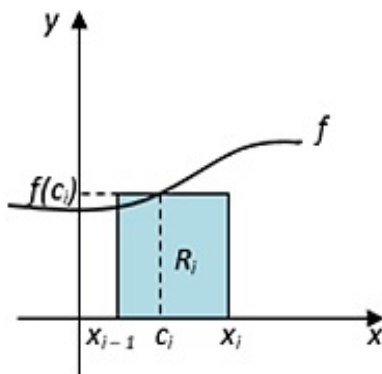
Temos então que o número representado pela expressão

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$$

denomina-se *soma de Riemann* de  $f$ , relativa à partição  $P$  e aos números  $c_i$ .

A soma de Riemann consiste basicamente em tomar a área de uma região sob uma curva, aproximadamente, como a soma da área dos retângulos acumulados sem sobreposição, nesta região. Cada um destes retângulos com base sendo um subintervalo de  $[a, b]$  e altura dada por  $f(c_i)$ .

Temos que se  $f(c_i) > 0$ ,  $f(c_i) \Delta x_i$  então é a área do retângulo  $R_i$  determinado pelas retas  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $y = 0$  e  $y = f(c_i)$ . Se  $f(c_i) < 0$ , então a área de  $R_i$  será  $-f(c_i) \Delta x_i$ .



$$\text{área de } R_i = f(c_i) \Delta x_i$$

$$\text{área de } R_i = -f(c_i) \Delta x_i$$

Geometricamente, podemos então interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

como a *diferença* entre a soma das áreas dos retângulos  $R_i$  que estão acima do eixo  $x$  e a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo  $x$ .

O conceito da soma de Riemann é essencial para a definição de integral. Esta definição é motivada de modo simples: fazer uma estimativa da área da região abaixo do gráfico de uma função  $f(x) \geq 0$  definida num intervalo  $[a, b]$ .

### 2.1.4 Integral de Riemann: Definição

Veremos a definição da integral de Riemann como descrita por Guidorizzi (2001).

Sejam  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $N$  um número real. Dizemos que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

tende a  $N$ , quando  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = N$$

se, para todo  $\lambda > 0$  dado, existir um  $\delta > 0$  que só dependa de  $\lambda$  mas não da escolha particular dos  $c_i$ , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - N \right| < \lambda$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $\max \Delta x_i < \delta$ .

Tal número  $N$ , que quando existe é único e denomina-se *integral* de Riemann de  $f$  em  $[a, b]$  ou, comumente referimo-nos como *integral definida* de  $f$  em  $[a, b]$  e denota-se por  $\int_a^b f(x) dx$ . Então, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Se  $\int_a^b f(x) dx$  existe, então diremos que  $f$  é *integrável* (segundo Riemann) em  $[a, b]$ .

Assim, esta definição nos diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

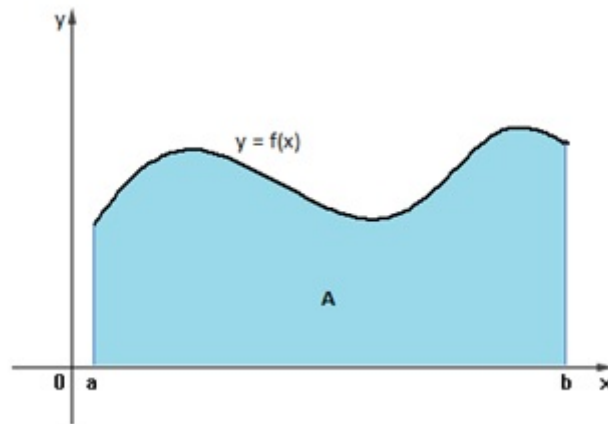
## 2.2 A Soma de Riemann Aplicada no Cálculo de Áreas

Veremos a aplicação das somas de Riemann no cálculo de áreas conforme descrito por Guidorizzi (2001).

Considere uma função  $f$  contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Queremos definir a área do conjunto  $A$  do plano limitado pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ , pelo eixo  $x$  e pelo gráfico de  $y = f(x)$ .

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

**Figura 5 – Região sob a curva da função  $f(x)$**



Seja, então,  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e sejam  $c_i'$  e  $c_i''$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  tais que  $f(c_i')$  é o valor mínimo e  $f(c_i'')$  o valor máximo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ .

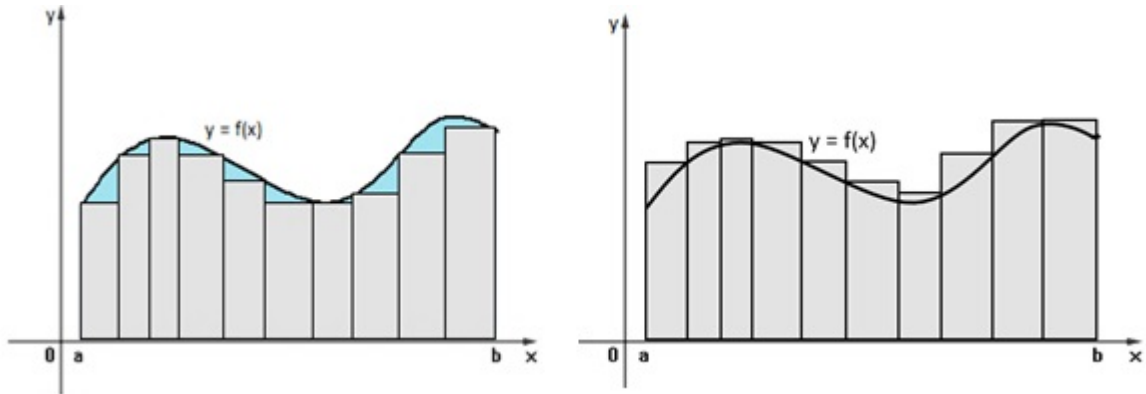
Uma boa definição para a área de  $A$  deverá implicar que a soma de Riemann

$\sum_{i=1}^n f(c_i') \Delta x_i$  seja uma aproximação por falta da área de  $A$  e que

$\sum_{i=1}^n f(c_i'') \Delta x_i$  seja uma aproximação por excesso, isto é, a área de  $A$  se encontra entre as somas de Riemann e pode ser cada vez mais, melhor aproximada por falta ou por excesso.

$$\sum_{i=1}^n f(c_i') \Delta x_i \leq \text{área de } A \leq \sum_{i=1}^n f(c_i'') \Delta x_i$$

Figura 6 – Aproximação da área da região sob a curva de  $f(x)$  pelas somas de Riemann Inferior e superior



Como as somas de Riemann mencionadas tendem a  $\int_a^b f(x) dx$ , quando  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , podemos escrever que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \text{área de } A \leq \int_a^b f(x) dx$$

Portanto, nada mais natural do que definir a área de A por

$$\text{Área } A = \int_a^b f(x) dx.$$

Da mesma forma define-se área de A no caso em que  $f$  é uma função integrável qualquer, com  $f(x) \geq 0$ .

### 2.2.1 Área do Círculo Aproximada pela Soma da Área de Retângulos

Lima et al. (1991), apresenta em seu livro “Medida e Forma em Geometria” a seguinte definição de círculo.

**Definição:** Considere um plano  $\alpha$ . Seja  $O$  um ponto de  $\alpha$  e  $r$  um número real positivo. O círculo de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto constituído por todos os pontos do plano que estão a uma distância  $\leq r$  do ponto  $O$ .

Entende-se por *circunferência* “o conjunto dos pontos do plano situados à distância  $r$  do centro  $O$ , isto é, a linha que limita o círculo” Lima et al. (1991, p.47) e, portanto, a circunferência de um círculo é definida como o comprimento do círculo.

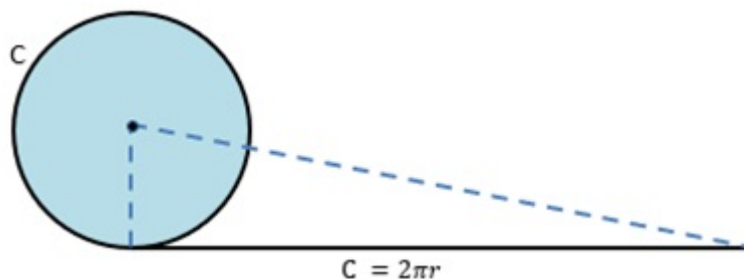
Como já é de conhecimento, o comprimento de um círculo de raio  $r$  é tradicionalmente representado na forma  $2\pi r$ . Sabe-se que  $\pi$  é um número irracional, cujo valor aproximado com seis algarismos decimais exatos é  $\pi = 3,141592$ .

Trataremos aqui da área do círculo cujas aproximações por falta são as somas das áreas de retângulos nele inscrito. Para isso, usaremos a ideia das somas de Riemann. Embora a expressão “aproximação por falta” tenha sentido apenas se rigorosamente usarmos a noção de limite, fundamental no cálculo diferencial e integral, mas que não compõe o currículo do ensino básico assim como a soma de Riemann, aqui usaremos essa expressão mais de uma forma intuitiva, considerando ser esta abordagem suficiente. A escolha por este procedimento se deu acreditando que este modo nos fornece uma nova visão de como trabalharmos áreas por aproximações, em especial a área do círculo.

O método da comparação por falta que será aplicado para o cálculo aproximado da área do círculo não é um método de descoberta, mas sim de prova e demonstração. Antes de aplicá-lo é preciso saber a que valor se quer chegar, ainda que aproximadamente.

No caso da área do círculo, Arquimedes já considerava a seguinte equivalência: *Um círculo equivale (em área) a um triângulo retângulo que tem altura igual ao seu raio e a base igual ao comprimento da sua circunferência.*

**Figura 7 – Comprimento da circunferência**



Essa equivalência pode ser escrita, em notação atual, do seguinte modo.

$$\text{Área do círculo} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Temos que o número  $\pi$  é, por definição, a área de um círculo de raio 1.

Para darmos continuidade, agora usando os retângulos para estimar a área do círculo, vejamos alguns conceitos matemáticos relacionados ao círculo e seus elementos segundo Barbosa (1995).

**Definição:** *Dados dois pontos B e C sobre um círculo de centro O e raio r. O segmento BC chama-se corda do círculo. Uma corda que passa pelo centro denomina-se diâmetro do círculo.*

**Proposição:** *Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.*

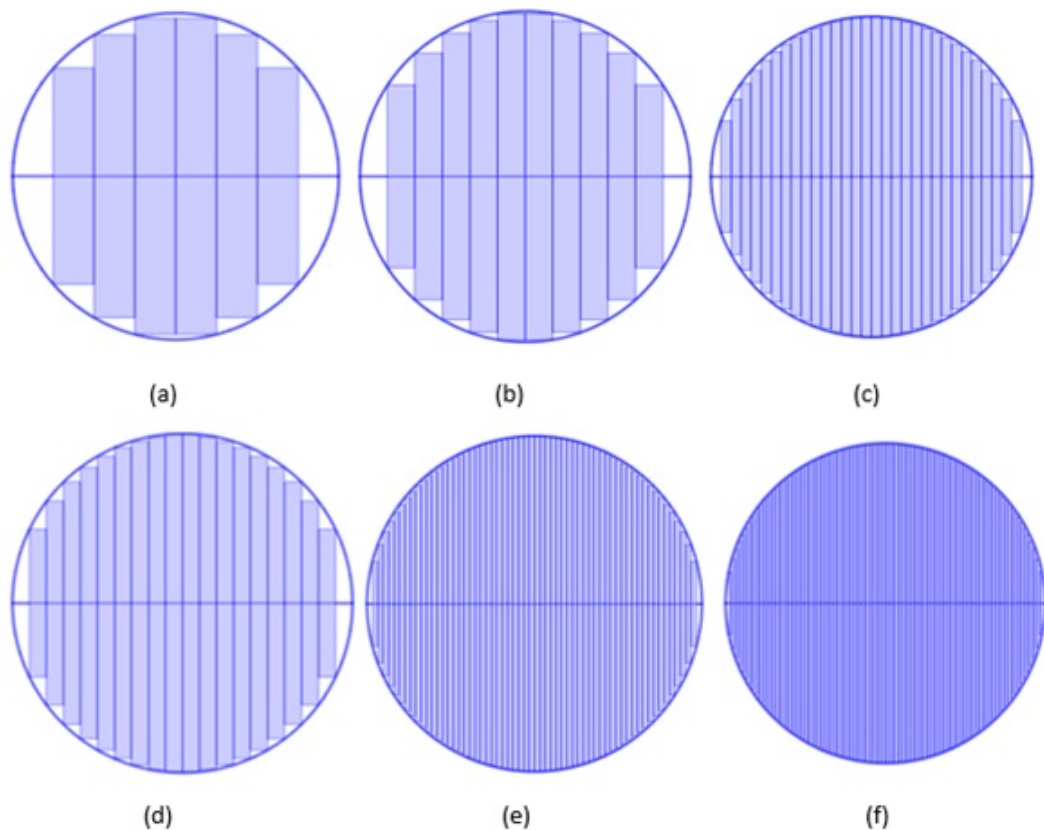
Omitiremos aqui a demonstração para tal proposição.

Nesse estudo, pretende-se mostrar usando a soma das áreas de retângulos, que o círculo possui área aproximando-se do valor de  $\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio do círculo, de modo que, quanto maior for a quantidade de retângulos tomados, mais próximo desse valor chegaremos.

Nosso método é aproximar o círculo por regiões mais simples cuja área já é conhecida. Tais regiões são retangulares, e sabemos que a área do retângulo é dada por comprimento vezes largura.

Iniciaremos preenchendo a região circular utilizando retângulos. À medida que aumentamos o número de retângulos, intuitivamente, a soma de suas áreas se aproxima da área do círculo. De modo que, a altura  $h$  do retângulo torna-se tão pequena quanto se deseje, bastando que a quantidade  $n$  de retângulos seja suficientemente grande.

**Figura 8 – Aproximação da área do círculo pela soma da área de retângulos:**(a) círculo com 8 partições do diâmetro, (b) círculo com 12 partições do diâmetro, (c) círculo com 22 partições do diâmetro, (d) círculo com 32 partições do diâmetro, (e) círculo com 62 partições do diâmetro, (f) círculo com 102 partições do diâmetro.



### 2.2.2 Exemplificando Numericamente a Área do Círculo pelas Somas de Riemann

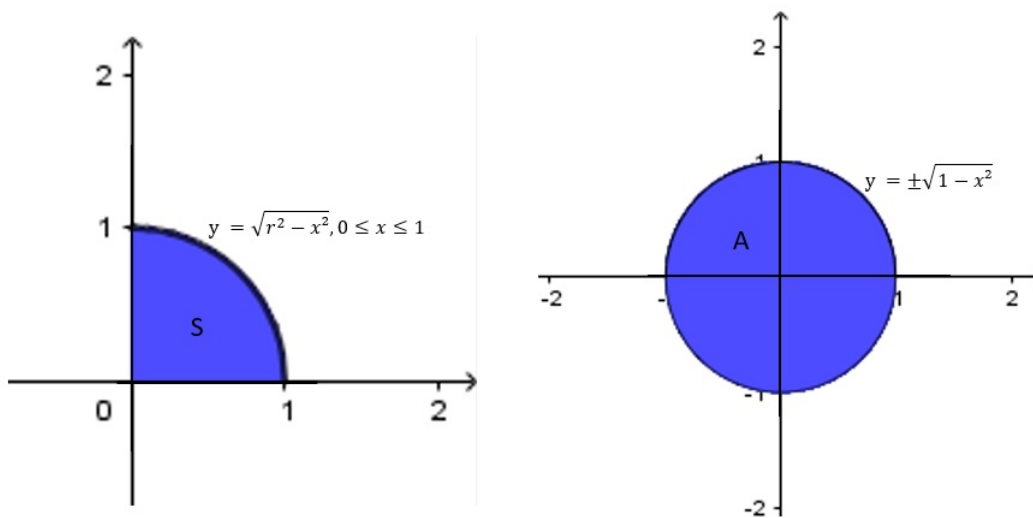
Pela definição das somas de Riemann e de acordo com as apresentações feitas até aqui, vamos ilustrar com um exemplo o procedimento e obter a área de um círculo de raio 1.

Em primeiro lugar vamos aproximar a região A do círculo utilizando retângulos. Depois observamos o limite para o qual tende a soma das áreas desses quadriláteros à medida que aumentamos o número de retângulos.

Faremos isso aplicando as somas de Riemann inferior e superior, ou seja, acumulando retângulos internamente e externamente ao círculo, e tomando a soma de suas áreas a fim de verificar que o limite desta soma tende ao valor da área do círculo.

