UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Mário Guimarães Gomes

GEOMETRIA NAS QUESTÕES DO ENEM SOB A ÓTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: um auxílio ao trabalho docente

Teófilo Otoni

2017

Mário Guimarães Gomes

GEOMETRIA NAS QUESTÕES DO ENEM SOB A ÓTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: um auxílio ao trabalho docente

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Mauro Lúcio Franco
Coorientador: MSc. Luiz Cláudio Mesquita de Aquino

Teófilo Otoni

2017

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

G633g Gomes, Mário Guimarães.
2017 Geometria nas questões do Enem sob a ótica da resolução de problemas: um auxílio ao trabalho docente. / Mário Guimarães Gomes. Teófilo Otoni: UFVJM, 2017.
140 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Mauro Lúcio Franco.
Coorientador: Prof. MSc. Luiz Cláudio Mesquita de Aquino.

1. Geometria. 2. PCNEM. 3. PCN+ Ensino Médio. 4. Enem. 5. Resolução de Problemas. I. Título.

CDD: 516

Mário Guimarães Gomes

GEOMETRIA NAS QUESTÕES DO ENEM SOB A ÓTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: um auxílio ao trabalho docente

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Mauro Lúcio Franco
Coorientador: Prof. MSc. Luiz Cláudio Mesquita de Aquino

Data de aprovação _____/_____/_____.

____
Prof. Dr. Mauro Lúcio Franco
Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Exatas - UFVJM

____
Profa. Dra. Sílvia Swain Canôas
Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Exatas - UFVJM

____
Prof. Dr. Wederson Marcos Alves
Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Exatas - UFVJM

Teófilo Otoni

Dedico este trabalho aos meus pais, Mafram e Marister, a minha irmã Maria, a minha esposa Patricia e ao meu filho Matheus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta bênção.

Aos meus pais pelos ensinamentos e pelo apoio em todos os momentos da minha vida.

A minha esposa Patricia pelo apoio, incentivo e por compreender meus inúmeros momentos de ausência em virtude das pesquisas e atividades do Programa.

Aos colegas de curso pelo companheirismo e amizade.

Ao Prof. Dr. Mauro Lúcio Franco pela confiança, paciência e competência nas orientações.

Aos professores do PROFMAT/UFVJM por compartilhar seus conhecimentos e experiências.

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. (POLYA, 2006, p. V).

RESUMO

Esta pesquisa objetivou subsidiar os docentes nas atividades de Matemática relacionadas ao conteúdo de geometria, tendo em vista a formação de alunos baseada nas habilidades e competências estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio) e pela Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e análise documental com o intuito de caracterizar o estudo de geometria no âmbito escolar considerando tais competências e habilidades. Foi feita uma análise da metodologia de Resolução de Problemas no contexto da disciplina de Matemática com base em estudos de alguns autores. Nesse contexto, foram apresentadas as suas principais formas de abordagem, discriminadas todas as fases que compõem a resolução de um problema matemático, bem como apresentadas as características e estratégias de planejamento, inserção e desenvolvimento dessa metodologia pelos docentes, considerando aspectos relacionados à seleção dos problemas, à maneira de apresentação dos mesmos, à forma de organização das atividades e ao papel do aluno no processo. Além disso, foram selecionadas, apresentadas e resolvidas questões que compuseram o ENEM no período de 2009 a 2016 que abrangem a Competência de área 2 da Matriz de Referência do ENEM, 'Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela'. As questões foram resolvidas utilizando a metodologia de Resolução de Problemas, com a apresentação discriminada das fases da resolução. Em cada uma das questões são apresentadas as competências e habilidades a que está relacionada, com o intuito de contextualizá-la em relação às capacidades esperadas dos alunos para sua resolução. Com as análises e procedimentos realizados, é possível afirmar que a metodologia de Resolução de Problemas pode representar uma estratégia eficaz no processo ensino-aprendizagem de geometria, e pode servir de auxílio ao trabalho do docente, de modo a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades deles esperadas, bem como garantir que esse processo ocorra de modo significativo e contextualizado.

Palavras chave: Geometria. PCNEM. PCN + Ensino Médio. ENEM. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work aims to offer subsidy to Math teachers, particularly in regards to geometry, considering the students’ skills and competencies established by the Brazilian National Curricular Parameters for High School (known as PCNEM), by the Complementary Educational Guidance to the Brazilian National Curricular Parameters (PCN + High School) and by the Reference Matrix of the High School National Exam (known as ENEM). To this end, we conducted a bibliographical research and document analysis to characterize the study of geometry in the scholar environment considering these skills and competencies. We analyzed the methodology of Problem Solving in the context of Math classes based on some authors. We present the main approaches, discriminate all steps involved in a mathematical problem solving, and present the characteristics and strategies involved in planning, insertion and development of this methodology by the teachers considering the selection of problems, their presentation, organization of activities, and the students’ role in this process. In addition to that, a set of selected questions presented in ENEM within the period of 2009-2016 comprehending area 2 of competency in ENEM’s reference matrix - ’to use geometric knowledge to engage in the understanding and representation of reality and to act upon it’ - was presented and solved. Those questions were solved using the methodology of Problem Solving, with the description of each step. In each of the questions, the skills and competencies required are mentioned with the aim of contextualizing the students’ expected capacities. With the analysis and procedures described here, it is possible to conclude that the methodology of Problem Solving represents an efficient strategy in the process of teaching and learning geometry and can help to develop the students’ expected skills and competencies while assuring that this process is meaningful and contextualized.

Keywords: Geometry. PCNEM. PCN + High School. ENEM. Problem Solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
IFES – Instituições Federais de Ensino Superior
INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC – Ministério da Educação
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN + Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SNE – Sistema Nacional de Educação
UFVJM – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A educação em matemática, segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio), representa uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação do sujeito e contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades exigidas ao longo da vida social e profissional. É necessária em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. (BRASIL, 2002b).

Nesse aspecto, a proposição de métodos e ações que garantam um nível aceitável de desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem de Matemática no âmbito escolar torna-se indispensável, além de representar um grande desafio, uma vez que, de acordo com Crescenti (2005), se refere a uma das disciplinas que mais afeta negativamente a escolaridade dos alunos, e nem sempre foi ensinada de modo que sua apropriação permitisse conhecê-la, admirá-la e aplicá-la convenientemente.

A geometria se insere nesse contexto como um dos conteúdos da educação em matemática que, de acordo com os PCN + Ensino Médio, prevê o estudo e uso das formas geométricas de modo a representar ou visualizar partes do mundo real, bem como o estudo das medidas, que promovem a ligação entre as formas estudadas e os números que quantificam determinadas grandezas. Está presente nas formas naturais e construídas, sendo essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de objetos e espaços e nos sistemas produtivos e de serviços. (BRASIL, 2002b). O referido conteúdo será objeto de estudo desta pesquisa, dada sua grande diversidade de aplicações práticas e a possibilidade de desenvolvimento de "habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas". (BRASIL, 2002b, p. 123).