Vamos estimar a área S sob a curva da função  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , no intervalo de 0 até 1, assumindo  $r = 1$ . Isso corresponde a um quarto da área de um círculo unitário centrado na origem do plano cartesiano. No entanto, ao final, interessados em aproximar da área A do círculo de raio unitário, este valor será quadruplicado.

**Figura 9 – Área sob a curva da função do círculo de raio unitário**

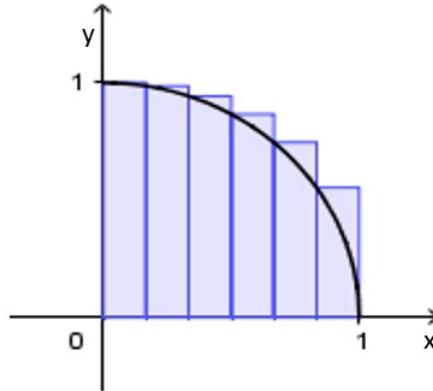


Observamos primeiramente que a área de S está certamente em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer uma estimativa melhor do que essa.

Vamos particionar o intervalo  $[0, 1]$ (raio), em seis subintervalos  $[0, \frac{1}{6}]$ ,  $[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ ,  $[\frac{2}{6}, \frac{3}{6}]$ ,  $[\frac{3}{6}, \frac{4}{6}]$ ,  $[\frac{4}{6}, \frac{5}{6}]$ ,  $[\frac{5}{6}, 1]$ . Tomemos retângulos com bases iguais à distância entre os extremos dos subintervalos e alturas iguais aos valores da função  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  nas extremidades esquerdas de cada subintervalo.



**Figura 10 – Soma de Riemann superior com seis partições do raio**



Cada um dos retângulos tem base  $\frac{1}{6}$  e as alturas são dadas por  $1$ ,  $\sqrt{1 - (\frac{1}{6})^2}$ ,  $\sqrt{1 - (\frac{2}{6})^2}$ ,  $\sqrt{1 - (\frac{3}{6})^2}$ ,  $\sqrt{1 - (\frac{4}{6})^2}$ ,  $\sqrt{1 - (\frac{5}{6})^2}$ . Chamaremos de  $R_6$  a área desses retângulos aproximantes, assim teremos

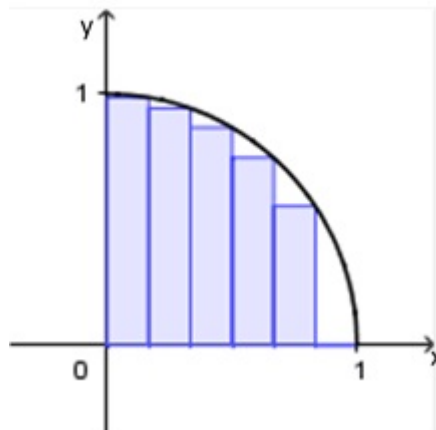
$$R_6 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - (\frac{1}{6})^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - (\frac{2}{6})^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - (\frac{3}{6})^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - (\frac{4}{6})^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - (\frac{5}{6})^2} \\ = 0,848829$$

Da figura 6 podemos ver que a área de  $S$  é menor que  $R_6$ , logo

$$A < 0,848829$$

Em vez de tomarmos as alturas dos retângulos como sendo os valores da função nas extremidades esquerdas, poderíamos tomar alturas cujos valores são dados pela função nos extremos direitos dos subintervalos. Desse modo, o retângulo mais à direita desaparece, pois, sua altura é zero.

**Figura 11 – Soma de Riemann Inferior com seis partições do raio**



A soma da área desses retângulos aproximada por falta é

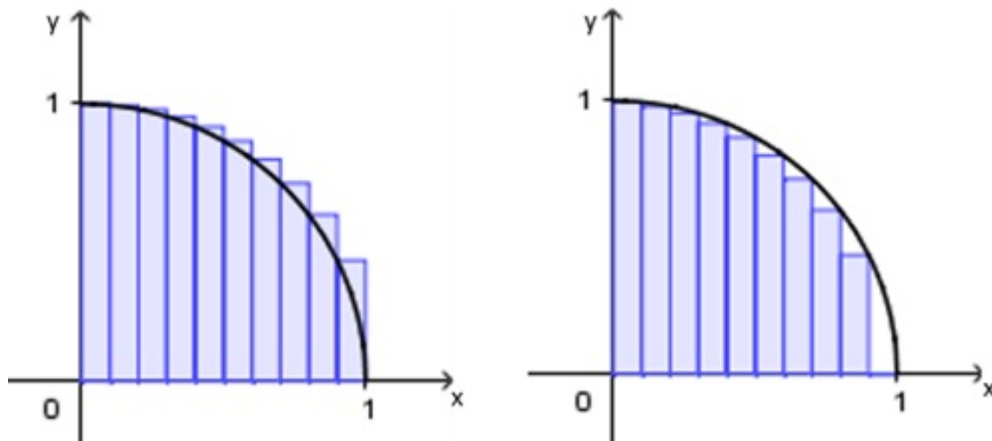
$$L_6 = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{6}\right)^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4}{6}\right)^2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 0,682225$$

Desse modo, vemos que a área de S é maior que  $L_6$ . Assim, temos estimativas inferiores e superiores para a área da região S.

$$0,682225 < S < 0,848829$$

Esse procedimento pode ser repetido para uma maior quantidade de retângulos. Faremos agora para o caso de termos 10 partições no intervalo  $[0, 1]$ .

**Figura 12 – Soma de Riemann Superior(a) e Inferior(b) com dez partições do raio**



(a) Usando as extremidades esquerdas

(b) Usando as extremidades direitas

Efetuando a soma das áreas dos retângulos menores ( $L_{10}$ ) e a soma dos retângulos maiores ( $R_{10}$ ), obtemos melhores estimativas inferiores e superiores para S.

$$0,726167 < S < 0,826129$$

Assim, dizer que a área de S está em algum lugar entre 0,726167 e 0,826129 seria uma resposta possível.

O aumento do número de partições do intervalo  $[0, 1]$ , o que implica o aumento do número de retângulos sobre a região, nos permite obter melhores estimativas.

Apresentamos na tabela seguinte o resultado de cálculos similares, com uso de um recurso computacional, usando  $n$  retângulos cujas alturas são os valores encontrados na função nas extremidades esquerdas ( $R_n$ ) ou nas extremidades direitas ( $L_n$ ). Veremos para alguns valores arbitrários de  $n$ .

**Tabela 1 – Estimativas para a área S em função de n**

<b>n</b>	<b>L<sub>n</sub></b>	<b>R<sub>n</sub></b>
10	0,72616749	0,82612958
20	0,75713520	0,80711621
30	0,76695680	0,80027745
50	0,77457476	0,79456712
100	0,78010753	0,79010420
500	0,78437274	0,78637180
1000	0,78488928	0,78588880
5000	0,78529744	0,78549728

Vimos no caso particular de usarmos 50 retângulos que a área S está entre 0,774571 e 0,794567. Com 1000 retângulos a desigualdade se estreita ainda mais, ficando entre 0,784889 e 0,785888. Com 5000 retângulos vimos que se encontra entre 0,785297 e 0,785497.

Podemos obter uma boa estimativa ao fazer a média aritmética desses números. Neste caso,  $M \approx 0,785397$ . Pelos valores da tabela, vimos que a área de S se aproxima de  $\frac{\pi}{4} = 0,785398$  ( $\frac{1}{4}$  da área do círculo de raio 1) à medida que aumentamos a quantidade n.

Dessa forma, a área da região A é dada por quatro vezes a área de S,

$$\text{Área de A} = 4S \approx 4 \cdot 0,785398 \approx 3,141592$$

Vimos pelo exemplo, que as somas de Riemann por falta ou por excesso, tendem a aproximar a área A do círculo cada vez mais de um limite, com uma estimativa de erro para mais ou para menos cada vez menor, de acordo com o crescimento do número de retângulos sobre a região.

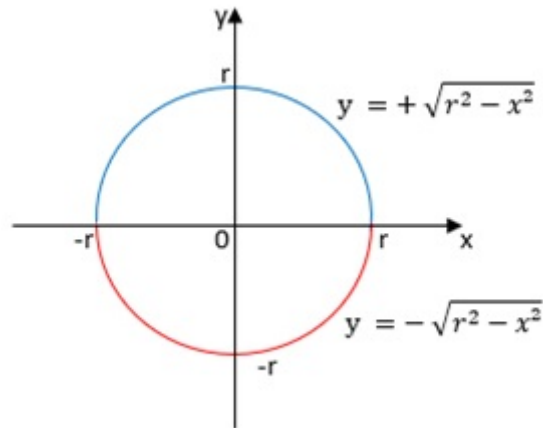
A partir das informações apresentadas na tabela, parece que à medida que aumentamos n, tanto  $L_n$  como  $R_n$  tornam-se aproximações cada vez melhores da área de S. Portanto, definimos a área de A como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes.

$$\text{Área A} = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

### 2.3 Cálculo da Área do Círculo Utilizando Integral

Partindo-se da equação de uma circunferência  $y^2 + x^2 = r^2$ , de raio  $r$  centrada na origem, obtemos duas funções  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ , que representam semicírculos no plano cartesiano como mostrado na figura

**Figura 13 – Curva das funções da circunferência**

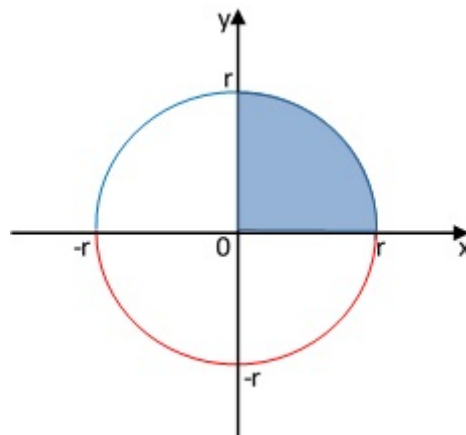


Com o propósito de chegarmos à área  $A$  do círculo a partir do cálculo integral, aplicando a integral definida, vamos considerar apenas a primeira função  $y = + \sqrt{r^2 - x^2}$  no intervalo de  $[0, r]$ .

Vejamus que isso é suficiente, tendo em vista que a área  $A$  do círculo é dada por quatro vezes a área da região sob a curva  $y = + \sqrt{r^2 - x^2}$  no quadrante I.

Poderíamos em vez de trabalharmos a integração no intervalo  $[0, r]$  optarmos por  $[-r, r]$ . Deste modo estaríamos determinando a área de um semicírculo, e consequentemente o resultado seria multiplicado por 2. Por simplicidade trabalharemos aqui no intervalo  $[0, r]$ .

**Figura 14 – Área de um quarto da circunferência**



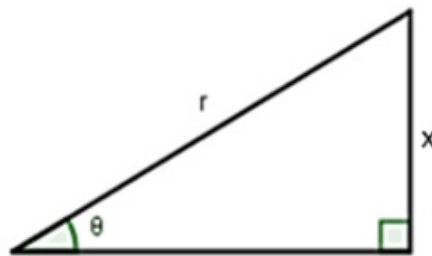
Desse modo, usando a definição de área, fazemos

$$\text{Área } A = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Para calcularmos a integral definida, vamos utilizar a técnica da substituição trigonométrica. Para melhor compreensão da substituição feita, vamos observar a figura seguinte onde temos um triângulo retângulo com hipotenusa medindo  $r$  e um dos catetos medindo  $x$ .

**Figura 15 – Triângulo retângulo**



Fazendo,

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{r}$$

$$x = r \text{ sen } \theta$$

Derivando a função em relação a variável  $\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = r \text{ cos } \theta$$

$$dx = r \text{ cos } \theta d\theta$$

Substituiremos  $x$  por  $r \text{ sen } \theta$  e  $dx$  por,  $r \text{ cos } \theta d\theta$ . Observe que a partir daqui, estamos mudando a variável de integração.

Em  $x = r \text{ sen } \theta$ , quando  $x = 0 \implies \theta = 0^\circ$  e quando  $x = r \implies \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ .

Temos,

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \text{ sen}^2 \theta} r \text{ cos } \theta d\theta$$

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \text{ sen}^2 \theta)} r \text{ cos } \theta d\theta$$

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{\cos^2 \theta} \, r \cos \theta \, d\theta$$

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta \, r \cos \theta \, d\theta$$

$$A = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta$$

Pela relação fundamental da trigonometria,

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \implies \quad \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

e,

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

chegamos na seguinte identidade,  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$  Substituindo, vem

$$A = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \, d\theta$$

$$A = \frac{4r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$A = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

Assim, determinando o valor da nossa integral definida, temos

$$A = 2r^2 \left[ \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$A = 2r^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} \pi}{2} \right] - \left[ 0 + \frac{\operatorname{sen} 0}{2} \right]$$

$$A = 2r^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{0}{2} \right] - [0]$$

$$A = \frac{2r^2 \pi}{2} - 0$$

$$A = \pi r^2$$

Portanto, Área  $A = \int_a^b f(x) \, dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \pi r^2$

Desse modo, chegamos a área do círculo aplicando a integral definida, como queríamos mostrar.

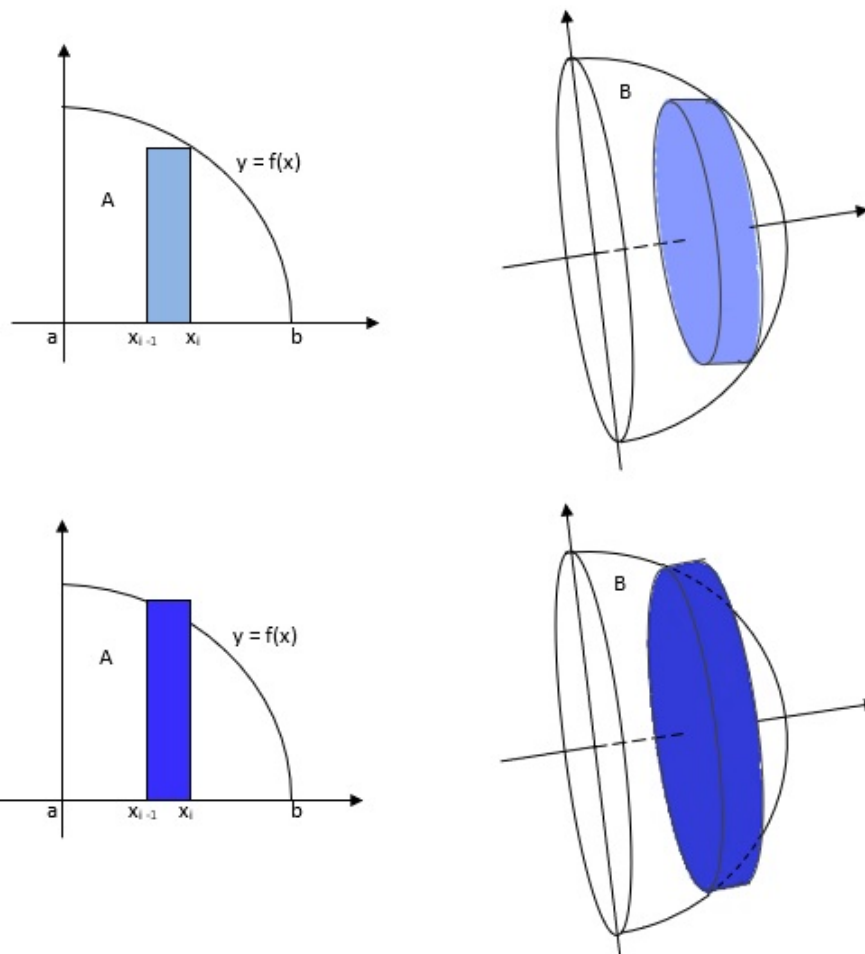
## 2.4 Cálculo do Volume por Aproximações

### 2.4.1 Aplicações da Integral no Cálculo de Volume

Começamos com o volume de um sólido gerado pela rotação, em torno do eixo  $x$ , de um conjunto  $A$ , tal que  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ .

Assim como Guidorizzi (2001), consideremos uma função  $f$  contínua no intervalo  $[a,b]$ , com  $f(x) \geq 0$ ; tomemos  $B$  como o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto  $A$  do plano limitado pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , pelo eixo  $x$  e pelo gráfico de  $y = f(x)$ . Queremos definir o volume  $V$  do sólido  $B$ .

**Figura 16 – Rotação em torno do eixo  $x$  de uma região plana**



Seja  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a,b]$  e  $c_i'$  e  $c_i''$  pontos de mínimo e de máximo, respectivamente, de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ . Na ilustração acima,  $c_i' = x_{i-1}$  e  $c_i'' = x_i$ .

Temos que:

$\pi [f(c_i')]^2 \Delta x_i$  é o volume do cilindro cujo raio da base é dado por  $f(c_i')$  e altura igual a  $\Delta x_i$  (cilindro “interno” ao sólido B) e,

$\pi [f(c_i'')]^2 \Delta x_i$  é o volume do cilindro cujo raio da base é dado por  $f(c_i'')$  e altura  $\Delta x_i$  (cilindro “externo” ao sólido B).

Para que o volume  $V$  esteja bem definido, é imprescindível supor que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^n \pi [f(c_i')]^2 \Delta x_i \leq \text{volume} \leq \sum_{i=1}^n \pi [f(c_i'')]^2 \Delta x_i$$

ocorra para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ .

Com a amplitude da partição cada vez mais próxima de zero, isto é,  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , as somas de Riemann que aparecem nas desigualdades convergem para  $\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$ . Pois, inferimos o limite da soma de Riemann como uma integral definida. Então, é natural que o volume  $V$  de  $B$  seja definido por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

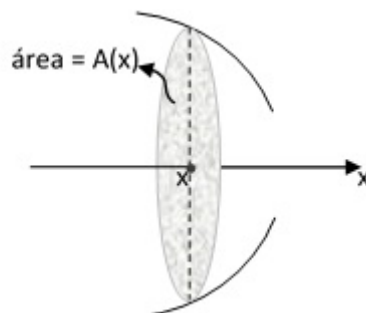
Ou

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx, \text{ onde } y = f(x)$$

### 2.4.2 Volume de um Sólido Qualquer

Vimos que  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$  é a fórmula que nos dá o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  em torno do eixo  $x$ . Assim temos:

**Figura 17 – Região da intersecção de um plano com o sólido**



Mas vejamos que  $\pi [f(x)]^2$  é a área da interseção do sólido com o plano que passa pelo ponto de abscissa  $x$ , sendo este plano posicionado perpendicularmente ao eixo



x.

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

Dessa forma, o volume referido pode ser colocado na forma

$$\text{Volume} = \int_a^b A(x) dx$$

E ainda, para um sólido B qualquer, não necessariamente de revolução, tomemos  $x$  um eixo escolhido de modo arbitrário. Suporemos que o sólido esteja compreendido entre dois planos posicionados perpendicularmente a  $x$  e que interceptam este eixo em  $x = a$  e  $x = b$ .

Consideremos  $A(x)$  a área da região de intersecção do sólido com o plano perpendicular a  $x$  no ponto de abscissa  $x$ . Supondo que a função  $A(x)$  seja integrável em  $[a,b]$ , fica definido que o volume do sólido é dado por

$$\text{Volume} = \int_a^b A(x) dx$$

Do mesmo modo, Stewart (2010) dá a definição do volume:

*Seja  $S$  um sólido que está entre  $x = a$  e  $x = b$ . Se a área da secção transversal de  $S$  no plano  $P_x$ , passando por  $x$  e perpendicular ao eixo  $x$ , é  $A(x)$ , onde  $A$  é uma função contínua, então o volume de  $S$  é*

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

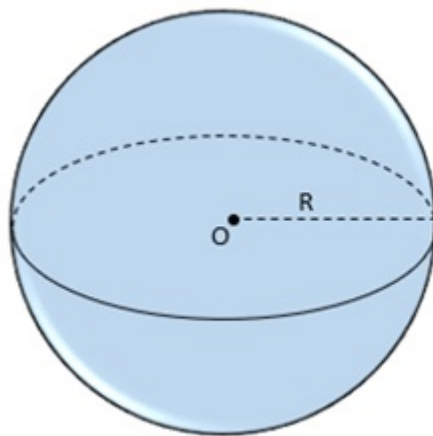
Veremos a aplicação da integral definida no cálculo de volume de sólidos. Neste trabalho faremos uso do processo das somas de Riemann para o cálculo aproximado do volume da esfera. Faremos a dedução da fórmula para o cálculo do volume da esfera por aproximação através da soma do volume de cilindros.

Os passos que seguiremos estão deduzidos no livro “Geometry: A High School Course”. Estes são os mesmos passos seguidos no cálculo das medidas a serem utilizadas para a construção virtual dos objetos 3D no software OpenSCAD, para em seguida serem impressos na impressora 3D. Também, mostraremos o uso da integral definida na obtenção da fórmula do volume da esfera.

### 2.4.3 Volume da Esfera Usando Aproximações por Cilindros: Uma Aplicação do Processo das Somas de Riemann

Seja  $O$  um dado ponto no espaço e seja  $R$  um número real maior que zero. Definimos a esfera do raio  $R$  e o centro  $O$  para ser o conjunto de todos os pontos no espaço cuja distância de  $O$  é menor do que ou igual a  $R$ . Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em  $O$  e comprimento igual a  $R$ . (LANG; MURROW, 2013, p.281, tradução nossa).

Figura 18 – Esfera



No decorrer deste estudo, iremos demonstrar o teorema a seguir, pelo método de aproximação por falta. Para tanto, vamos considerar uma esfera de raio  $R$ .

**Teorema 5.** *O volume de uma esfera de raio  $R$  é igual a  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .*

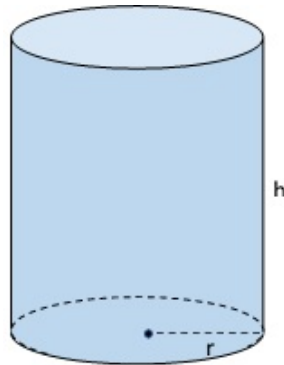
Nosso método é aproximar a esfera por regiões mais simples, cujo volume já seja conhecido. Para tanto, vejamos a definição de cilindro.

Segundo Stewart (2010, p.397) *um cilindro é limitado por uma região plana  $B_1$  denominada base, e uma região congruente  $B_2$  em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base, que unem  $B_1$  a  $B_2$ .*

Seja um cilindro com área da base igual a  $B$  e a altura  $h$  (distância de  $B_1$  a  $B_2$ ), então o volume  $V$  do cilindro é definido como

$$V = B \times h$$

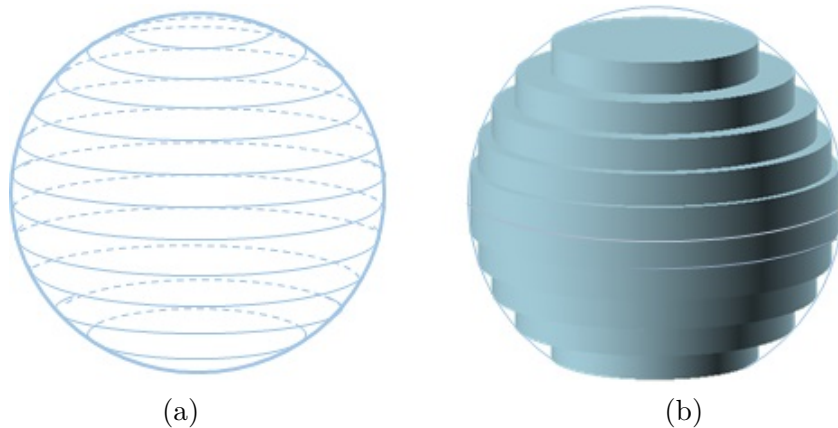
Utilizaremos em particular, cilindros retos cuja base é um círculo de raio  $r$  e altura  $h$ , denominado cilindro circular, e tem seu volume igual a  $\pi r^2 h$ .

**Figura 19 – Cilindro**

Vejamos os procedimentos adotados. Começamos por fatiar a esfera como na figura (a).

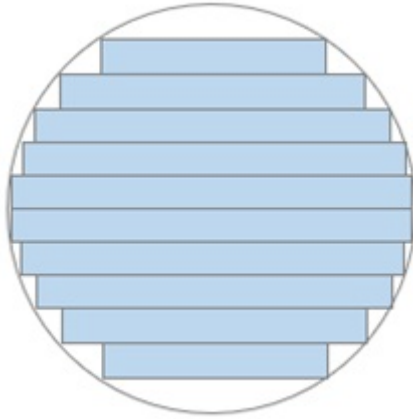
Em seguida, aproximamos essas fatias por cilindros de mesma altura. A Figura (b) é a imagem de perspectiva destes cilindros.

**Figura 20 – (a) Esfera fatiada em camadas paralelas e (b) a aproximação dessas camadas por cilindros de mesma altura**



Temos na figura seguinte uma seção transversal dos cilindros, na qual consideramos que o plano que intersecta a esfera passa pelo seu centro.

**Figura 21** – Círculo aproximado por retângulos: secção transversal da esfera aproximada

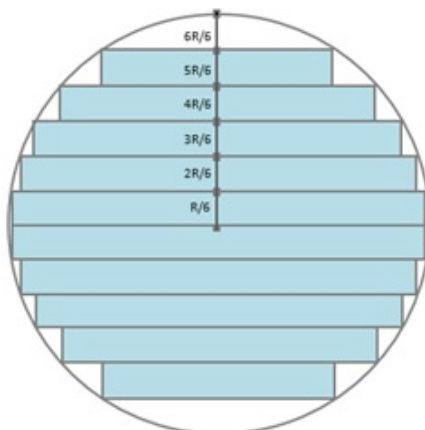


Na seção transversal, a altura de cada retângulo corresponde às alturas dos cilindros e as bases desses retângulos correspondem aos seus diâmetros.

Precisamos calcular os raios e as alturas dos cilindros. A partir desses valores, podemos determinar seus volumes, e somá-los. O resultado dessa soma se aproxima por falta do volume da esfera.

Para determinar estes elementos, observamos a figura a seguir para a qual usamos dez cilindros. Atenta-se para o fato de que é necessário observar apenas a semiesfera para estes cálculos, pois a mesma é uma figura simétrica

**Figura 22** – Círculo aproximado por retângulos de mesma altura



Observando o caso particular na figura acima, fazendo todos os cilindros de mesma altura, para a esfera de raio  $R$ , cada um tem altura igual a  $\frac{R}{6}$ .

A região delimitada pela base do cilindro de menor diâmetro e pela superfície esférica, também possui altura igual a  $\frac{R}{6}$ . Para um número arbitrário  $n$  de partições no

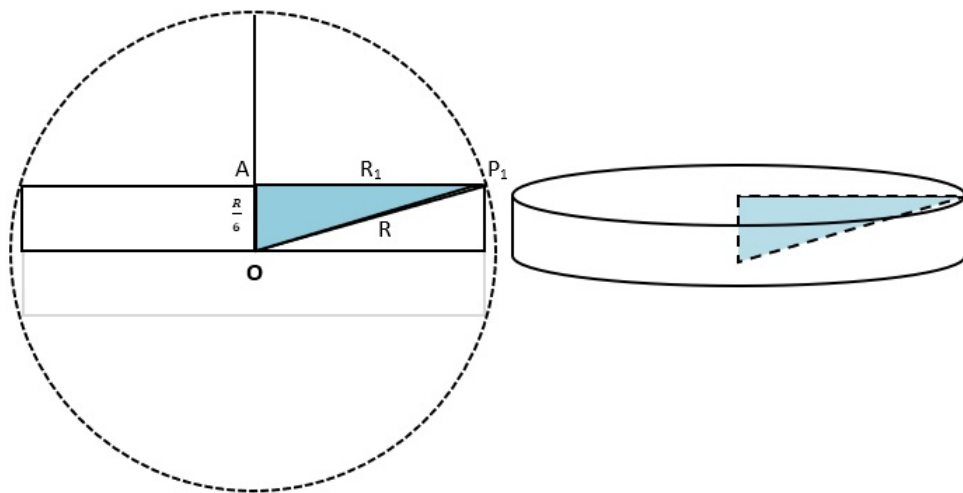
raio, as alturas  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ , de cada cilindro fica determinada por  $\frac{R}{n}$ , e teremos  $n - 1$  cilindros sobrepostos.

Calcularemos agora o raio de cada cilindro. Para isso, utilizaremos do teorema de Pitágoras.

Para melhor compreensão, faremos primeiramente para o caso de seis partições do raio. Dessa forma estamos observando a seção transversal da semiesfera.

Desenhamos o cilindro de maior raio ( $R_1$ ).

**Figura 23 – Seção meridiana do cilindro de maior raio**



De fato na figura temos um triângulo retângulo  $OAP_1$ , de catetos  $\frac{R}{6}$  e  $R_1$ , e a hipotenusa é o raio  $R$  da esfera. Aplicando o teorema de Pitágoras em  $OAP_1$ , temos:

$$OP_1 = R \quad AP_1 = R_1 \quad OA = \frac{R}{6}$$

$$(OP_1)^2 = (AP_1)^2 + (OA)^2$$

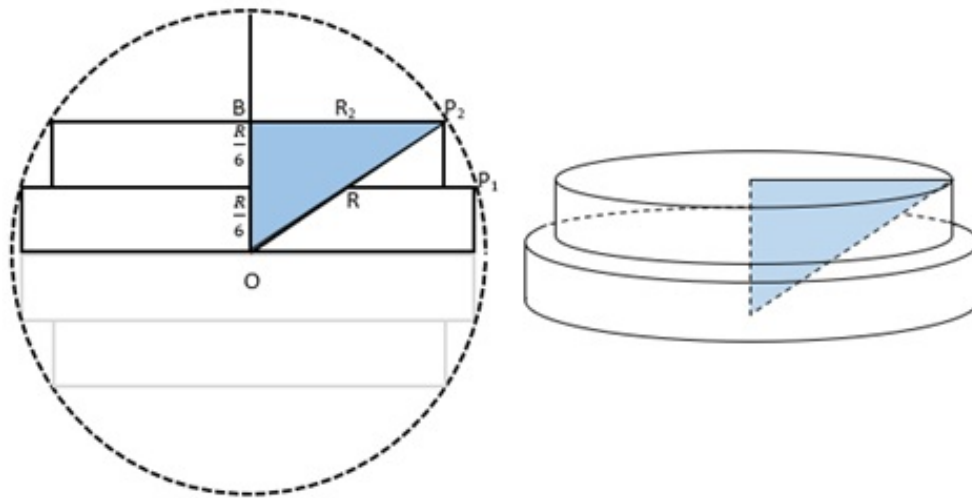
$$(R)^2 = (R_1)^2 + \left(\frac{R}{6}\right)^2$$

$$(R_1)^2 = (R)^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2$$

$$R_1 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2}$$

Seguiremos o mesmo passo para o segundo cilindro, o de raio ( $R_2$ ).

Figura 24 – Secção meridiana dos dois cilindros maiores



Temos um novo triângulo retângulo  $OBP_2$ , de catetos  $\frac{2R}{6}$  e  $R_2$ , e a hipotenusa é o raio  $R$  da esfera.

Aplicando o teorema de Pitágoras em  $OBP_2$ , temos:

$$OP_2 = R \quad BP_2 = R_2 \quad OB = \frac{2R}{6}$$

$$(OP_2)^2 = (BP_2)^2 + (OB)^2$$

$$(R)^2 = (R_2)^2 + \left(\frac{2R}{6}\right)^2$$

$$(R_2)^2 = (R)^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2$$

$$R_2 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2}$$

Continuamos da mesma maneira para o terceiro, quarto e quinto cilindro com raios respectivamente iguais a  $R_3$ ,  $R_4$ , e  $R_5$ . Devemos receber

$$R_3 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2}$$

$$R_4 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{4R}{6}\right)^2}$$

$$R_5 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{5R}{6}\right)^2}$$

$$R_6 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{6R}{6}\right)^2} = 0$$

Daí, os diâmetros dos cilindros são dados por duas vezes o valor de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  e  $R_6$ .

Uma vez conhecidos os elementos raio e altura do cilindro, podemos determinar o seu volume.

A expressão a seguir, nos mostra a soma do volume de todos estes cilindros. Soma do volume dos cilindros ( $V_c$ )

$$\begin{aligned}
 V_c &= \pi(R_1)^2 H_1 + \pi(R_2)^2 H_2 + \pi(R_3)^2 H_3 + \pi(R_4)^2 H_4 + \pi(R_5)^2 H_5 + \pi(R_6)^2 H_6 \\
 &= \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{6} + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{6} + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{6} + \\
 &+ \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{4R}{6}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{6} + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{5R}{6}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{6} + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{6R}{6}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{6} = \\
 &= \pi \left( (R)^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2 \right) \cdot \frac{R}{6} + \pi \left( (R)^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2 \right) \cdot \frac{R}{6} + \pi \left( (R)^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2 \right) \cdot \frac{R}{6} + \\
 &+ \pi \left( (R)^2 - \left(\frac{4R}{6}\right)^2 \right) \cdot \frac{R}{6} + \pi \left( (R)^2 - \left(\frac{5R}{6}\right)^2 \right) \cdot \frac{R}{6} + \pi \left( (R)^2 - \left(\frac{6R}{6}\right)^2 \right) \cdot \frac{R}{6}
 \end{aligned}$$

Observe que o último termo da expressão corresponde ao cateto de um triângulo degenerado, portanto, vale zero, mas foi inserido para melhor equilíbrio na estrutura dos cálculos.