Considerando que, de acordo com Ponte e Serrazina (2004, p. 2), "as práticas profissionais dos professores de Matemática são certamente um dos factores que mais influenciam a qualidade do ensino e da aprendizagem dos alunos", esta pesquisa objetivou subsidiar as atividades desses docentes relacionadas à geometria, tendo em vista a formação de alunos baseada nas habilidades e competências estabelecidas para esse conteúdo pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), pelos PCN + Ensino Médio e pela Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Com base nesse objetivo, busca-se responder à seguinte questão: como as competências e habilidades discriminadas nos documentos citados, referentes ao conteúdo de geometria, podem ser trabalhadas pelo docente da disciplina de Matemática de modo significativo e contextualizado?

Para isso, como metodologia desta pesquisa, foi realizado levantamento bibliográfico e análise documental com o intuito de caracterizar o estudo de geometria no contexto escolar, bem como as competências e habilidades discriminadas nos PCNEM, PCN + Ensino Médio e

Matriz de Referência do ENEM a serem desenvolvidas pelos alunos, referentes a esse conteúdo.

Como forma de disponibilizar aos docentes de Matemática subsídio para o desenvolvimento de suas atividades, foram selecionadas e resolvidas questões que envolvem Geometria Plana, Espacial e Métrica, retiradas das provas do ENEM do período que compreende os anos de 2009 a 2016. A cada uma dessas questões associou-se as competências e habilidades contempladas por ela.

Neste contexto, a composição do ENEM representa um importante suporte, uma vez que suas questões são baseadas em situações-problema, o que pode contribuir para que sejam desenvolvidas pelo aluno capacidades como analisar, comparar, interpretar, raciocinar, dentre outras. (BRASIL, 2005).

Para resolvê-las utilizou-se a metodologia de Resolução de Problemas que, segundo Lupinacci e Botin (2004, p. 3) baseia-se na "apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento". De acordo com Polya (2006, p. 3), a resolução de problemas é uma habilitação prática e a adquirimos por imitação e prática. Segundo o autor, "o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar".

O presente trabalho foi organizado em cinco capítulos: Introdução; Geometria no Contexto do ENEM e dos PCNEM; Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matemática; Análise de questões das provas do ENEM de 2009 a 2016 e Considerações Finais.

No primeiro capítulo, Introdução, foi comentada a importância da Matemática na vida social e profissional do discente, apresentou-se o objetivo, a metodologia da pesquisa, a questão que se propõe responder e a ideia geral dos demais capítulos.

No segundo capítulo, Geometria no Contexto do ENEM e dos PCNEM, foram apresentadas algumas considerações acerca do ensino de geometria no âmbito da educação escolar, ressaltando a importância e os desafios do trabalho com esse conteúdo, bem como as dimensões e unidades temáticas que o constitui. Também foi feita uma análise do ENEM e sua Matriz de Referência, e, no contexto do referido documento, abordou-se a Competência de área 2 da Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias' - 'Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela'. Além disso, foram apresentadas as competências, habilidades e temas estruturadores de Matemática no contexto dos PCNEM e PCN + Ensino Médio, abordando-se especificamente o tema estruturador 'Geometria e medidas' (Tema 2).

No terceiro capítulo, Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matemática, foi feita uma análise sobre a metodologia de resolução de problemas no contexto da disciplina de Matemática, ressaltando inicialmente o conceito de problemas matemáticos. Apresentou-se as principais formas de abordagem dessa metodologia, bem como discriminou-se todas as fases que compõem a resolução de um problema matemático, com a apresentação detalhada de ações e questionamentos a serem seguidos pelo docente em relação ao cumprimento de cada uma delas. Também foram apresentadas as características e estratégias de planejamento, inserção e desenvolvimento dessa metodologia pelos docentes considerando aspectos relacionados à seleção dos problemas, a maneira de apresentação dos mesmos, a forma de organização das atividades e o papel do aluno no processo. Por fim, foi feita uma análise da utilização do processo da resolução de problemas no contexto específico de geometria, onde ressaltou-se a importância e as contribuições dessa metodologia de ensino no desenvolvimento das atividades relacionadas a esse conteúdo.

No quarto capítulo, Análise de questões das provas do ENEM de 2009 a 2016, foram selecionadas e apresentadas algumas questões que compuseram o ENEM no período de 2009 a 2016 que abrangem a Competência de área 2 da Matriz de Referência do ENEM, 'Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela'. Procedeu-se a resolução de questões utilizando a metodologia de Resolução de Problemas defendida por Polya (2006), com a apresentação discriminada de cada fase da resolução. Visando facilitar o entendimento do processo de resolução das questões, no contexto de cada uma delas, foram construidas figuras com a utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Além disso, em cada uma das questões foram apresentadas as Competências e Habilidades a que está relacionada segundo os PCNEM e PCN + Ensino Médio, com o intuito de contextualizá-la em relação às capacidades esperadas dos alunos para sua resolução. Vale resaltar que os possíveis caminhos de resolução adotados e o suposto grau de entendimento dos discentes foram baseados na visão e experiência docente do autor desta pesquisa. Em contato com essas questões, os docentes, além de terem acesso a cada fase/passo da questão já resolvida com a utilização dessa metodologia, como exemplo para suas práticas, poderão nortear suas atividades com o conhecimento de quais habilidades e competências estão sendo trabalhadas em cada uma delas.

Por fim, apresentou-se as considerações finais que responde à questão da pesquisa e aponta para perspectivas de estudos futuros sobre o tema, além da apresentação das referências e anexos.

2 GEOMETRIA NO CONTEXTO DO ENEM E DOS PCNEM

Os PCNEM e a Matriz de Referência do ENEM explicitam habilidades básicas e competências específicas a serem desenvolvidas pelos alunos na disciplina de Matemática até o término do ensino médio, visando, inclusive, a implementação de diretrizes para esse nível de ensino.

Tais habilidades e competências possibilitam a organização do trabalho pedagógico por área e por conjunto de áreas, norteando as atividades do professor. No âmbito escolar, essa organização pode também contribuir para uma melhor estruturação do projeto pedagógico da escola. (BRASIL, 2002a).

Dentre os conteúdos abordados pelos referidos documentos insere-se a geometria, que remete ao desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, além da possibilidade de uso de formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo. (BRASIL, 2000).

Diante disso, a análise da geometria nesse contexto é de suma importância para o desenvolvimento de ações que busquem a aproximação das atividades relacionadas a esse conteúdo com as competências e habilidades esperadas dos alunos.

2.1 Geometria no ensino médio

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a geometria está presente nas formas naturais e construídas e é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio esse conteúdo trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. (BRASIL, 2002b).

Para o desenvolvimento do conteúdo de geometria nesse nível de ensino, de acordo com o referido documento, são propostas quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica; e as propriedades de que trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Essas propriedades dão origem a duas maneiras de pensar em geometria: a primeira delas é marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas, sendo que a segunda tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2002b).

A presença desse conteúdo como parte da disciplina de Matemática no ensino médio é justificada pela capacidade de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio lógico e de resolução de problemas existentes nas mais variadas situações do cotidiano. (BRASIL, 2000). A esse respeito, Lorenzato (1995, p. 5) ressalta que para essa justificativa bastaria o argumento de que sem estudar geometria as pessoas não seriam capazes de desenvolver o pensar geométrico e o raciocínio visual e, sem essa habilidade, dificilmente conseguiriam resolver as situações da vida que forem geometrizadas. Além disso, não seria possível utilizá-la como fator facilitador da compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. "Sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida". (LORENZATO, 1995, p. 5)

Sobre o papel desse conteúdo no contexto da Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam que:

> [...]as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.[...]. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências [...] (BRASIL, 2000, p. 44).

De acordo com Usiskin (1994, p. 35), existem algumas maneiras de formar conceitos em geometria, chamadas de dimensões. As principais são: a geometria como estudo da visualização, construção e medidas de figuras (a dimensão medida-visualização); a geometria como estudo do mundo real, físico (a dimensão mundo real físico); a geometria como veículo para representar outros conceitos matemáticos (a dimensão representação); e a geometria como um exemplo de sistema matemático (a dimensão suporte matemático). Segundo o autor, uma formação em geometria que ignore qualquer dessas dimensões é estreita demais para ser tolerada. "A geometria exige o traçado de figuras simples e a interpretação de modelos visuais. Esses modelos interagem continuamente com o mundo físico, com outras partes da Matemática e podem estar inter-relacionados de várias maneiras."

De acordo com Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994, p. 242), o curso de geometria no ensino médio deve desenvolver nos alunos a capacidade para "formular representações geométricas em contextos desconhecidos e levá-los a utilizar estratégias visuais que demandem a síntese de abordagens geométricas anteriormente dissociadas (por exemplo, achar triângulos semelhantes na secção transversal de um cone inscrito)".

Mesmo diante da importância do ensino de geometria nas escolas, Lorenzato (1995) relata que a omissão do trabalho com esse conteúdo é uma realidade no contexto educacional. Segundo Fainguelernt (1999), o seu ensino, em comparação às outras partes da Matemática, foi e é relegado ao segundo plano na educação escolar.

A essa omissão Lorenzato (1995, p. 3) atribui algumas causas, dentre elas a falta de preparo do professor, "que não detém os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas". A esse respeito, Almouloud *et al.* (2004) também cita que a formação precária de muitos professores referente ao conteúdo de geometria não contribui para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da Matemática. O autor apresenta ainda que a formação continuada desses profissionais, na maioria das vezes, não atende aos objetivos esperados para o trabalho com esse conteúdo.

Segundo Almouloud *et al.* (2004), os livros didáticos também contribuem para a origem de vários problemas no trabalho com a geometria, uma vez que as situações de ensino apresentadas por muitos deles não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. Os problemas geométricos propostos privilegiam resoluções algébricas, e exige pouco raciocínio dedutivo ou demonstração. Além disso, de acordo com o autor, não existe a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, e poucos trabalhos focam a leitura e a interpretação de textos matemáticos.

Lorenzato (1995) ressalta que esse quadro se deve, também, à falta de renovação do ensino de geometria, o que faz com que seu conteúdo perca o vigor. A esse respeito, e como exemplo dessa não renovação, Macedo (2005) complementa que nas escolas e nos livros didáticos, problemas e exercícios são tratados como se fossem equivalentes. Depreende desse fato a possível carência de utilização de métodos eficazes para o seu ensino, que podem ser encontrados em atividades que instiguem o raciocínio e a tomada de decisão por parte dos alunos.

Diante dessas dificuldades e como uma das formas de intervir nas mesmas, Farrell (1994, p. 290) cita que, no trabalho com geometria, os professores devem preocupar-se em responder às seguintes questões: “(1) Como podem ser traduzidas as características centrais da disciplina de maneira que os alunos entendam, mas não distorçam, sua natureza? (2) Que características especiais dos alunos podem retardar ou favorecer a compreensão do assunto?”

Em análise ao primeiro questionamento que se refere à natureza da geometria e engloba seu conceito e função, a autora ressalta que trata-se de um conteúdo dinâmico e, como tal, pode ser aplicado a problemas teóricos ou do mundo real – o aspecto dos produtos. Ao mesmo tempo pode ser utilizado para ampliação do conhecimento e compreensão do mundo ideal da Matemática e do mundo real em que vivemos – o aspecto dos processos. É esse entendimento acerca da função da geometria que deve ser trabalhado com os alunos no processo ensino-aprendizagem.

Em relação ao segundo questionamento, que se refere às caracteristicas dos alunos, segundo a autora, estas abrigam três variáveis de interesse dos professores: desenvolvimento cognitivo, visualizações espaciais e atitudes para com a geometria. Tratando-se do desenvolvimento cognitivo nesse conteúdo, o aluno do ensino médio deve ser capaz de formular hipóteses, raciocinar dedutivamente, entender o papel de modelos matemáticos e entender a diferença entre definir e deduzir. (FARRELL, 1967; FARRELL; FARMER, 1979 *apud* FARRELL, 1994). Farrell (1994) cita como o primeiro passo para a adaptação do ensino às habilidades de desenvolvimento cognitivo, que sejam inicialmente identificadas as aptidões operacionais concretas dos alunos, em vez de se concentrar em suas limitações. Um outro ponto é perceber que os alunos necessitam de estimulação de atividades que variam gradualmente do concreto ao abstrato, com ênfase no raciocínio indutivo, com estratégias que favoreçam a interação dos alunos com o professor e dos alunos entre si. Em relação à visualização espacial, segundo Farrell (1994, p. 295), a geometria exige a habilidade de discriminar material visual em vários graus de complexidade.

“Os alunos devem ser capazes de localizar figuras escondidas, ou deslocadas, até para resolver problemas imediatos de congruência de triângulos”. Tratando-se das atitudes para com a geometria, a autora ressalta a importância de que se desenvolva uma visão diferente desse conteúdo entre alunos e entre os próprios professores, uma vez que é possível identificar interpretações baseadas no rigor e na rigidez, o que pode resultar no desenvolvimento de atitudes negativas e ansiosas de muitos alunos para com o seu estudo.

Em suma, as atividades relacionadas à geometria, assim como a todos os outros conteúdos do ensino médio, devem ser norteadas pelas finalidades desse nível de ensino estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96), nas quais se incluem o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico, bem como a possibilidade de relacionar a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996, p. 12).