Em vez de seis partições, poderíamos tomar sete, oito, nove, ou quantas quisermos.

Da mesma forma como feito acima, a representação poderia ser feita para  $n - 1$  cilindros, onde  $n$  é um número natural qualquer maior do que 1. Uma vez que a esfera tem raio  $R$ , a altura de cada cilindro tem medida  $\frac{R}{6}$ , onde  $n$  é um número arbitrário de quantidade das partições iguais de  $R$ , o que equivale a uma representação com  $n - 1$  cilindros na semiesfera.

Sendo assim, seus raios serão dados por

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2} \\
R_2 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2} \\
R_3 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{3R}{n}\right)^2} \\
&\vdots \\
R_{n-1} &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2} \text{ (enésimo retângulo)}
\end{aligned}$$

Temos o volume de um cilindro dado por  $V_i = \pi(R_i)^2 H_i$ , com  $i$  número inteiro tal que,  $1 \leq i \leq n$ .

Assim sendo, a soma dos volumes dos  $n$  cilindros, é representado por:

$$\begin{aligned}
S_c &= \sum_{i=1}^n V_i = \pi(R_1)^2 H_1 + \pi(R_2)^2 H_2 + \pi(R_3)^2 H_3 + \dots + \pi(R_n)^2 H_n = \\
&= \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} + \dots + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} + \\
&+ \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{nR}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} =
\end{aligned}$$

Quando o número de cilindros tomado é cada vez maior, a soma do volume destes cilindros se aproxima cada vez mais do volume da semiesfera. No entanto, ao final, o resultado obtido deve ser multiplicado por dois, para assim chegarmos ao volume da esfera de raio  $R$ .

Continuando com a expressão da soma do volume dos cilindros, podemos observar que  $\frac{\pi R}{n}$  é fator comum a todos os termos, portanto, o colocaremos em evidência.

A soma dos volumes dos  $n$  cilindros:

$$S_c = \sum_{i=1}^n V_i = \pi(R_1)^2 H_1 + \pi(R_2)^2 H_2 + \pi(R_3)^2 H_3 + \dots + \pi(R_n)^2 H_n =$$



$$\begin{aligned}
&= \left[ \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} + \dots + \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2} \right)^2 \frac{R}{n} + \right. \\
&+ \left. \pi \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{nR}{n}\right)^2} \right) \cdot \frac{R}{n} \right] \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2} \right)^2 + \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2} \right)^2 + \dots + \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. \left( \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{nR}{n}\right)^2} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ (R)^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2 + (R)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2 + \dots + (R)^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2 + (R)^2 - \left(\frac{nR}{n}\right)^2 \right] \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ nR^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2 - \dots - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2 - \left(\frac{nR}{n}\right)^2 \right] = \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ nR^2 - R^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 - R^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2 - \dots - R^2 \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 - R^2 \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ nR^2 - R^2 \left( \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) \right] = \\
&= \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \\
&= \pi R^3 - \pi R^3 \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right]
\end{aligned}$$

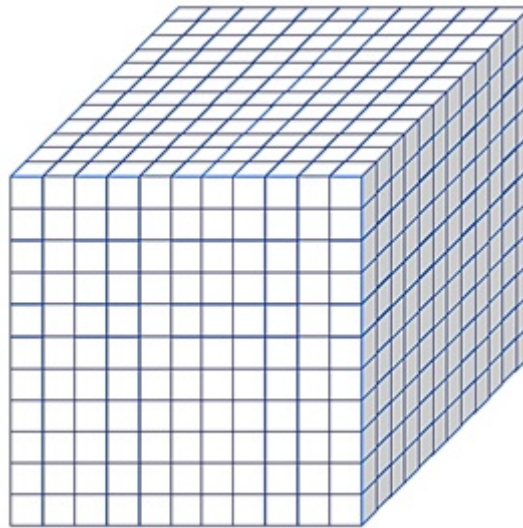
A partir daqui, para concluirmos, precisamos usar do fato de que a expressão  $(\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + (\frac{(n-1)}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + (\frac{n}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$ , tende a  $\frac{1}{3}$  quando  $n$  se torna grande, isso é o que revela o seguinte lema.

**Lema:** A soma  $(\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + (\frac{(n-1)}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + (\frac{n}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$  aproxima-se de  $\frac{1}{3}$  quando  $n$  se torna grande.

Vejamos a prova deste lema.

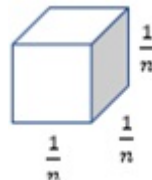
Começemos por desenhar um cubo unitário e dividir suas arestas em  $n$  partes, teremos assim pequenos cubos de arestas medindo  $\frac{1}{n}$ .

**Figura 25 – Cubo unitário com  $n$  divisões da aresta**



O primeiro termo na soma  $(\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$ , calculando resulta em  $(\frac{1}{n})^3$ , e isso equivale ao volume de um cubo de aresta medindo  $\frac{1}{n}$ .

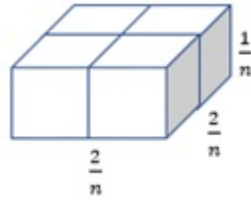
**Figura 26 – Cubo de aresta  $\frac{1}{n}$**



$$\text{Volume} = \left(\frac{1}{n}\right)^3$$

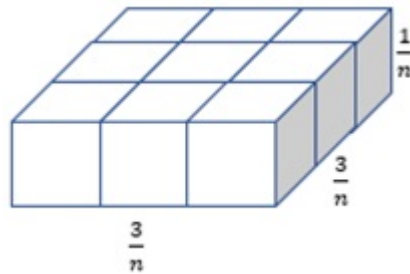
O segundo termo na soma é  $(\frac{2}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$ , calculando resulta em  $\frac{4}{n^3}$ , e isso é o volume de um bloco retangular de base quadrada de lado  $\frac{2}{n}$  altura  $\frac{1}{n}$ .

**Figura 27 – Bloco retangular. Representação do segundo termo**



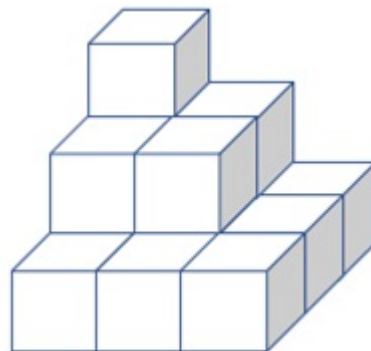
O terceiro termo é  $\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ , calculando resulta em  $\frac{9}{n^3}$ , que representa o volume de um bloco retangular de altura  $\frac{1}{n}$  e base quadrada de lado medindo  $\frac{3}{n}$ .

**Figura 28 – Bloco retangular. Representação do terceiro termo**



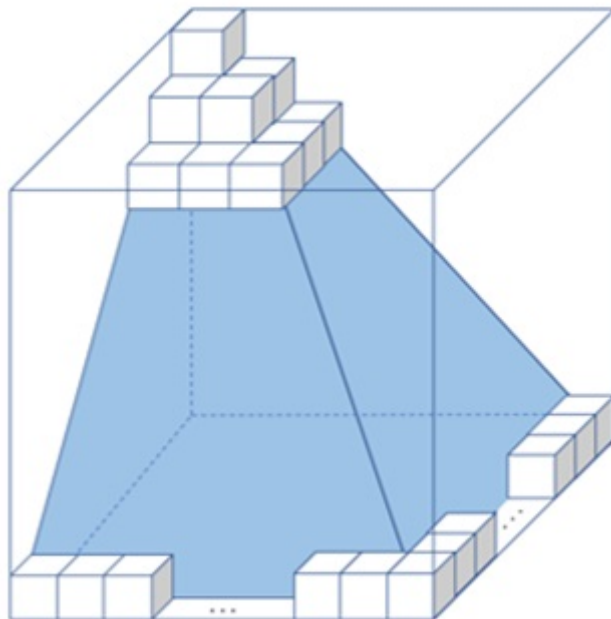
Desenhando num único bloco as 3 camadas acima, temos o seguinte sólido:

**Figura 29 – Bloco com sobreposição de três camadas**



Do mesmo modo, vamos até  $\frac{n}{n}$ .

**Figura 30 – Volume por aproximação**



A expressão dada no lema, pode ser ilustrada como uma escada tridimensional, como vimos na figura.

Quando tomamos  $n$  cada vez maior tanto quanto desejarmos, teremos assim que essa escada tridimensional se aproxima cada vez mais de uma pirâmide, de base quadrada coincidente com a base do cubo unitário e de mesma altura do cubo.

Esta pirâmide tem volume igual a um terço do volume do cubo. Como temos um cubo unitário, logo seu volume é 1, e conseqüentemente o volume desta pirâmide é  $\frac{1}{3}$ .

Assim, percebemos que a medida que  $n$  cresce arbitrariamente, a soma  $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$  aproxima-se de  $\frac{1}{3}$ .

Portanto, como desejado, concluímos a prova do lema e conseqüentemente a fórmula do cálculo do volume da esfera.

Esta demonstração do lema, foi feita tendo como base um cubo unitário. Este mesmo processo poderia ser generalizado tomando um cubo de aresta  $a$  dividido em cubinhos de aresta  $\frac{a}{n}$ .

Uma vez provado o lema, concluímos os cálculos mostrando o volume da semi-esfera:

$$\begin{aligned}
 &= \pi R^3 - \pi R^3 \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right] \\
 &= \pi R^3 - \pi R^3 \left[ \frac{1}{3} \right] \\
 &= \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}$$

O volume da esfera, dado pela aproximação da soma do volume dos cilindros, é dado por:

$$Volume_{esfera} = 2 \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Assim, chegamos ao que queríamos provar.

#### 2.4.4 Cálculo do Volume da Esfera pela Integral Definida

Utilizando-se agora do conceito de integral definida, mostraremos que o volume de uma esfera de raio  $R$  é  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

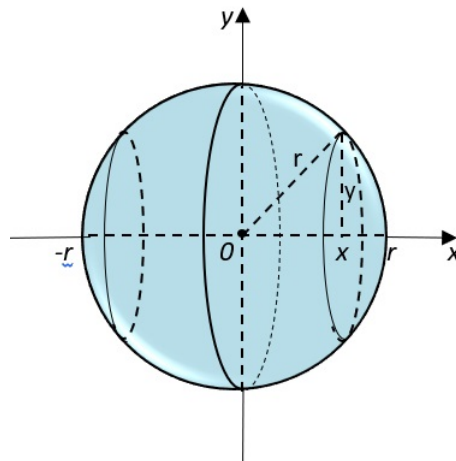
Vimos que o volume de um sólido é dado por

$$Volume = \int_a^b A(x) dx ,$$

onde  $A(x)$  é a área da interseção do sólido com o plano que passa pelo ponto de abscissa  $x$  e é perpendicular ao eixo  $x$ .

Tomemos uma esfera de forma que o seu centro esteja coincidente com a origem, como na figura 15. Um plano  $\alpha$  perpendicular ao eixo  $x$  intercepta-o no ponto de abscissa  $x$ . Este plano intercepta a esfera em um círculo de raio, que pelo teorema de Pitágoras, é dado por  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ .

**Figura 31 – Esfera com centro na origem dos eixos**



Dessa forma, a área dessa seção transversal é

$$A(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 = \pi (r^2 - x^2)$$

Aplicando a definição de volume, assumindo  $a = -r$  e  $b = r$ , temos:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_a^b A(x) dx \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \left[ xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \left[ xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \left[ rr^2 - \frac{r^3}{3} \right] - \pi \left[ -rr^2 - \frac{(-r)^3}{3} \right] \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \left[ r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - \pi \left[ -r^3 - \frac{(-r^3)}{3} \right] \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \left[ 2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right] \\ \text{Volume}_{\text{esfera}} &= \pi \left[ \frac{4r^3}{3} \right] = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

Assim, chegamos ao volume da esfera como desejado.

### 3 CAPÍTULO III - FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS APLICADAS NO PROCESSO

Motivado pelo conceito das somas de Riemann, e conhecedor da importância de mecanismos para o estudo de elementos da Geometria como área e volume, surgiu a proposta de criar um material didático com uso da impressora 3D para ser explorado em sala de sala do Ensino Básico e Superior, na abordagem desses conteúdos e outros mais, conforme a criatividade do professor da disciplina de Matemática e até mesmo de outras áreas do conhecimento.

Veremos na sequência as etapas do processo de confecção dos artefatos. A princípio, falaremos da impressora 3D utilizada, bem como da técnica de impressão por ela aplicada. Apresentaremos também os Softwares usados para modelagem 3D e fatiamento, que foram empregados na construção virtual e na preparação para impressão 3D dos objetos. Desse modo, vamos descrever o processo da construção à exportação e impressão dos instrumentos didáticos.

#### 3.1 A Impressora e a Técnica de Impressão

Após a escolha dos conteúdos e conceitos a que se pretendia representar fazendo uso das ferramentas tecnológicas de impressão 3D, o próximo passo foi atentar à escolha de quais ferramentas seriam utilizadas nesse processo. Esta escolha se destina a definir a técnica de impressão 3D a ser aplicada e o *software* a ser utilizado para a modelagem virtual dos objetos a serem impressos. No entanto, neste trabalho não foi feito previamente um estudo sobre a técnica de impressão 3D que seria utilizada. Tal estudo foi dispensado considerando que seria utilizada a impressora adquirida pela instituição UFVJM - *campus* Teófilo Otoni - e disponibilizada para uso neste trabalho.

Trata-se de um modelo de fabricação nacional, a Core H4 da GTMax3D<sup>7</sup>. Sobre esta impressora, a fabricante destaca como características importantes, dentre outras:

1. Auto nivelamento da mesa de impressão (não é necessário ajustes manuais para se nivelar a mesa de impressão.)
2. Gabinete totalmente fechado, facilitando a impressão com materiais que sofrem contração como o ABS, Tritan, Nylon, ABS-PC dentre outros;
3. Impressão por sistema Bowden, deixando a cabeça de impressão muito mais leve, fazendo a impressão ter uma qualidade superior e também aumento considerável de velocidade;
4. Detecção de falta de filamento (a impressora pausa a impressão e aguarda a colocação do filamento para não perder a impressão).
5. Troca automatizada do filamento (o processo de troca é feito de forma fácil e automatizada).
6. Display LCD com entrada para cartão SD, não sendo necessário a conexão de um PC para se efetuar a impressão;
7. Conexão com computador por porta USB;

---

<sup>7</sup>Disponível em: <https://www.gtmax3d.com.br/>. Acesso em maio de 2018.

8. Atualização do Firmware (software interno da impressora) por Cartão SD.
9. Backup da calibração da impressora no Cartão SD (caso o usuário altere algum setup fica fácil recuperar a configuração original);
10. Mesa de impressão em Alumínio com aquecimento 110/220v, com baixo tempo de aquecimento (de 2 a 7 minutos @ 110°C) ;
11. Porta frontal e fechamento superior em acrílico CAST para fácil visualização da área de impressão;
12. Impressão com mesa fixa no eixo X e Y, a mesa se movimenta somente no eixo Z, beneficiando a qualidade e velocidade de impressão;
13. Extrusor e suporte de filamento externo, facilitando a troca e limpeza do sistema;
14. Hotend (cabeça de impressão) Allmetal GTMax3D Volcano filamento 1.75mm e bico de 0.4mm - alta produtividade e eficiência. Temperatura até 295°C (trabalha com praticamente qualquer material sem se preocupar com a temperatura);
15. Alta Velocidade de impressão até 180mm/s;
16. Alta Velocidade de deslocamento até 400mm/s;
17. Camadas (layer) com altura de 0.05mm à 0.32mm;

Este equipamento trabalha com a técnica de impressão 3D pelo método de modelagem por fusão e deposição (FusedDepositionModelin - FDM). De acordo com Huleihil (2017), este método é o mais popular.

Desenvolvido por Scott Crump, fundador Stratasys, com sua patente registrada em 1989, a FDM é uma tecnologia de fabricação amplamente utilizada para prototipagem rápida para fabricar um modelo 3D extrudando (estendendo) materiais termoplásticos e depositando os materiais semifundidos em um estágio, camada por camada, de baixo para cima. A tecnologia FDM vem conquistando espaço no mercado de impressão 3D por ser mais simples e acessível financeiramente.