O ENEM se insere nesse contexto como um mecanismo que pode contribuir para a qualidade do Ensino Médio. Basea-se em uma Matriz de Referência que compreende grandes áreas do conhecimento, dentre elas Matemática e suas Tecnologias, que, juntamente com as competências estabelecidas pelos PCNEM para essa área, devem ser tomadas como base para o desenvolvimento das atividades dos professores, dentre elas as relacionadas ao conteúdo de geometria.

2.2 O ENEM e sua Matriz de Referência

O ENEM foi instituído através da Portaria do Ministério da Educação (MEC) nº 438, de 28 de maio de 1998, com os seguintes objetivos: conferir ao cidadão parâmetro para auto-avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e a sua inserção no mercado de trabalho; criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do Ensino Médio; fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior; constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio. (BRASIL, 1998b). De um modo geral pode-se definir como seu objetivo principal “possibilitar uma referência para auto-avaliação, a partir das competências e habilidades que o estruturam”. (BRASIL, 2005, p. 7).

De acordo com o Relatório Pedagógico ENEM 2011-2012, trata-se de um exame individual e de caráter voluntário, oferecido anualmente aos concluintes e egressos do Ensino Médio, estruturado por competências e habilidades, especificamente as que são desenvolvidas, transformadas e fortalecidas com a mediação da escola. Está inserido no conjunto do Sistema Nacional de Educação (SNE) como parte do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). “O ENEM vem se modificando ao longo da última década, a ponto de galgar, na atualidade, o patamar de maior teste educacional aplicado pelo Governo Federal.” Segundo o referido relatório, o Exame tem como referência a LDB 9.394/96, os PCN, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, a Reforma do Ensino Médio, os textos que sustentam sua organização curricular em áreas de conhecimento e, ainda, as Matrizes Curriculares de Referência para o

SAEB. (BRASIL, 2015, p. 17).

O conceito de competências e habilidades no contexto do ENEM pode ser assim apresentado: competências - são as modalidades estruturais da inteligência, operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas (observar, representar, imaginar, reconstruir, comparar, classificar, ordenar, memorizar, interpretar, inferir, criticar, supor, levantar hipóteses, escolher, decidir, etc); Habilidades - referem-se especificamente ao plano do 'saber fazer' e decorrem diretamente do nível estrutural das competências adquiridas e que se transformam em habilidades. (BRASIL, 1998a).

Em sua primeira década de existência, o ENEM era composto por 63 (sessenta e três) questões de múltipla escolha. Sem uma ligação estrita com o currículo do Ensino Médio, a intenção do Exame baseava na avaliação de competências e habilidades desenvolvidas ao longo da escolarização básica, com ênfase na resolução de situações-problema, e não na memorização de conteúdos escolares específicos do nível médio. (BRASIL, 2015).

A partir de 2009 o ENEM passou a ser utilizado, também, como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. Algumas mudanças no Exame foram implementadas visando contribuir para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES), para a mobilidade acadêmica e para induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio. Passou a abranger as quatro áreas do conhecimento, relacionando-se aos componentes curriculares da Educação Básica, sendo composto por quatro provas independentes entre si, cada uma com 45 (quarenta e cinco) itens objetivos, totalizando 180 (cento e oitenta) itens, além de um teste de produção escrita (redação). No mesmo ano, também assumiu a função de fornecer a certificação do Ensino Médio para aqueles que não tiveram a oportunidade de conclui-lo na idade esperada. (BRASIL, 2015).

As questões que o compõem passam constantemente por ajustes pedagógicos e técnicos, com a finalidade de otimizar a eficiência e eficácia da prova para que se aproxime o máximo possível de uma medida das competências que pretende avaliar. (FINI, 2005). Possuem caráter interdisciplinar e são contextualizadas em situações cotidianas, objetivando a identificação e resolução de problemas, construção e aplicação de conceitos, organização de dados e informações para a tomada de decisões, construção de argumentação consistente e proposição de intervenções solidárias na realidade. (BRASIL, 2015). "A prova do ENEM, ao entrar na escola, possibilita a discussão entre professores e alunos dessa nova concepção de ensino preconizada pela LDB, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Reforma do Ensino Médio, norteadores da concepção do exame". (BRASIL, 2005, p. 8).

O ENEM é estruturado a partir de uma Matriz de Referência, concebida pelas instituições MEC e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que indica a associação entre conteúdos, competências e habilidades básicas do participante, na fase de desenvolvimento cognitivo e social correspondente ao término da escolaridade básica.

A Matriz de Referência do ENEM apresenta inicialmente os eixos cognitivos comuns a todas as áreas do conhecimento (QUADRO 1).

Quadro 1: Eixos cognitivos do ENEM (comuns a todas as áreas)

Dominar linguagens (DL)	Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
Compreender fenômenos (CF):	Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos históricogeográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
Enfrentar situações-problema (SP)	Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
Construir argumentação (CA)	Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
Elaborar propostas (EP)	Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Fonte: BRASIL, 2009, p. 1. Adaptado.

"Cada uma das cinco competências que estruturam o exame, embora correspondam a domínios específicos da estrutura mental, funcionam de forma orgânica e integrada." (BRASIL, 2002a, p. 16).

Na Matriz de Referência do ENEM, o conhecimento é dividido em quatro grandes áreas e cada uma compreende disciplinas que compõem o currículo escolar (QUADRO 2).

Quadro 2: Áreas de conhecimento do ENEM

Áreas de conhecimento	**Componentes curriculares**
Linguagens, códigos e suas Tecnologias	Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação e Comunicação
Matemática e suas Tecnologias	Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Química, Física e Biologia
Ciências Humanas e suas Tecnologias	História, Geografia, Filosofia e Sociologia

Fonte: BRASIL, 2009, p. 2-11. Adaptado.

Cada uma dessas áreas é composta por um conjunto de competências e habilidades nas quais se baseia a elaboração das questões do ENEM.

O Exame objetiva aferir se o participante, ao final do Ensino Médio, "demonstra domínio dos princípios científicos e tecnológicos que embasam a produção moderna, conhecimento das formas contemporâneas de linguagem, bem como conhecimentos de ciências humanas necessários ao exercício da cidadania.” (BRASIL, 2015). “A análise dos resultados do desempenho dos participantes do ENEM permite a identificação de lacunas em seu aprendizado e, também, das potencialidades que ele apresenta ao final da escolaridade básica”. (BRASIL, 2005, p. 8).

Considerando que o objeto maior deste estudo se baseia na abordagem do conteúdo de geometria no contexto do ENEM, será analisada especificamente a área de conhecimento ‘Matemática e suas Tecnologias”, com foco principal na Competência de área 2 ‘Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela’, juntamente com as habilidades que ela compreende.

2.3 ‘Matemática e suas Tecnologias’ na Matriz de Referência do ENEM

A área de conhecimento ‘Matemática e suas Tecnologias’ (Anexo A) no contexto da Matriz de Referência do ENEM apresenta 07 (sete) competências (QUADRO 3).