A impressora alvo, a Core H4, possui alta compatibilidade de filamentos, imprime ABS, PLA, TRITAN, PETG, PVA, etc. Para a confecção dos artefatos projetados, utilizamos o filamento plástico ABS, um dos materiais mais comuns no mercado, e de menor custo.



**Figura 32 – Impressora 3D, GTMax3D Core H4**



**Fonte:** GTMaX3D

### **3.2 O Software de Modelagem 3D e a Preparação para Impressão**

O segundo requisito foi a escolha do software de modelagem 3D. Segundo Silva, Siple e Figueiredo (2016), atualmente existem números expressivos de softwares, inclusive gratuitos, que possibilitam a modelagem dos artefatos para posterior impressão em 3D, tais como: OpenScad, AutoCad, SolidWorks, Blender , etc.

Neste trabalho, optou-se pela modelagem virtual dos objetos no software OpenSCAD<sup>8</sup>. Esse é um software livre e gratuito, confiável para criar objetos sólidos de CAD (desenho assistido por computador) para impressão 3D. Com uso de variáveis paramétricas que manipulam automaticamente a parte inteira para permitir modificações simples sem a necessidade de conhecimento na modelagem em 3D.

“O OpenSCAD é usado por código de escrita para descrever as especificações geométricas do objeto requerido usando formas primitivas (por exemplo, esferas, cubos, cilindros), polígonos complexos e comandos de extrusão 2D / 3D.” (Schelly et al., 2015, p.230, tradução nossa). Ou seja, o OpenSCAD funciona como um “compilador 3D”, lendo um arquivo script escrito em linguagem de programação, e depois renderizando um modelo 3D a partir desse script. Dessa forma, o programa faz geometria sólida construtiva (CSG).

Ainda de acordo com Schelly et al. (2015), uma vantagem é que o OpenSCAD permite projetos paramétricos, que é a capacidade de alterar um projeto para especificações, alterando os parâmetros da geometria de um objeto (por exemplo, as formas são

---

<sup>8</sup>OpenSCAD: software para a criação de modelos sólidos CAD 3D. <http://www.openscad.org/>

escritas com variáveis que outros podem mudar). Assim, mudanças poderão ser feitas ao design, de forma fácil e rápida, ao modificar o valor das variáveis definidas pelo usuário, isto é, uma vez que uma pessoa a esboça, todos podem personalizar rapidamente o design por si mesmos.

Terminado a modelagem 3D, esse aplicativo permite que os modelos dos objetos sejam exportados para o formato .stl para facilitar a impressão 3D. Esse formato é padrão das impressoras 3D.

O OpenSCAD está disponível para ser baixado ([www.openscad.org](http://www.openscad.org)) para Windows, Linux, Mac OS X. Disponível em sete idiomas, o programa ainda não tem uma versão em português, mas é possível acessar um bom manual do usuário disponível em [www.openscad.org/documentation.html](http://www.openscad.org/documentation.html).

As funções básicas do OpenSCAD podem ser aprendidas num tempo curto, embora disponha de funções complexas para as quais demanda uma curva de aprendizado mais acentuada. Apesar da relativa facilidade de uso, esse é um poderoso programa de modelagem de sólidos que oferece uma gama de possibilidades.

Vale ressaltar que para a modelagem dos artefatos propostos nesse trabalho, e para muitos outros que podem ser construídos, o domínio das principais ferramentas são suficientes.

Após gerar os arquivos no formato STL<sup>9</sup>, estes devem ser preparados para a impressão por um processo conhecido como fatiamento, feito num programa para esta finalidade, o qual cria arquivos com as instruções para a impressora 3D gerá-los na forma física. Para fatiar o arquivo STL, foi utilizado o *software Cura*, que é uma opção de ferramenta gratuita.

O arquivo em STL é convertido em um arquivo .gcode. software fatiador que prepara o modelo 3D para impressão em camadas. De acordo com Sa B. C. ; Maruyama (2016, p.4) “O *Cura* é um software que permite a configuração de parâmetros da impressora. Com ele é possível escolher, por exemplo, a extrusora que será utilizada para imprimir o objeto, a temperatura da mesa e o local onde o objeto será impresso.”

Para efetivar a impressão dos artefatos, após terminado o fatiamento, com o arquivo no formato .gcode, onde constam as instruções para a impressora 3D, os arquivos devem ser importados para um cartão SD, que será conectado à impressora alvo e então a iniciação da impressão.

Antes de a impressora iniciar a deposição do filamento fundido, é necessária uma preparação da mesa que irá receber este material. Esse é um procedimento simples, mas importante, pois a mesa é preparada para aderir o sólido. Essa preparação consiste em um adesivo líquido incolor que tem por finalidade manter o objeto fixo na mesa de

---

<sup>9</sup>STL (Standard Triangle Language, ou padrão de linguagem triangular). Software que leva as informações para gerar o produto final. Este formato contém apenas a geometria do objeto desejado, sem cores, texturas e outros artefatos desnecessários, facilitando no processo de impressão.

impressão quando aquecida no momento da construção, permitindo uma descolagem fácil após o resfriamento, evitando assim, que sejam causados danos na peça projetada e/ou no vidro suporte da mesa.

A aplicação da solução se faz no vidro limpo e frio, com apenas algumas gotas espalhadas com um pano multiuso, o suficiente para criar um filme (película) úmido sobre a mesa. Este líquido não deixa resíduos na mesa ou na peça produzida.

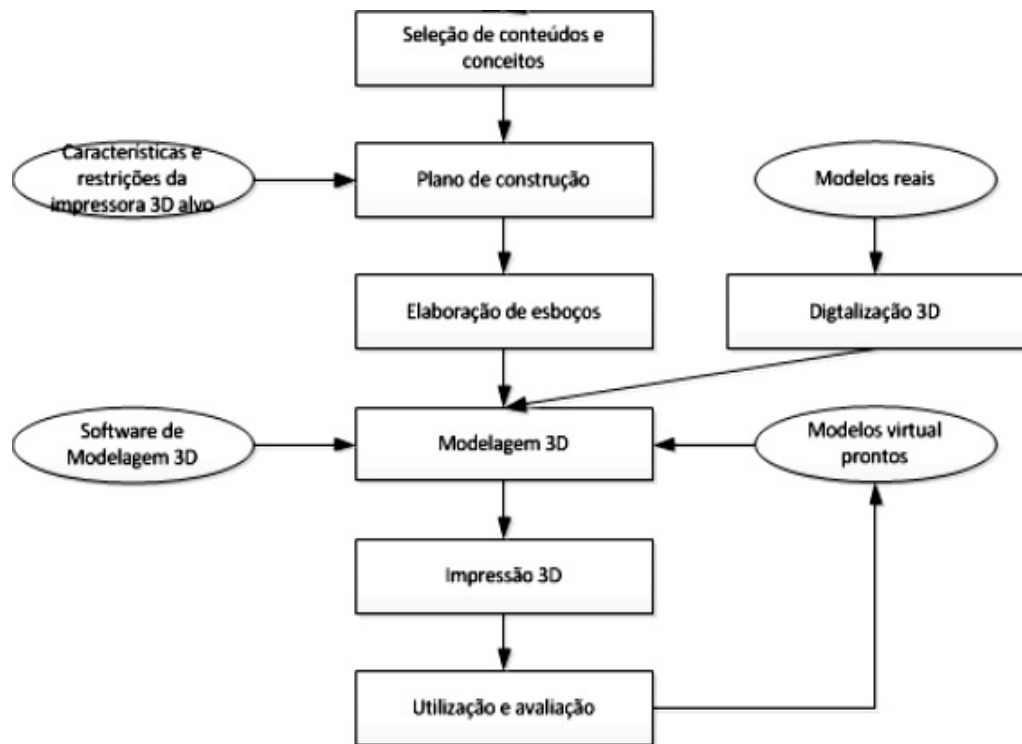


#### 4 CAPÍTULO IV - ETAPAS DO PROCESSO

Para Segerman (2012), Aguiar (2016) Aguiar e Yonezawa (2014) e Gorni (2001), a sucessão de trabalho da impressão 3D se dá, basicamente, com a seleção dos conceitos e conteúdos, passando pelo modelo de computador (modelagem 3D) até chegar ao objeto físico impresso.

Embora Gorni (2001) considera como sendo o passo inicial a criação do modelo CAD da peça que está sendo projetada, é imprescindível que a seleção dos conceitos o anteceda. Na construção de um modelo, os passos do processo de utilização da tecnologia de impressão 3D no ensino, são apresentados por Aguiar (2016) de modo mais detalhado, como mostrado na figura 14. Nela os retângulos representam etapas ou atividades do processo e as elipses, as informações necessárias.

**Figura 33 – Processo de utilização da tecnologia de impressão 3D no ensino**



**Fonte:** (AGUIAR; YONEZAWA, 2014, p.5)

A descrição dos passos seguidos na confecção dos instrumentos apresentados nesse trabalho, seguem basicamente os mesmos passos observados por Aguiar (2016 e 2014), que em sua pesquisa também mostra a reprodução de instrumentos didáticos com o uso da impressora 3D para o ensino de ciências.

O passo inicial *seleção de conteúdos e conceitos*, se deu com o objetivo de explorar o conceito das somas de Riemann e sua aplicação para trabalhar área e volume de sólidos por aproximações. Desejamos que os instrumentos idealizados sejam úteis na

abordagem desses conceitos, facilitando a compreensão dos estudantes através do contato tátil e visual, como no estudo da área do círculo e do volume da esfera por aproximações por falta.

Sobre esta primeira etapa, Aguiar e Yonezawa (2014) enfatizam que:

a construção de um instrumento didático se inicia pela identificação do que se deseja alcançar com a utilização dele: demonstrar e facilitar a compreensão de algum conceito; causar um conflito nas concepções dos estudantes devido a um comportamento inesperado; gerar curiosidade nos estudantes; etc. (AGUIAR; YONEZAWA, 2014, p.4).

Um dos materiais confeccionados, objetiva demonstrar a área do círculo por aproximações através da soma das áreas de retângulos. Assim, foram construídas barras no formato de blocos retangulares de base quadrada, de forma a preencherem a região do plano limitada por um círculo de diâmetro dezesseis centímetros, de modo que formassem uma malha quadriculada em 3D.

Foram construídos três objetos circulares cujos diâmetros são divididos em oito, dezesseis e trinta e duas partições, determinando diferentes amplitudes.

**Figura 34 – Círculo aproximado por retângulos**

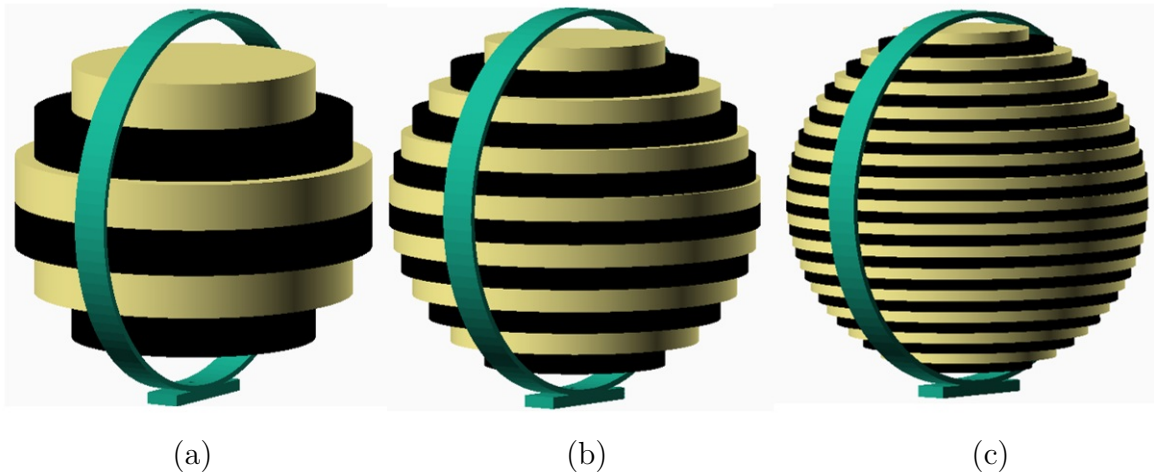


Outro material idealizado é a esfera aproximada por cilindros. Assim como no círculo, o diâmetro da esfera foi particionado em partes iguais com oito, dezesseis, e sessenta e quatro partições, de modo a termos os cilindros todos de mesma altura.

Em ambos os casos, a ideia central utilizada é o conceito das somas de Riemann, que consiste basicamente em acumular retângulos em uma região e somar suas áreas (neste caso a área do círculo) e, de modo análogo, o volume da esfera corresponde à soma do volume dos cilindros acumulados.

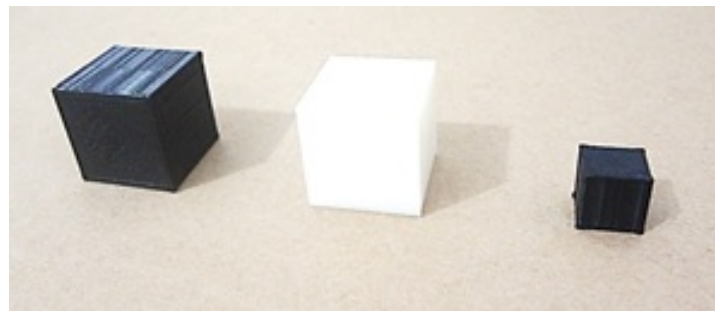
Para enriquecer as discussões e provocar uma melhor associação entre os diferentes elementos de estudo na apresentação desses materiais, também, serão confeccionados cubos de arestas com medidas iguais a um e dois centímetros.

**Figura 35 – Esferas aproximadas por cilindros:** (a) seis cilindros (diâmetro particionado em oito partes iguais); (b) quatorze (diâmetro particionado em dezesseis partes iguais); (c) trinta cilindros (diâmetro particionado em oito partes iguais)



Estas medidas são iguais à amplitude das partições adotadas para dois dos sólidos construídos (nesse caso, os objetos de oito e dezesseis partições do diâmetro). No caso do cubo de aresta igual 5mm (trinta e duas partições) a confecção seria inviável pelo difícil manuseio em sala de aula considerando que as dimensões são muito pequenas, portanto julgamos desnecessário.

**Figura 36 – Cubos**



O próximo passo contempla a discriminação de um plano de construção. Nessa etapa são observadas as características materiais do objeto, sua geometria e são elaborados os cálculos das medidas de modo que o modelo de computador seja fiel ao conceito matemático.

É importante que nesta etapa se atente ao limite do volume de impressão da impressora 3D, sob pena de ter que refazer todos os cálculos caso sejam usadas dimensões superiores àquelas da mesa de impressão da impressora que esteja sendo utilizada. Estas medidas podem ser diferentes nas três dimensões (X, Y e Z).

A mesa de impressão da impressora Core H4 que utilizamos, possibilita a construção de sólidos com volume máximo de 0,027 m<sup>3</sup> com dimensões máximas de 200 x 300 x 450, dadas em milímetros. Ao observar previamente estas limitações, foi possível

estabelecer a dimensão máxima do diâmetro dos círculos.

Uma das etapas do planejamento, contempla os cálculos matemáticos que serão relatados a seguir. Estes se resumem ao teorema de Pitágoras, aplicado com a finalidade de encontrar as medidas reais do comprimento de cada um dos blocos que viriam sobrepor a região aproximada da área do círculo. Do mesmo modo, o teorema foi aplicado no cálculo da medida do raio dos cilindros aproximantes da esfera. A seguir, mostraremos com mais detalhes o processo realizado para a determinação dessas medidas.

#### 4.1 Calculando o Comprimento dos Retângulos Aproximantes do Círculo

As medidas foram calculadas visando a impressão de um círculo de 16 cm de diâmetro. É importante observar que os valores a serem inseridos em linguagem de script no software OpenSCAD , devem ser convertidos em milímetros.

Para um encaixe “perfeito” dos retângulos no contorno circular, precisamos calcular com uma boa aproximação, o comprimento de cada uma das barras. A medida da largura de cada retângulo é independente, sendo determinada pela divisão da medida do diâmetro pela quantidade de retângulos aproximantes que se queira utilizar.

No nosso exemplo impresso em 3D, as barras foram confeccionadas com larguras de 2 cm (oito partições do diâmetro), 1 cm (dezesseis partições do diâmetro), e 0,25 cm (sessenta e quatro partições do diâmetro).