Quadro 3: Competências que compõem a Matriz de Referência ‘Matemática e suas Tecnologias’

Competência de área 1	Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
Competência de área 2	Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Competência de área 3	Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
Competência de área 4	Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
Competência de área 5	Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
Competência de área 6	Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
Competência de área 7	Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística

Fonte: BRASIL, 2009. p. 5-7. Adaptado.

Essas competências referem-se a conteúdos normalmente veiculados no ensino básico e estão organizadas por temas matemáticos: números, geometria, álgebra, grandezas e medidas, modelagem, tratamento da informação e conhecimentos de estatística e probabilidade. (BRASIL, 2015).

A Competência 1 é composta por cinco habilidades e se refere ao pensamento numérico, que permite explorar situações presentes no contexto social e analisar situações da realidade. Refere-se ainda à capacidade de identificar diferentes representações dos números, seus significados e operações. A Competência 2 é formada por quatro habilidades, referindo-se ao uso da geometria na leitura e representação da realidade, e se trata um recurso na resolução de diversas atividades do cotidiano por permitir a descrição e a representação do mundo. Tal competência será o foco deste estudo. Em relação à Competência 3, a mesma possui cinco habilidades que envolvem as noções de grandezas e medidas, associando-as a temas matemáticos presentes em situações do cotidiano. A Competência 4, com quatro habilidades, envolve a ação de identificar, resolver, avaliar a interdependência de grandezas e suas variações em situações-problema que permitam analisar a natureza dessa relação. A Competência 5, com cinco habilidades, trata do desenvolvimento do pensamento algébrico/geométrico para resolver situações-problema. A Competência 6, com três habilidades, abriga os conceitos matemáticos envolvidos com o tratamento da informação cotidiana que permitem selecionar aquelas que são importantes para cada situação. A Competência 7, com quatro habilidades, explora a compreensão de fenômenos aleatórios naturais e sociais, utilizando conhecimentos de probabilidade e estatística na seleção, resumo, interpretação e avaliação de informações. (BRASIL, 2015).

As questões de Matemática que compõem o ENEM baseiam-se na aferição dessas habilidades e buscam avaliar a qualidade do pensamento lógico-matemático básico dos participantes no que se refere: à utilização dos números e das representações numéricas de quantidades e seus significados; às noções de proporções entre grandezas e escalas de medidas; ao conceito de variáveis e sua representação através de funções – inclusive quando a relação é apresentada pela expressão algébrica da função; ao conhecimento de geometria e às propriedades de figuras geométricas e sua utilização para a representação de situações cotidianas; e à interpretação de fenômenos naturais e sociais que possuem caráter aleatório em aplicações de probabilidade e noções de estatística. (BRASIL, 2014).

2.3.1 Competência de área 2 - Matriz de Referência ‘Matemática e suas Tecnologias’

‘Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela’ refere-se à Competência de área 2 da Matriz de Referência ‘Matemática e suas Tecnologias’, e é composta por 04 (quatro) habilidades (QUADRO 4).

Quadro 4: Habilidades compreendidas na Competência 2 da Matriz de Referência ‘Matemática e suas Tecnologias’

H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Fonte: BRASIL, 2009, p. 5. Adaptado.

Essas habilidades, no contexto do ENEM, são averiguadas com base em questões que demandam, dentre outras, raciocínio lógico, poder de argumentação, leitura e representação da realidade, que se referem a características indispensáveis para a resolução das situações-problema apresentadas. (BRASIL, 2000).

Referindo-se à primeira habilidade (H6) que compõe essa competência, verifica-se a presença da capacidade de interpretação, que, se refere a "dar sentido à experiência. Aprender a refletir em outro plano." (MACEDO *et al.*, 2005, p. 87). De acordo com o autor, a situação-problema recorta, organiza, destaca um aspecto da experiência e propõe uma reflexão sobre essa experiência recortada. Descreve como algo que aconteceu, apresentando o contexto que encaixa e dá sentido e autonomia ao acontecimento. Segundo ele, a interpretação questiona o porquê isso aconteceu e se apoia nos dados das experiências, nos indicadores ou sinais, que possibilitam a realização de inferências ou julgamentos que a expressam. Considerando o apresentado pelo autor, é possível verificar que o desenvolvimento da capacidade de interpretação requer oportunizar o contato com experiências envolvendo situações-problema diversas e com a possibilidade de poder refletir sobre elas.

Em relação à habilidade 7 (H7), verifica-se que a mesma baseia-se na capacidade de identificação. A esse respeito, Macedo *et al.* (2005, p. 83) cita que "identificar consiste em, tomando algo como referência (absoluta ou relativa), buscar tudo o que corresponde (total ou parcialmente) a essa referência." Segundo o autor, trata-se de uma competência transversal porque "implica tomar decisões, interpretar, no conjunto de possibilidades de expressão de uma dada coisa, tudo que emparelha, representa, ilustra, encaixa-se no termo que serve de referência." Verifica-se que o trabalho com situações-problema diversificadas e contextualizadas, e a possibilidade de que o aluno se veja como sujeito ativo no processo de resolução, também pode ser uma alternativa que contribua para o domínio da capacidade de identificar, uma vez que esse trabalho pode levar ao desenvolvimento de conhecimento dotado de significado.

A habilidade 8 (H8) requer a capacidade de resolução de situação-problema. De acordo com Macedo *et al.* (2005, p.30), "uma situação-problema, em um contexto de avaliação, define-se por uma questão que coloca um problema e oferece alternativas, das quais apenas uma corresponde à resposta correta". Segundo ele, para a resolução da mesma é necessário que se recorra às habilidades de comparar, interpretar, identificar, dentre outras, para que se tome uma decisão. Diante disso, é preciso ressaltar a importância e a necessidade do trabalho constante com esse tipo de atividade no âmbito escolar de modo a proporcionar o desenvolvimento dessas habilidades e a permitir a inserção dos conteúdos abordados em um ambiente contextualizado, significativo e interdisciplinar.

A última habilidade (H9) abordada na competência de área 2 requer a capacidade de seleção. A esse respeito, Macedo *et al.* (2005, p.83) cita que "selecionar supõe analisar um aspecto e julgar se pertence ou é pertinente ao que está sendo tomado como critério ou referência, ou seja, como base para a tomada de decisão". Significa definir a posição ou ordem (antes, depois, acima, abaixo, etc.) do que está sendo destacado no contexto que lhe serve de referência ou sentido. Verifica-se que as capacidades de analisar e julgar são a base do processo de seleção e precisam ser desenvolvidas. De acordo com Silva (2003, p. 59), “para julgar, precisamos observar, estabelecer comparações, discernir semelhanças e diferenças, orientando-nos por critérios. Tais atividades constituem um mecanismo metodológico de investigação que pode ser exercitado mediante a orientação do professor.”

Nesse contexto, pode ser verificado que o trabalho com o conteúdo de geometria deve ser pautado no oferecimento de oportunidades de desenvolvimento das habilidades que compõem as competências relacionadas à área, neste caso tratando especificamente da Competência 2, que além de requerer a utilização do conhecimento geométrico para a realização da leitura e representação da realidade, exige a capacidade de agir sobre ela. Desse modo, o ensino desse conteúdo deve ir muito além do desenvolvimento da capacidade de visualização e representação. Deve objetivar, também, a capacidade de raciocinar, argumentar, criticar e agir sobre as situações do cotidiano.

2.4 ‘Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias’ segundo os PCNEM

Os PCNEM são a base para a elaboração das matrizes de referência dos conteúdos a serem tratados no Ensino Médio. Cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor na busca de novas abordagens e metodologias. Nesse documento são estabelecidas competências e habilidades que se espera dos alunos desse nível de ensino e pode ser considerado como a busca pela garantia de democratização do processo educacional. A definição dessas competências e habilidades serve de parâmetro para a avaliação da Educação Básica em nível nacional. (BRASIL, 2000).

No âmbito dos PCNEM o conhecimento escolar é dividido em três grandes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Segundo o referido documento, essa divisão se baseia na reunião de conteúdos que compartilham objetos de estudo e mais facilmente se comunicam, criando a possibilidade de que o processo ensino-aprendizagem se desenvolva baseado na interdisciplinaridade.

> A estruturação por área de conhecimento justifica-se por assegurar uma educação de base científica e tecnológica, na qual conceito, aplicação e solução de problemas concretos são combinados com uma revisão dos componentes socioculturais orientados por uma visão epistemológica que concilie humanismo e tecnologia ou humanismo numa sociedade tecnológica. (BRASIL, 2000, p. 19).

Os PCNEM da área ‘Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias’, que abrange as disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática, elencam os principais objetivos formativos, considerados ‘competências’ e que se referem à convergência dos esforços formativos das três áreas abordadas (QUADRO 5), ressaltando a possibilidade de articulação com os objetivos educacionais. Essas competências conferem unidade ao ensino das diferentes disciplinas e visam orientar o trabalho integrado dos professores, além de preparar a articulação de seus esforços com outras áreas.

Quadro 5: Competências gerais da área 'Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias'

Competência 1 Representação e comunicação	Envolve a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento.
Competência 2 Investigação e compreensão	Capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências.
Competência 3 Contextualização sócio-cultural	Análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Fonte: BRASIL, 2002b, p. 113. Adaptado.

Cada uma dessas competências é composta por habilidades que visam consubstanciar o programa educativo ou o projeto pedagógico, e busca o oferecimento de uma ação convergente para a formação dos alunos.

Os objetivos do Ensino Médio em cada uma dessas competências e habilidades devem envolver o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 2000).

A Matemática nesse contexto se apresenta como essencial, dada sua importância para a formação de cidadãos dotados de capacidade de raciocínio lógico, com poder de argumentação, com possibilidade de interpretação dos fatos e capazes de intervir na sociedade em que estão inseridos.

2.4.1 Matemática no contexto dos PCNEM

No âmbito dos PCNEM é estabelecido um conjunto de parâmetros para a abordagem da Matemática no Ensino Médio que pretende contemplar a necessidade de adequação do trabalho com essa disciplina, visando o desenvolvimento e a promoção de alunos com diferentes motivações, interesses e capacidades, de modo a auxiliá-los no desenvolvimento de habilidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. (BRASIL, 2000).

Nesse documento são estabelecidas as finalidades do ensino da Matemática e, dentre elas, pode ser ressaltada, a de desenvolver capacidades de raciocínio e resolução de problemas e de se comunicar. Além disso, apresenta as competências e habilidades esperadas dos alunos (QUADRO 6).

Quadro 6: Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática segundo os PCNEM

Competências	Habilidades
Representação e comunicação	Ler e interpretar textos de Matemática.
	Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).
	Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
	Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
	Produzir textos matemáticos adequados.
	Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
	Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
Investigação e compreensão	Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
	Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
	Formular hipóteses e prever resultados.
	Selecionar estratégias de resolução de problemas.
	Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
	Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
	Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
	Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
Contextualização sócio-cultural	Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
	Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
	Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
	Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Fonte: BRASIL, 2000, p. 46. Adaptado.

Em relação às competências gerais da área 'Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias' apresentadas no Quadro 5, os PCN+ Ensino Médio apontam e detalham o sentido das mesmas no âmbito da Matemática e explicita o que se espera do aluno em cada uma delas, além de fornecer exemplos de modo a auxiliar a compreensão de como é possível desenvolvê-las no contexto da referida disciplina (Anexo B).

De acordo com o documento, visando o desenvolvimento das competências previstas para Matemática junto aos alunos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio, foram criados eixos ou temas estruturadores para o ensino dessa disciplina, que consistem numa seleção de temas relativos ao conteúdo específico da Matemática, sendo essa seleção feita com base em aspectos como: relevância científica e cultural dos conteúdos; articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem; possibilidade de o aluno estabelecer relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção às competências da área. Os três temas estruturadores são: Tema 1 - Álgebra: números e funções; Tema 2 - Geometria e medidas; Tema 3 - Análise de dados. Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo, sendo divididos em unidades temáticas autônomas, de conhecimentos específicos, que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico da escola, considerando características de seus alunos e dos tempos e espaços para seu desenvolvimento.

Em relação ao trabalho com esses temas, de acordo com os PCN+ Ensino Médio:

> Ao selecionar um tema, a forma de trabalho deve ser pensada de modo integrado à sua escolha, evitando repetir o modelo curricular das listas de assuntos enfileirados. As escolhas que serão feitas devem ter no horizonte o aluno de cada escola, daí a necessidade de um olhar cuidadoso para esses jovens, indivíduos cognitivos, afetivos e sociais, que possuem projetos de vida, histórias pessoais e escolares. A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta. Alunos que não falam sobre matemática e não têm a oportunidade de produzir seus próprios textos nessa linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nessa área. (BRASIL, 2002b, p. 120).

Considerando os objetivos previstos por este estudo, será abordado especificamente o tema estruturador ‘Geometria e medidas’ (Tema 2) para o qual são propostas, no âmbito dos PCN+ Ensino Médio, quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica. Cada unidade contempla um conjunto de conteúdos e habilidades (QUADRO 7).

Quadro 7: Conteúdos e habilidades da unidade temática Tema 2 – ‘Geometria e medidas’

1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	•Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.
	•Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
	•Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.
	•Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.
	•Fazer uso de escalas em representações planas.
2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.	•Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
	•Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
	•Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
	•Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.
3. Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.	•Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
	•Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
	•Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.
4. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.	•Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
	•Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
	•Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
	•Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Fonte: BRASIL, 2002b, p. 125. Adaptado.