Para melhor compreensão, vamos encontrar a altura de cada retângulo. Vejamos o caso de aproximarmos a área do círculo com dez retângulos (doze partições do diâmetro). O mesmo cálculo procede para qualquer número de partições do diâmetro.

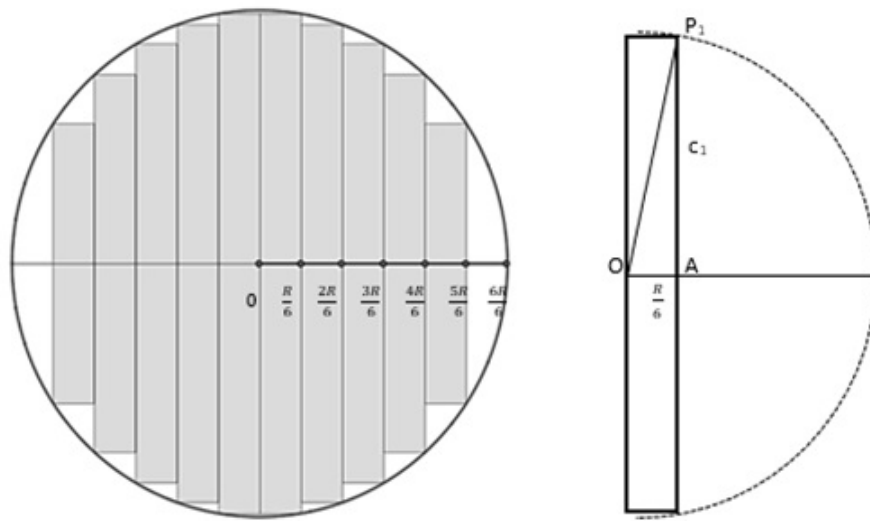
Vamos observar um semicírculo. Para a outra metade teremos os mesmos valores, uma vez que assumimos todos os retângulos de mesma largura.

Os cálculos na sequência estão descritos genericamente. Usaremos o teorema de Pitágoras para determinar a metade da medida da altura de cada retângulo.

Começamos desenhando o retângulo de maior altura ( $2c_1$ ), (figura H).



**Figura 37 – Círculo aproximado por retângulos e representação do retângulo de maior altura**



De fato, na figura temos um triângulo retângulo  $OAP_1$ , de catetos  $\frac{R}{6}$  e  $c_1$ , e a hipotenusa é o raio  $R$  do círculo.

Aplicando o teorema de Pitágoras em  $OAP_1$ , temos:

$$OP_1 = R \quad AP_1 = c_1 \quad OA = \frac{R}{6}$$

$$(OP_1)^2 = (AP_1)^2 + (OA)^2$$

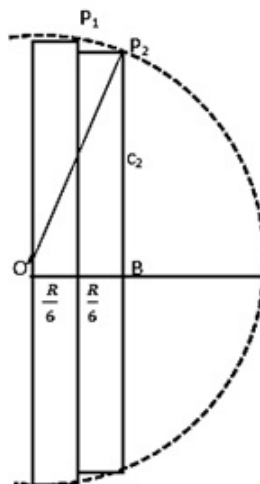
$$(R)^2 = (c_1)^2 + \left(\frac{R}{6}\right)^2$$

$$(c_1)^2 = (R)^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2$$

$$c_1 = \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2}$$

Seguiremos os mesmos passos para o segundo retângulo:

**Figura 38 – Representação do segundo retângulo**



Temos um novo triângulo retângulo  $OBP_2$ , de catetos  $\frac{2R}{6}$  e  $c_2$ , e a hipotenusa é o raio  $R$  do círculo.

Aplicando o teorema de Pitágoras em  $OBP_2$ , temos:

$$\begin{aligned} OP_2 &= R \quad BP_2 = c_2 \quad OB = \frac{2R}{6} \\ (OP_2)^2 &= (BP_2)^2 + (OB)^2 \\ (R)^2 &= (c_2)^2 + \left(\frac{2R}{6}\right)^2 \\ (c_2)^2 &= (R)^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2 \\ c_2 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2} \end{aligned}$$

Continuamos da mesma maneira para o terceiro, quarto e quinto retângulo. Devemos receber:

$$\begin{aligned} c_3 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2} \\ c_4 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{4R}{6}\right)^2} \\ c_5 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{5R}{6}\right)^2} \end{aligned}$$

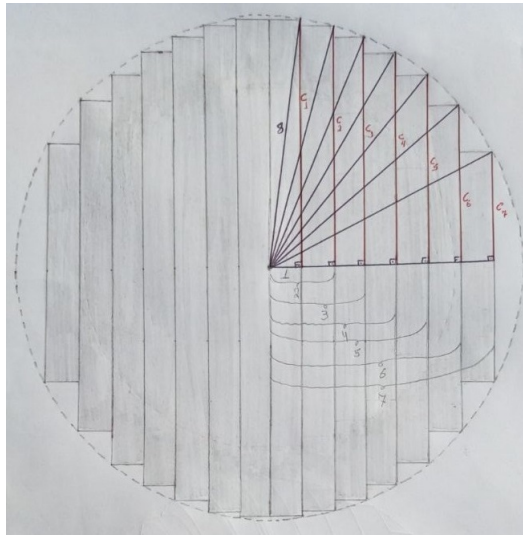
Então, as alturas dos retângulos são dadas por duas vezes o valor de  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  e  $c_5$ .

Fazemos todos os retângulos de mesma largura. É possível ver na figura 18 que dividindo o raio  $R$  em seis partes iguais, a largura de cada um dos 5 retângulos será  $\frac{R}{6}$ . Assim, a região delimitada à esquerda pela altura do último retângulo e do lado direito pelo círculo também tem largura  $\frac{R}{6}$ . Em vez de seis partições, poderíamos tomar sete, oito, ou quantas quisermos.

Da mesma forma como feito acima, a representação poderia ser feita para  $n - 1$  retângulos, onde  $n$  é um número natural qualquer maior do que 1. Uma vez que o círculo tem raio  $R$ , a base de cada retângulo tem medida  $\frac{R}{n}$ , onde  $n$  é um número arbitrário que representa a quantidade de partições iguais de  $R$ , o que equivale a uma representação com  $n - 1$  retângulos. Sendo assim, a metade de suas alturas será dada por:

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2} \text{ (1º retângulo)} \\ c_2 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2} \text{ (2º retângulo)} \\ c_3 &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{3R}{n}\right)^2} \text{ (3º retângulo)} \\ &\quad \vdots \\ c_{n-1} &= \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2} \text{ (n-ésimo retângulo)} \end{aligned}$$

**Figura 39 – Esboço para o cálculo da medida do comprimento dos retângulos aproximantes**



Na figura a seguir, temos o esboço feito como auxílio para os cálculos feitos numericamente, quando o raio foi dividido em 8 partições.

Na situação representada, com a aplicação do teorema de pitágoras, obtemos:

$$r^2 = 1^2 + c_1^2 \Rightarrow 64 = 1 + c_1^2 \Rightarrow c_1^2 = 63 \Rightarrow c_1 = \sqrt{63} \approx 7,937253$$

$$r^2 = 2^2 + c_2^2 \Rightarrow 64 = 4 + c_2^2 \Rightarrow c_2^2 = 60 \Rightarrow c_2 = \sqrt{60} \approx 7,745966$$

$$r^2 = 3^2 + c_3^2 \Rightarrow 64 = 9 + c_3^2 \Rightarrow c_3^2 = 55 \Rightarrow c_3 = \sqrt{55} \approx 7,416198$$

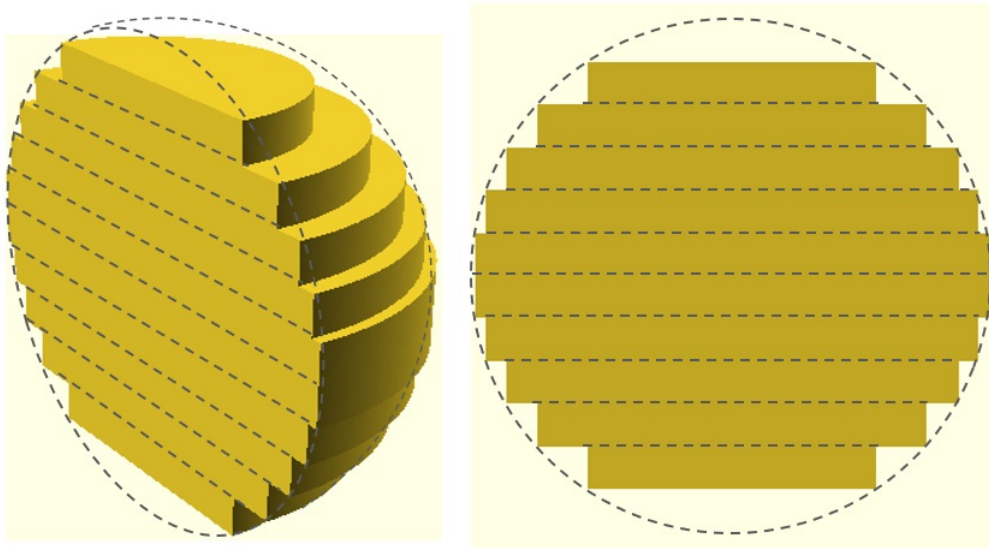
...

$$r^2 = 7^2 + c_7^2 \Rightarrow 64 = 49 + c_7^2 \Rightarrow c_7^2 = 15 \Rightarrow c_7 = \sqrt{15} \approx 3,872983$$

Observe que  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_7$ , correspondem à metade do comprimento dos retângulos. De modo que o maior deles ( $2c_1$ ) possui um comprimento de aproximadamente 15,8745 cm e o menor deles ( $2c_7$ ), de aproximadamente 7,7460 cm.

Estes mesmos cálculos são desenvolvidos para determinar os raios das bases dos cilindros aproximantes da esfera. Basta observar que o círculo aproximado por retângulos (figura 19 (b)) corresponde à secção transversal de uma esfera aproximada por cilindros (figura 19 (a)) em mesma quantidade do número de retângulos aproximantes no círculo.

Para o estudo de uma aproximação do volume da esfera, foram confeccionados três sólidos. Uma esfera aproximada por 6 cilindros (oito partições do diâmetro), outra aproximada por quatorze cilindros (dezesseis partições do diâmetro) e uma terceira com sessenta e dois cilindros (sessenta e quatro partições do diâmetro).

**Figura 40 – Semiesfera aproximada por cilindros e sua respectiva secção transversal**

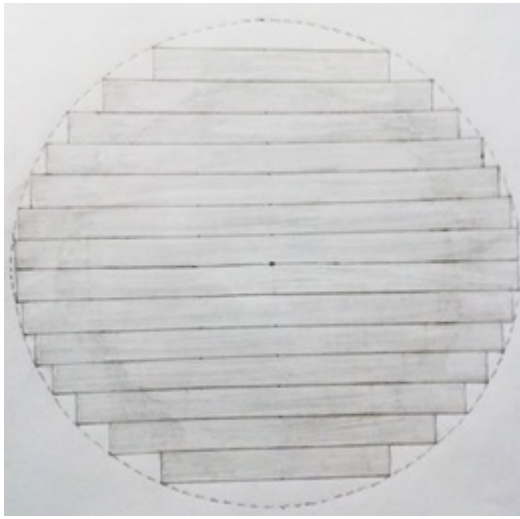
É fácil ver, para uma esfera aproximada por cilindros, que se a quantidade destes corresponder à mesma quantidade de retângulos aproximantes do círculo, todos de mesma largura, os cálculos serão idênticos. Basta observar que ao calcular a medida das metades dos retângulos aproximantes do círculo figura 19 (b), estamos, do mesmo modo, encontrando a medida do raio dos cilindros aproximantes da esfera figura 19 (a).

## 4.2 Preparação de Esboços

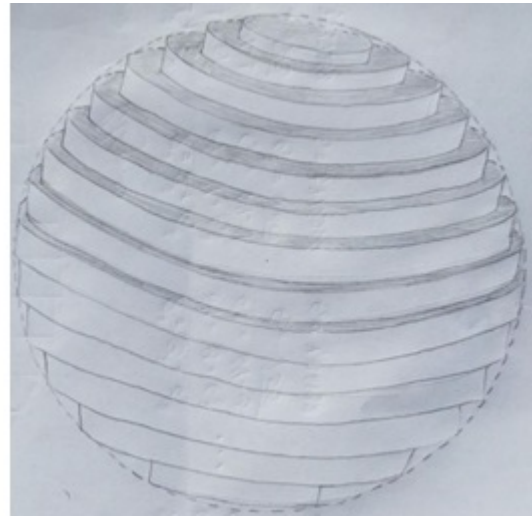
Passamos agora à elaboração de esboços dos artefatos a serem modelados em um programa de CAD. Essa etapa é de grande importância, já que, auxiliam na construção virtual do desenho, atividade desenvolvida na próxima etapa do processo.

Na figura 20, temos os esboços da região do círculo aproximada por retângulos e da esfera aproximada por cilindros, elaborados na fase do planejamento. Este esboço mostra como desejamos o resultado final, ou seja, os objetos depois de impressos em 3D, já com a união de todas as partes (barras e cilindros).

**Figura 41 – Esboços do círculo aproximado por retângulos e da esfera aproximada por cilindros**



(a) Círculo aproximado por retângulos



(b) esfera aproximada por cilindros

### 4.3 A Modelagem 3D e a Exportação

Após a etapa de elaboração dos esboços, partimos para a representação virtual dos objetos, com a utilização do software escolhido OpenSCAD. Esta etapa é conhecida como modelagem 3D. Nesta etapa da construção dos modelos, estão envolvidos vários conceitos matemáticos como as transformações isométricas (translação, rotação, reflexão), o conceito de figuras geométricas planas e espaciais e seus elementos, a localização de pontos no plano e no espaço, ângulos, etc.

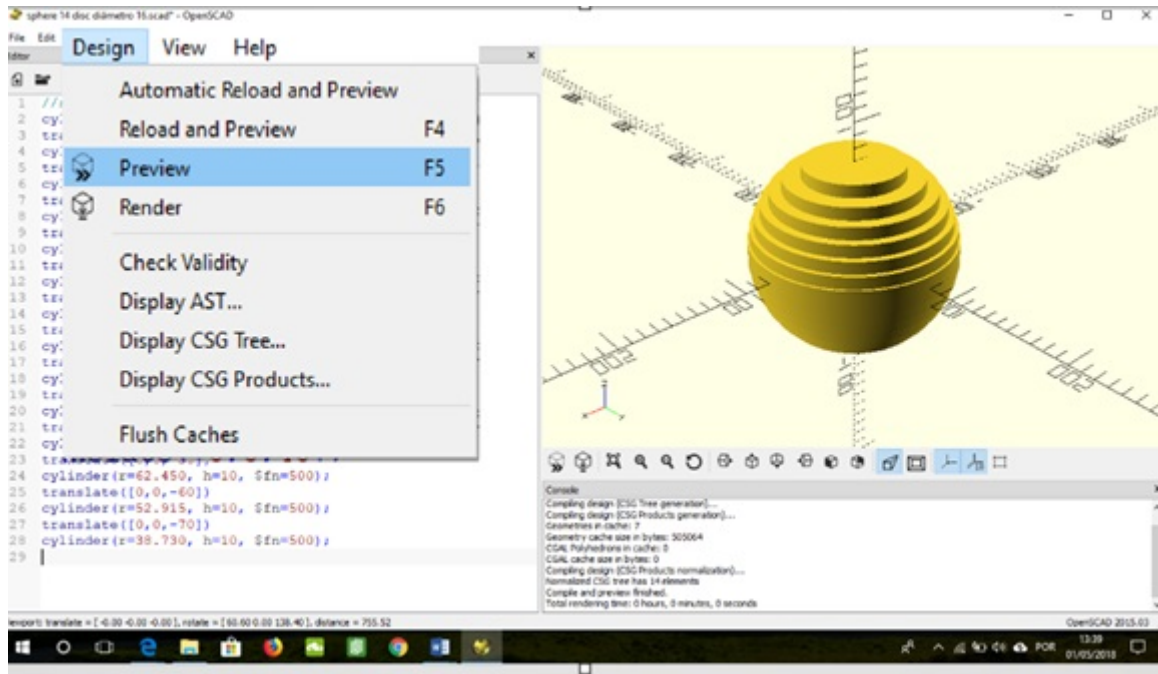
Este software oferece uma extensão de possibilidades de criação de objetos. Embora exija um aprendizado mais aprofundado em trabalhos mais complexos, para a construção dos objetos projetados neste trabalho e para vários outros com uma geometria mais simplificada, seu uso é relativamente simples.