De acordo com o Relatório Pedagógico ENEM 2002 este tema estruturador e suas unidades temáticas podem desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, promovendo, também, o avanço na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático. É especialmente adequado para "mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana". (BRASIL, 2002a, p. 125).

É preciso ressaltar que o processo de escolha de um conteúdo para ser desenvolvido junto aos alunos em uma sala de aula não encerra em si próprio a organização de um trabalho pedagógico. Devem ser pensadas formas de abordagem desses conteúdos de modo a despertar o interesse pelo aprendizado e de inserir o aluno como sujeito ativo no processo. A esse respeito, verifica-se que os temas específicos não são suficientes para que se desenvolva todas as competências pretendidas, "mas a cuidadosa articulação entre conteúdo e forma pode organizar o ensino para que ele se aperfeiçoe e constitua de fato uma proposta de formação dos jovens do ensino médio". (BRASIL, 2002a, p. 132). Além disso, devem ser adotadas metodologias que possibilitem o desenvolvimento de capacidades de raciocínio, leitura e interpretação da realidade, bem como o poder de intervir sobre ela.

Como forma de trabalho com a geometria no Ensino Médio visando o alcance das competências e habilidades relacionadas a esse conteúdo e baseando-se nas unidades temáticas previstas para essa área, será abordada a metodologia de Resolução de Problemas, por verificar que pode se tratar de um importante meio de desenvolvimento de capacidades requeridas dos alunos para sua formação intelectual, profissional e social.

3 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A escolha de metodologias adequadas para o desenvolvimento das atividades ligadas ao ensino de Matemática é um diferencial que deve ser considerado ao se basear no tipo de cidadão e profissional que a sociedade requer atualmente e na influência que a Matemática exerce na formação do mesmo. A esse respeito, de acordo com Onuchic (2013, p. 91), "a emergência de uma economia mundial altamente competitiva e tecnológica vem, fundamentalmente, ampliando as demandas da educação matemática." De acordo com a autora, o mundo, a tecnologia, a Matemática estão passando por mudanças e, portanto, a forma como se ensina esse conteúdo também precisa mudar e ir ao encontro das necessidades do século XXI. "A educação matemática está modelada para produzir conhecimento matemático apropriado, com compreensão e habilidades, para diferentes populações de estudantes".

Em relação à sua função no contexto social, Willoughby (2000 *apud* ONUCHIC, 2013, p. 92) adverte que:

> A matemática tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento da sociedade desde os tempos pré-históricos até o presente. Que hoje esse papel é mais significativo do que antes e promete tornar-se ainda mais no futuro. Assim, a Educação Matemática é de grande interesse e suscita grandes debates, sendo que muitos dos argumentos e práticas que pedem atenção hoje parecem notadamente semelhantes àqueles do passado.

Resolução de Problemas se insere nesse contexto como uma metodologia de ensino que pode oferecer contribuições para o desenvolvimento de capacidades como "criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc." (ROMANATTO, 2012, p. 303). Tais capacidades podem ser vistas como necessárias à formação adequada do aluno frente às demandas atuais.

3.1 O que são problemas matemáticos?

Para que se estabeleça uma definição e entendimento da metodologia de Resolução de Problemas é preciso entender o que são problemas matemáticos. Assim, é necessário inicialmente diferenciar 'problemas matemáticos' de 'exercícios matemáticos'.

De acordo com Echeverría e Pozo (1998), a resolução de exercícios se baseia no uso de habilidades e técnicas transformadas em rotinas automatizadas como consequência de uma prática contínua. Dispõe e utiliza mecanismos que levam à solução de forma imediata. O exercício supõe, então, a repetição de uma aquisição, de uma habilidade que, para aquele que a executa, não constitui um problema. Segundo a Fundamentação Teórico Metodológica do ENEM, nesse caso, o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, não garantindo a capacidade de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2005).

No caso dos problemas matemáticos, segundo Dante (2007), trata-se de qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la. Segundo os PCN se referem a "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construi-la". (BRASIL, 1998c, p. 41).

Segundo Echeverría e Pozo (1998), na resolução dos problemas as técnicas aprendidas por meio de exercícios constituem um meio ou recurso instrumental necessário, mas não suficiente, para se chegar à solução. Além dessas técnicas, são exigidas estratégias, conhecimentos conceituais, atitudes dentre outros.

De acordo com Diniz (2001, p. 89), os problemas matemáticos podem se enquadrar como 'problemas convencionais', que tradicionalmente vêm sendo trabalhados na escola, e como 'problemas não convencionais', que se referem a situações-problema, nos quais se baseia a metodologia de Resolução de Problemas. Segundo a autora, os problemas convencionais apresentam como características básicas: textos na forma de frases, diagramas ou parágrafos curtos; os problemas vêm sempre após a apresentação de determinado conteúdo; todos os dados de que o resolvedor necessita aparecem explicitamente no texto e, em geral, na ordem em que serão utilizados nos cálculos; os problemas podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos; a tarefa básica é identificar quais são as operações necessárias à sua resolução e transformar as informações do problema em linguagem matemática; a solução numericamente correta é um ponto fundamental, sempre existe e é única. A autora ressalta que, quando se utiliza unicamente os problemas convencionais na escola, pode levar o aluno a uma postura de fragilidade e insegurança diante de situações desafiadoras. "Ao se deparar com um problema no qual não é identificado o modelo a ser seguido, só lhe resta desistir ou esperar a resposta de um colega ou do professor. Muitas vezes, ele resolverá o problema mecanicamente, sem ter entendido o que fez [...]".

Já os problemas não-convencionais exigem, para sua resolução, certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias. (DANTE, 2007). São problemas que não possuem solução evidente e exige que o resolvedor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução. (DINIZ, 2001).

De acordo com Echeverría e Pozo (1998), uma situação somente pode ser concebida como um problema quando a reconhecemos como tal, e na medida que não disponhamos de procedimentos automáticos para solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos.

O trabalho com situações-problema apresenta como objetivos em relação aos alunos, fazê-los pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio; ensiná-los a enfrentar situações novas; dar a oportunidade de se envolverem com as aplicações da Matemática; tornar as aulas mais interessantes e desafiadoras; equipá-los com estratégias para resolver problemas; dar uma boa base matemática a eles. (DANTE, 2007).

Considerando tais objetivos e a importância da inserção de problemas no âmbito do ensino da Matemática, a metodologia de Resolução de Problemas pode ser considerada uma estratégia eficaz de desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem desse conteúdo.

3.2 Resolução de Problemas na Matemática e suas abordagens

A metodologia de Resolução de Problemas se baseia na proposição e enfrentamento de situações-problema e refere-se ao modo de organizar o ensino, envolvendo mais que aspectos metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e ao que significa aprender. (DINIZ, 2001).

No âmbito dos PCNEM, essa metodologia é considerada como uma importante estratégia de ensino. A esse respeito é ressaltado que:

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p. 52).