Para a visualização virtual do sólido idealizado, as informações devem ser inseridas no software em linguagem de script. Após a inserção, pressionamos a tecla F5 ou o comando, Design → Preview, para visualizar a imagem 3D do objeto desejado. É importante ressaltar que, no OpenSCAD, o comando Design → Preview cria um objeto que você pode ver, mas não pode exportar. É utilizado para visualizar os modelos enquanto são feitas alterações do script.

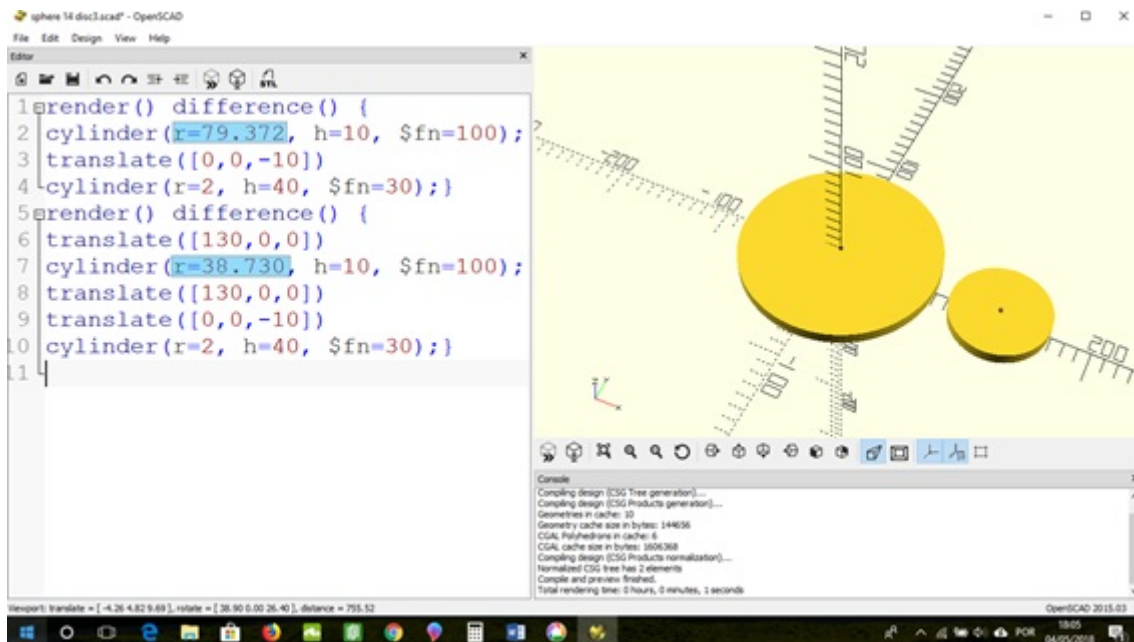
A figura 21 mostra a modelagem 3D da aproximação da esfera concluída como a união de cilindros no *software* OpenSCAD. Nesta imagem objetivamos apenas visualizar o produto final, mas para a impressão do instrumento didático, este arquivo deve ser decomposto em vários outros, de forma que tenhamos os cilindros separadamente, como

podemos ver na figura 22 em seguida.

**Figura 42 – Captura de tela do OpenSCAD. Aproximação da esfera como a união de cilindros**



**Figura 43 – Captura de tela do OpenSCAD. Alguns cilindros que compõem a esfera aproximada por cilindros de mesma altura**



Na figura 22, temos o modelo virtual dos cilindros de maior e menor raio que irão compor, por aproximação com quatorze cilindros, uma esfera de diâmetro 16 cm.

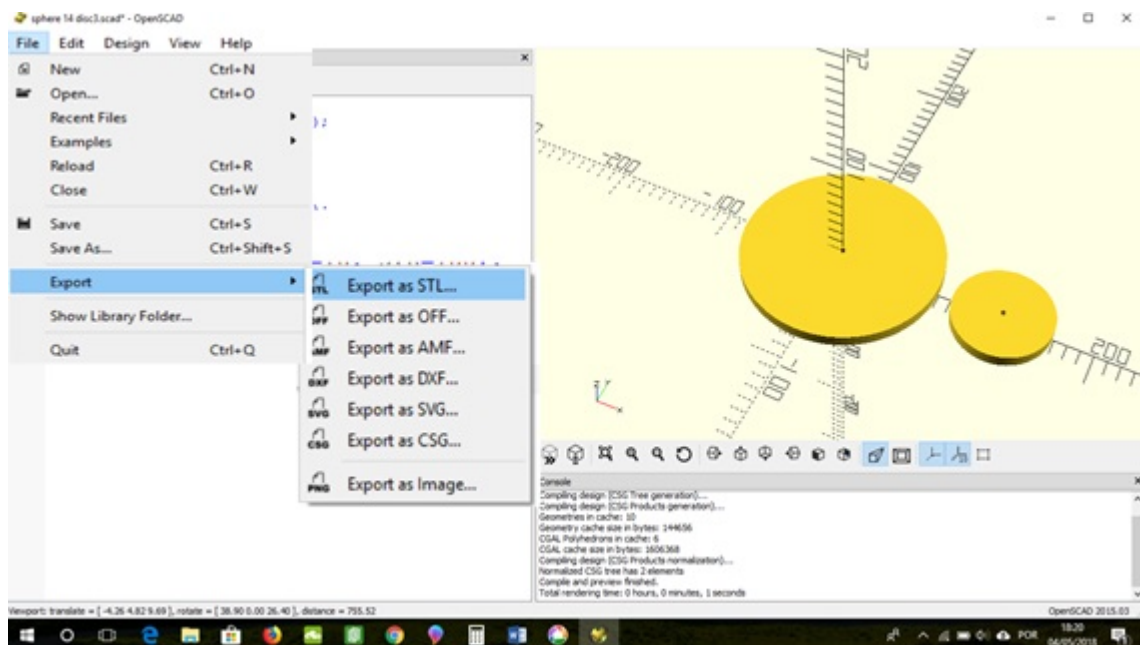
À esquerda da área de visualização, temos o campo onde são inseridos os comandos em linguagem script. Em destaque, os valores (convertidos em milímetros)

calculados através do teorema de Pitágoras como apresentados anteriormente, e inseridos no software a fim de criar o sólido fiel às medidas.

Concluído o modelo final desejado, o arquivo deve ser renderizado (compilado) pressionando a tecla F6 ou utilizando o comando Design → Render para criar um modelo que possa ser exportado para impressão 3D.

Após a compilação do arquivo, devemos exportá-lo em formato .stl usando o caminho Arquivo → Exportar → Exportar com STL (File → Exportar → Export as stl). A figura seguinte nos mostra o processo de exportação do arquivo .scad para .stl após renderizado.

**Figura 44 – Captura de tela do OpenSCAD. Exportação do arquivo .scad para o formato .stl**



#### 4.4 Preparação para Impressão (Fatiamento)

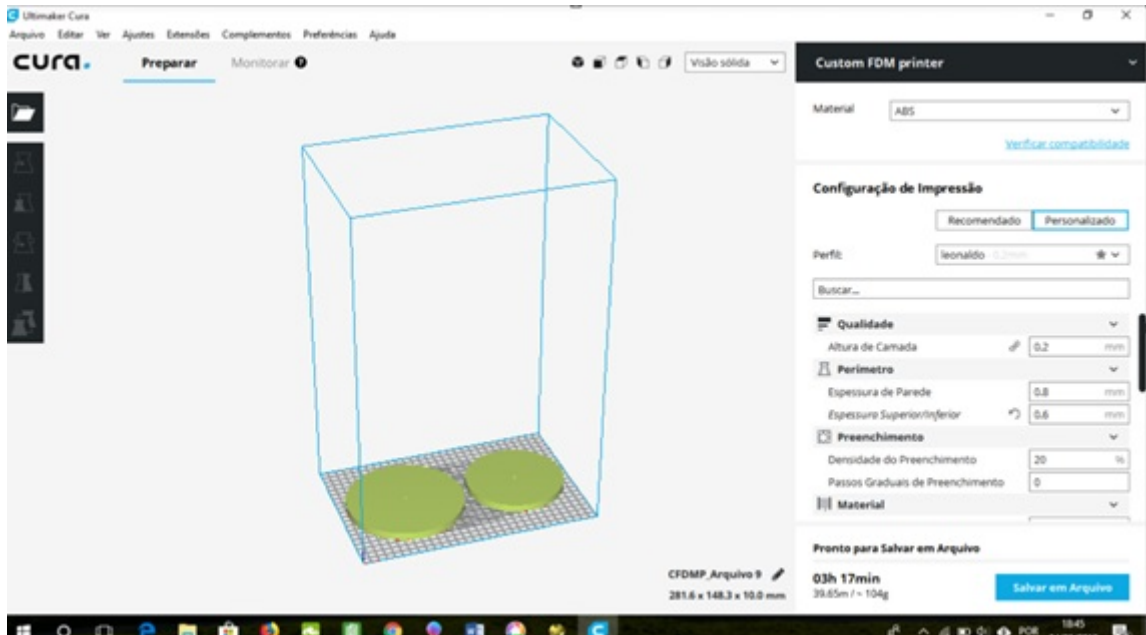
Após a exportação do arquivo .stl do OpenSCAD, é necessário executar um programa que converta o modelo em comandos para conduzir a impressora 3D na confecção do sólido. Este processo é conhecido como fatiamento. Para esse fim usamos o software *Cura*.

O Cura converte um arquivo .stl em um arquivo .gcode. O formato .gcode é o que realmente é aceito pela impressora. É necessário informar ao Cura o tipo de impressora 3D que está sendo utilizada e configurá-la. Essa configuração será relatada adiante.

Algumas impressoras precisam estar ativamente conectadas a um computador, e outras podem funcionar com um cartão SD, como é o caso da Core H4 que utilizamos.

Na figura abaixo, o bloco retangular representa a mesa de impressão da impressora 3D onde se encontram dois dos cilindros que irão compor a esfera aproximada.

**Figura 45 – Captura de tela do programa Cura. Fatiamento do objeto.**

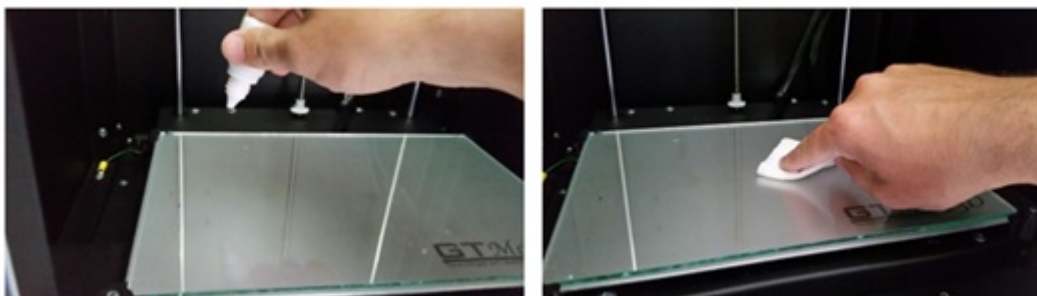


À direita da imagem temos o campo para configurações de impressão. Nesse campo estabelecemos a altura de cada camada sobreposta na construção do sólido, a espessura da parede, tal como, a espessura superior e inferior, a densidade do preenchimento, a temperatura de impressão do material e da mesa de impressão, a velocidade de impressão, etc.

Feitas todas as configurações, selecionamos no canto inferior direito, a opção “Salvar em Arquivo”. Feito isso, o programa gera o arquivo .gcode, que será transferido para o cartão SD para ser impresso.

Nessa fase, a mesa é preparada com o adesivo líquido para receber a deposição do filamento, que conferirá forma ao objeto projetado.

**Figura 46 – Preparação da mesa de impressão com o uso do adesivo líquido**



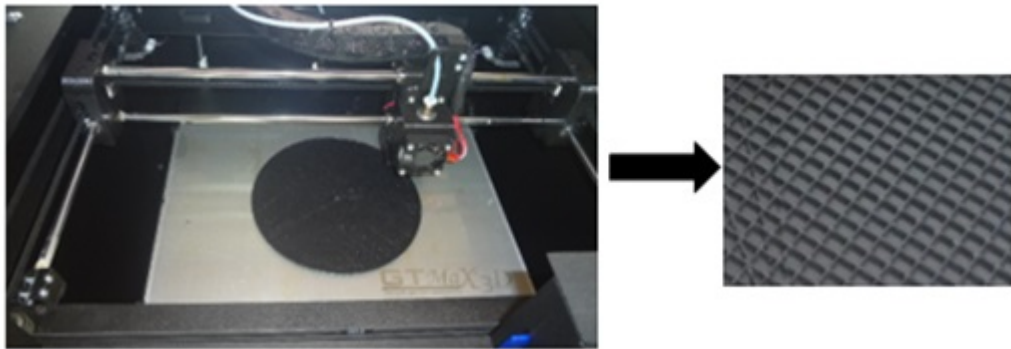
Na configuração da impressora, ajustamos para que fossem criadas camadas



com espessura de 0,2mm. Para a espessura das paredes (área lateral do sólido) e também para o preenchimento inferior e superior (as bases no caso de um cilindro) foi estabelecido o valor de 0,8 mm. Dessa forma a impressora sobrepunha quatro camadas nessas regiões.

Para a densidade do preenchimento, definimos 20%. Este valor do preenchimento cria no interior do sólido uma espécie de colmeia (figura 26), reduzindo assim, significativamente, o custo com materiais e também o tempo de impressão.

**Figura 47 – Construção da colmeia na impressão do cilindro**



A temperatura de impressão do bico extrusor (onde ocorre a fusão e posteriormente a deposição do filamento sobre a mesa) e a temperatura da mesa de impressão foram definidas com os valores de 230 °C e 110 °C, respectivamente.

A velocidade de impressão no momento da deposição do material sobre a mesa, foi configurada com 90mm/s. Para os movimentos de percurso, passagem de um objeto para outro sem a deposição do filamento, foi estabelecida a velocidade de 120mm/s.

Posteriormente à impressão de alguns sólidos, algumas configurações foram alteradas, a fim de diminuir o tempo de impressão sem afetar a qualidade do material. As alterações foram definidas na espessura das paredes e nas camadas inferiores e superiores, passando de 0,8mm para 0,6mm; a velocidade de impressão passou de 90mm/s para 120mm/s e a velocidade do movimento de percurso passou de 120mm/s para 180mm/s.

Essas novas configurações proporcionaram uma economia de tempo e de material na impressão dos objetos, visto que as quatro camadas sobrepostas definidas inicialmente foram reduzidas a três.

Figura 48 – Iniciando a impressão, delimitação da forma e construção da primeira camada

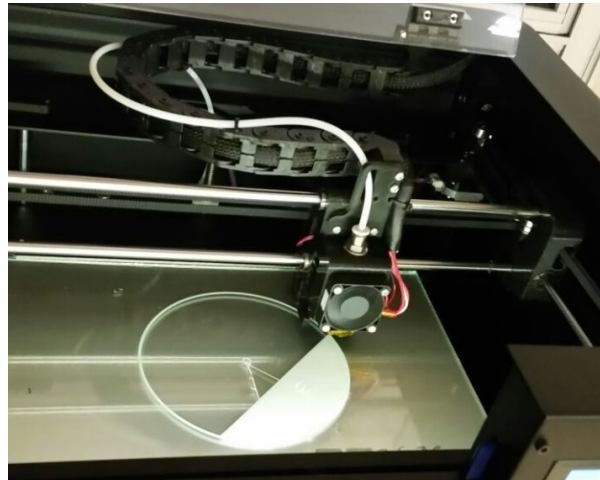


Figura 49 – Impressão dos cilindros aproximantes da esfera (camadas finais)

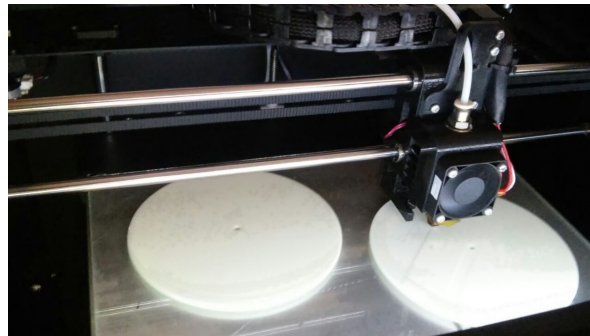
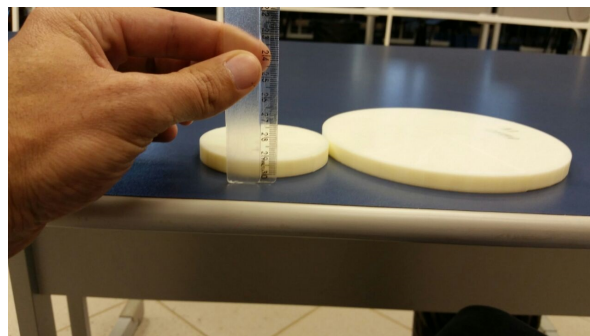


Figura 50 – Verificação da medida da altura dos cilindros após a impressão



**Figura 51 – Esferas aproximadas por cilindros**



Dito tudo isso, resumidamente podemos dizer que o fluxo de trabalho geral da impressão 3D na construção de um objeto requer três etapas. Concentrando-nos nas ferramentas tecnológicas utilizadas, estes dois programas gratuitos juntos, cobrem as três partes da criação de uma impressão 3D: modelando o objeto em 3D (neste caso com uso do OpenSCAD), fatiando o modelo em camadas e convertendo o arquivo para o formato g.code, para rodar na impressora (com uso do software *Cura* para esses dois passos).

**Figura 52 – Fluxo de trabalho geral de impressão 3D com OpenSCAD e Cura**



#### 4.5 Estimativa dos Custos com a Impressão dos Instrumentos

Segundo Aguiar (2016) é pertinente fazer estimativas para ajudar a analisar as situações em que o uso da impressora 3D é realmente benéfico neste momento em que a tecnologia de impressão 3D emerge no ambiente educacional.

Em qualquer processo onde haja um planejamento e envolva investimentos de qualquer espécie, faz parte das atividades uma avaliação dos custos. É importante ainda, em se tratando de materiais para uso em sala de aula e considerando que as escolas não dispõem de recursos disponíveis para investimentos em materiais didáticos diversificados como seria adequado, deve-se buscar alternativas de baixo custo, de boa qualidade e que atendam com eficácia os fins para os quais são propostos.

Os custos foram estimados pelo peso total do objeto impresso, por meio de uma proporção do valor de mercado do quilograma do material utilizado para impressão, no caso o ABS. O quilograma desse material foi adquirido pela UFVJM- *campus* Teófilo Otoni da fabricante brasileira 3Dfila<sup>10</sup> pelo valor de R\$ 85,00. Nessa estimativa estamos desconsiderando o valor da impressora 3D e também os custos com a energia elétrica utilizada para a impressão.

Como os sólidos construídos são de uma geometria simples, não houve gastos com materiais além dos empregados diretamente na peça, como seria gasto por exemplo, na formação de uma base de impressão, necessária na confecção de sólidos com uma geometria mais irregular.

Os custos com a construção dos instrumentos propostos neste trabalho, estão apresentados na tabela a seguir.

**Tabela 2 – Custo com o material utilizado na confecção dos sólidos**

<b>Instrumentos confeccionados</b>	<b>Custos</b>
Círculo aproximado por 6 blocos retangulares com base apoiadora	R\$ 10,60
Círculo aproximado por 14 blocos retangulares com base apoiadora	R\$ 8,50
Círculo aproximado por 30 blocos retangulares com base apoiadora	R\$ 6,80
Esfera aproximada por 6 cilindros, com arco suporte e pino central	R\$ 39,50
Esfera aproximada por 14 cilindros, com arco suporte e pino central	R\$ 53,10
Esfera aproximada por 62 cilindros, com arco suporte e pino central	R\$ 119,85
<b>Total</b>	<b>R\$ 238,35</b>

<sup>10</sup>Fabricante Brasileira de filamento para impressora 3D. <https://3dfila.com.br/>

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se com este trabalho mostrar de que maneira a impressora 3D pode contribuir para a construção do conhecimento Matemático, por meio da construção de modelos para a representação tridimensional de conceitos abstratos e, de forma objetiva, visou-se uma aproximação com essa tecnologia emergente, bem como a sua aplicação na área da Educação. O trabalho teve como objetivo principal a aplicação da tecnologia de impressão 3D na construção de instrumentos didáticos para a sala de aula como possibilidade de complementar a Aprendizagem em Matemática, principalmente na abordagem de conceitos de Cálculo e Geometria.

Acredita-se que o uso dessa tecnologia possa dar mais materialidade a conceitos matemáticos, propiciando assim uma melhor compreensão através da representação tridimensional de objetos por meio da transformação do que é abstrato para o concreto.

Segundo Silva, Siple e Figueiredo (2017, p.1), "... é fundamental entender que a visualização de um objeto matemático e a sua manipulação tátil podem desempenhar um papel importante na elaboração de processos mentais mais eficientes [...]". Aguiar (2016, p.41), complementa que "as visualizações também ajudam a mostrar a beleza da matemática e promovê-la para as pessoas."

A utilização desse material concreto como método de ensino, possibilita a abordagem de conceitos que vão além daqueles que inicialmente motivaram sua criação (somadas de Riemann, cálculo de área e de volume) e que foram citados e detalhados no segundo capítulo, podendo ser explorado no ensino da Geometria desde o ensino básico, com a apresentação de figuras planas, figuras espaciais e suas propriedades; ao ensino superior na abordagem de conceitos mais complexos, como a definição de integral definida e sua aplicação no cálculo de áreas e volumes de sólidos.

O trabalho com esses materiais em diferentes níveis de ensino, sendo em cada fase explorados segundo o nível de aprofundamento no assunto, podem oportunizar uma aprendizagem matemática mais sólida e significativa, competindo ao professor o planejamento e o uso da criatividade para explorar as potencialidades dos artefatos.

Espera-se com a utilização desses materiais, aulas mais atrativas que levem os estudantes a construir, explorar, reconstruir conceitos e desenvolver a sua criatividade e a observação, pois possibilita ao professor abordar um modelo físico capaz de despertar através da visualização um conhecimento mais sólido dos conceitos envolvidos.

O objeto representado em sua forma física viabiliza a associação de conceitos, levando o aluno a perceber como a associação da teoria à prática contribui na resolução de problemas reais e possibilita-o ir ao encontro de novos desafios.

Para Segerman (2012) o objeto resultante do processo de impressão 3D decorre de uma sucessão de técnicas de visualização que muito estreitamente aproxima o ideal matemático do modelo criado.

Essa tecnologia desperta grande interesse no ensino superior e técnico, pois oferece com velocidade, praticidade e facilidade, soluções que antes pareciam bem complicadas ou inalcançáveis.

Com base em análises de pesquisas disponíveis sobre essa tecnologia, foi possível constatar sua importância e vantagem de utilização nas mais diversas áreas, o que justifica sua evolução e expansão. No entanto, a literatura brasileira que discorre sobre a impressão 3D ainda é escassa.

Visto que as impressoras 3D vêm conquistando espaço também no setor acadêmico, é esperado que em pouco tempo surjam outras pesquisas destinadas a investigar suas potencialidades na Educação, com propostas e aplicações de métodos de ensino mais dinâmicos e interativos.

Sugerem-se novos estudos, de modo que possam propor a construção de outros artefatos a serem impressos em 3D. Os mesmos conceitos que motivaram a criação dos modelos apresentados neste trabalho poderão inspirar a criação de outros, bem como trazer ideias para criações diversas a serem exploradas no ensino da matemática e também de outras disciplinas.

Percebe-se que, na atual conjuntura da Educação, o professor não pode ignorar os avanços tecnológicos, nem sua capacidade de adaptar e de aprender, bem como seu potencial pedagógico e sua importância na sociedade. Compete então a esse profissional investigar os recursos e as propostas disponíveis, para que de forma consciente, possa escolher quais instrumentos, onde, como e quando utilizá-los.

Este trabalho contribui para uma reflexão do educador sobre sua prática, na medida em que busca a construção de modelos para representação de conceitos abstratos, apresentando, portanto, a fundamentação embasadora, as etapas do processo, as ferramentas empregadas e as implicações pedagógicas proporcionadas pelo uso da impressão 3D para o Ensino da Matemática. E estimula aos professores estarem sintonizados com o mundo tecnológico e com os desafios atuais, buscando inovar-se e preparar-se, em busca de melhorias na Educação.

Para possuir um modelo 3D, é possível criá-lo, como foi proposto nesse trabalho com o uso do software de modelagem OpenSCAD. De outro modo, a modelagem 3D também pode ser desenvolvida utilizando-se de técnicas de digitalização 3D de objetos reais. Também é possível encontrar modelos virtuais prontos, disponíveis gratuitamente ou não, em sites criados especialmente para compartilhamento. Como exemplos, destacamos o *Thingiverse* e o *MyMiniFactory*<sup>11</sup>. Ambos possuem uma categoria destinada à educação, inclusive com modelos que já foram impressos e testados.

A possibilidade de compartilhamento de trabalhos relacionados à impressão 3D, como a disponibilização de instrumentos didáticos é outro aspecto que a engrandece

---

<sup>11</sup>MyMiniFactory é uma comunidade online para designers e criadores que querem compartilhar gratuitamente ou pagos projetos 3D imprimíveis. <https://www.myminifactory.com/category/education>

no campo educacional. O autor do instrumento didático, poderá através da internet, compartilhar o seu material, bem como, o conhecimento gerado. Esse é um fator facilitador para os docentes que podem propor aplicações em suas aulas, utilizando-os e ou fazendo adaptações desses objetos antes de imprimi-los.

Pensando nisso, os materiais, resultado concreto dessa pesquisa, foram disponibilizados na comunidade thingiverse.com e podem ser acessados através dos links: <https://www.thingiverse.com/thing:3152986>, <https://www.thingiverse.com/thing:3157613> para serem baixados, explorados e, se necessário, adaptados e impressos em 3D para utilização na sala de aula.

Com uma pesquisa mais específica dos programas de modelagem 3D e de fatiamento, como os que foram utilizados nesse trabalho, ou de outros disponíveis para essas finalidades, bem como do funcionamento da impressora 3D que o interessado tenha acesso e da técnica de impressão por ela utilizada, acredita-se que o processo de construção que foi apresentado, proporciona direcionamento aos principiantes interessados na investigação sobre o uso dessa ferramenta na confecção de artefatos.

Finalmente, com a difusão das impressoras 3D é importante notar que sua aplicação no ensino brasileiro se encontra no início e são esperadas experiências educacionais subsequentes, trazendo novas contribuições e ofertando novas ideias.

Há expectativas que esta pesquisa estimule a realização de outras, em favor de um ensino mais dinâmico e efetivo, explorando essa tecnologia em desenvolvimento que vem sendo uma ferramenta potencializadora para o ensino em diferentes áreas do conhecimento.





## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, L. D. C. D. Um processo para utilizar a tecnologia de impressão 3d na construção de instrumentos didáticos para o ensino de ciências. **Universidade Estadual Paulista (UNESP)**, 2016.
- AGUIAR, L. d. C. D.; YONEZAWA, W. M. Construção de instrumentos didáticos com impressoras 3d. **IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. Ponta Grossa (PR)**, 2014.
- BARBOSA, J. L. M. Geometria euclidiana plana. coleção do professor de matemática. **SBM, Rio de Janeiro**, 1995.
- BASNIAK, M. I.; LIZIERO, A. R. A impressora 3d e novas perspectivas para o ensino: possibilidades permeadas pelo uso de materiais concretos. **Revista Observatório**, v. 3, n. 4, p. 445–466, 2017.
- BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Ciências naturais. **Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998a.
- BRASIL. Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. Ministério da Educação (MEC), Brasília**, 2006d.
- BRASIL, P. C. N. Ensino médio. **Brasília: Ministério da Educação**, 1999b.
- BRASIL, P. C. N. E. M. Parte iii-ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica**, 2013e.
- CAED, U. Caderno de pesquisa. **Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora**, 2015.
- CHAVES, E. O. Tecnologia na educação. **Encyclopaedia of Philosophy of Education**, edited by Paulo Ghirardelli, Jr, and Michal A. Peteres. Published electronically at, 1999.
- D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e debates**, v. 2, n. 2, p. 15–19, 1989.
- FILLOS, L. M. O ensino da geometria: depoimentos de professores que fizeram história. **X encontro brasileiro de estudantes de pós-graduação em educação matemática**, p. 05–11, 2006.
- FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa-3**. [S.l.]: Artmed editora, 2008.
- GAZIRE, E. S. **O não resgate da Geometria. 2000. 224f.** Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Educação Matemática). Campinas, SP, 2000.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. [S.l.]: 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de empresas**, SciELO Brasil, v. 35, n. 3, p. 20–29, 1995a.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas. Fundação Getúlio Vargas, Escola de Administração de Empresas de S. Paulo**, SciELO Brasil, v. 35, n. 2, p. 57–63, 1995b. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/20594>>. Acesso em: 02/05/2018.

GORNI, A. A. Introdução à prototipagem rápida e seus processos. **Plástico Industrial**, p. 230–239, 2001. Disponível em: <<http://www.gorni.eng.br/protrap.html>>. Acesso em: 15 de abril 2018.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo-vol. 1. **Editora LTC, Sao Paulo**, 2001.

GUIMARÃES, B. A. A. A problemática no ensino da geometria. **Maiêutica-Matemática**, v. 2, n. 1, 2014.

HULEIHIL, M. 3d printing technology as innovative tool for math and geometry teaching applications. In: IOP PUBLISHING. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**. [S.l.], 2017. v. 164, n. 1, p. 012023.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. [S.l.]: Papirus Editora, 2003.

KNILL, O.; SLAVKOVSKY, E. Illustrating mathematics using 3d printers. **arXiv preprint arXiv:1306.5599**, 2013b.

LIMA, E. L. et al. **Medida e forma em geometria**. [S.l.]: IMPA/VITAE, 1991.

LIPSON, H. Printable 3d models for customized hands-on education. **Mass Customization and Personalization (MCPC)**, 2007.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação matemática em Revista**, n. 4, p. 3–13, 1995.

MINAS, G. Proposta curricular-cbc: Matemática ensinos fundamental e médio. **Belo Horizonte, MG: Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais**, 2007.

NOGUEIRA, V. L. **Uso da Geometria no Cotidiano**. 2009.

OSHIMA, I. S.; PAVANELLO, M. R. **O laboratório de ensino de matemática e a aprendizagem da geometria**. 2010.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha brasil the geometry teaching in literacy cycle: a view from “provinha brasil”. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 16, n. 4, p. 1147–1168, 2014.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências p. 7-18. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender geometria. **VII Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2004.

PEREIRA, R. T. de C.; CORCOLL, C. d. O.; SANTOS, A. dos. Mathcraft: O uso de objetos manipuláveis no ensino e aprendizagem da geometria. **Encontro Nacional de Educação Matemática-ENEM**, São Paulo - SP, p. 1–12, 2016.

REYS, R. E. Considerations for teachers using manipulative materials. **The Arithmetic Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 18, n. 8, p. 551–558, 1971. ISSN 0004136X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/41186429>>.

RICHARDSON, R. J. **Pós-Graduação-Metodologia-Pesquisa Social: Métodos e Técnicas-Métodos Quantitativos e Qualitativos-Capítulo 5**. [S.l.]: Editora ATLAS SA-2015-São Paulo, 2017.

SA B. C. ; MARUYAMA, G. Y. . F. A. G. V. . B. J. A. . V. P. Impressão em 3d do modelo didático para a representação de estruturas que contemplam as diferentes hibridações. In: **XVIII ENEQ - Encontro Nacional de Ensino de Química, 2016, Os desafios da formação e do trabalho do professor de química no mundo contemporâneo**, Florianópolis, 2016.

SCHELLY, C. et al. Open-source 3-d printing technologies for education: Bringing additive manufacturing to the classroom. **Journal of Visual Languages & Computing**, Elsevier, v. 28, p. 226–237, 2015.

SEGERMAN, H. 3d printing for mathematical visualisation. **The Mathematical Intelligencer**, Springer, v. 34, n. 4, p. 56–62, 2012.

SILVA, S. M. D.; SIPLE, I. Z.; FIGUEIREDO, E. B. d. Uso da impressora 3d no ensino de matemática. **Anais do 26º Seminário de Iniciação Científica-Universidade do Estado de Santa Catarina**, Joinville, 2016. Disponível em: <[http://www1.udesc.br/arquivos/id/\\_submenu/2551/122.pdf](http://www1.udesc.br/arquivos/id/_submenu/2551/122.pdf)>. Acesso em: 01/04/2018.

STEWART, J. Cálculo. 6ª edição. **São Paulo: Cengage Learning**, v. 1, 2010.

TECHNOLOGIES, W. Como o uso das impressoras 3d pode transformar a educação no brasil. 2016. Disponível em: <<http://wishbox.net.br/materiais-educativos/>>. Acesso em: 07/03/2018.