Frente às capacidades que podem ser desenvolvidas pelos alunos através do contato com essa metodologia, os PCN+Ensino Médio privilegiam a sua adoção como perspectiva para o trabalho com a Matemática, principalmente utilizando de situações-problema tomadas em contexto real, devendo ser entendida como uma postura de investigação diante de qualquer situação ou fato que possa ser questionado. Nesse documento, a resolução de problemas é vista como peça central para o ensino dessa disciplina, pois o contato com os desafios promovem o desenvolvimento do pensar e do fazer. O mesmo não ocorre quando se propõe apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas. (BRASIL, 2002b).

Segundo Van de Walle (2009, p. 57), "a maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas." As atividades relacionadas a essa metodologia podem e devem ser propostas de modo a envolver os alunos no pensar e desenvolver a matemática importante que os mesmos precisam aprender. Segundo o autor, tarefas ou atividades baseadas em resolução de problemas são o veículo pelo qual se pode desenvolver o currículo desejado, e a aprendizagem é um resultado desse processo.

O primeiro aspecto dessa metodologia, apresentado por Diniz (2001, p. 92 e 94) é considerar como problema toda situação que permita alguma problematização (jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não convencionais). O segundo aspecto é que, somada às ações de propor e resolver situações-problema, inclui também as ações de questionar as respostas obtidas e questionar a própria situação inicial. "[...] enfrentar e resolver uma situação-problema não significa apenas a compreensão do que é exigido, a aplicação das técnicas e fórmulas adequadas e a obtenção da resposta correta, mas, além disso, uma atitude de 'investigação científica' em relação àquilo que está pronto." O terceiro aspecto da Resolução de Problemas é a não separação entre conteúdo e metodologia. Nesse caso, "não há método de ensino sem que esteja sendo trabalhado algum conteúdo e todo conteúdo está intimamente ligado a uma ou mais maneiras adequadas de abordagem. " A garantia disso, segundo o autor, é assegurada com o planejamento e encaminhamento cuidadoso das atividades a serem trabalhadas.

Acerca do valor da Resolução de Problemas para o ensino, Van de Walle (2009) enumera razões para que essa metodologia seja desenvolvida na escola:

- Concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas;
- Desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido;
- Fornece dados contínuos para a avaliação, que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados;
- Possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos;
- Envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina;
- Desenvolve o "potencial matemático";
- A resolução de problemas é muito divertida.

Ainda sobre a importância dessa metodologia, Echeverría e Pozo (1998) ressaltam que o fato de proporcionar aos alunos habilidades e estratégias para a solução de problemas fica reconhecido não somente como o objetivo parcial de cada uma das diversas áreas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, mas, inclusive, nesta última etapa, reconhece-se como um dos objetivos gerais que deveriam ser alcançados no final do período de Educação Básica.

De acordo com Schroeder e Lester (1989 *apud* Nunes, 2010) existem maneiras distintas de abordar a Resolução de Problemas. São elas:

<u>Ensinar sobre Resolução de Problemas</u>: que consiste em trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a ele muitas estratégias, teorizando-o. Baseia-se nas fases de resolução propostas por Polya (2006) e que serão tratadas na Seção 3.3 deste estudo.

<u>Ensinar para resolver problemas</u>: neste caso o professor se concentra sobre os modos em que a Matemática está sendo ensinada e que possam ser aplicados na resolução tanto de problemas rotineiros como de problemas não rotineiros. Segundo os autores, o professor que ensina para resolver problemas preocupa-se com a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam, no contexto de um problema, para outros problemas. Baseia-se na possibilidade de que o aluno seja capaz de usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

Ensinar via resolução de problemas: de acordo com os autores, a Resolução de Problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino, representando um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. Entende-se como via resolução de problemas, um meio de se aprender essa disciplina. Nesse caso os problemas são tratados não apenas com o objetivo de se aprender Matemática, mas também como o principal meio de fazer isso.

Ainda em relação às maneiras de abordar essa metodologia, de acordo com Nunes (2010), a partir de 1990, ensinar via resolução de problemas passou a ser ensinar através da resolução de problemas.

Ensinar através da resolução de problemas: Neste caso pretende-se ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos com a guia e direção do professor através da resolução de problemas. Além disso, durante todo o processo, permite aos alunos fazer matemática, pois, estando diante do problema, eles se inserem como sujeitos ativos, co-construtores do seu próprio conhecimento. (NUNES, 2010).

Nesse contexto, ensinar através da resolução de problemas baseia-se no trabalho com situações-problema como metodologia de ensino, na qual se apoia para o planejamento e realização do processo ensino-aprendizagem.

Esta pesquisa tem como base 'ensinar sobre Resolução de Problemas' e 'ensinar para resolver problemas' sendo necessário que se conheça as fases que compõem o processo de resolução de um problema matemático, visando seu desenvolvimento satisfatório.

3.3 Fases que compõem a resolução de um problema matemático

No processo de resolução de problemas, para que se chegue à solução, é preciso que sejam observadas algumas etapas que o constitui. De acordo com Polya (2006), existem quatro fases que compõem a resolução de um problema matemático (QUADRO 8):

Quadro 8: As quatro fases de resolução de um problema.

Como Resolver um Problema

	COMPREENSÃO DO PROBLEMA
Primeiro É preciso compreender o problema.	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
	ESTABELECIMENTO DE UM PLANO
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
	EXECUÇÃO DO PLANO
Terceiro Execute o seu plano.	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
	RETROSPECTO
Quarto Examine a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: POLYA, 2006, p. XIX e XX. Adaptado.

De acordo com o autor, a primeira fase para resolução é a 'compreensão do problema'. Antes que o aluno busque a resposta a alguma questão é preciso que inicialmente ele a compreenda. Além de entendê-la é preciso que ele tenha desejo de respondê-la. Trata-se da soma entre compreensão e interesse. Sendo assim, não podem ser dispensadas as seguintes indagações: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

De acordo com Echeverría e Pozo (1998), sem compreensão da tarefa os problemas se transformam em pseudoproblemas, em meros exercícios de aplicação de rotinas aprendidas por repetição e automatizadas, sem que o aluno saiba discernir o sentido do que está fazendo e, por conseguinte, sem que possa transferi-lo ou generalizá-lo de forma autônoma a situações novas, sejam cotidianas ou escolares.

A segunda fase se refere ao 'estabelecimento de um plano'. Segundo Polya (2006, p. 7), é necessário que seja visto como os itens estão inter-relacionados, qual a conexão entre os dados e a incógnita, para se ter ideia da resolução, a fim de elaborar um plano para isso. "Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita."

De acordo com Echeverría e Pozo (1998), geralmente os planos, metas e submetas que busca-se estabelecer no desenvolvimento do problema são denominados estratégias ou procedimentos heurísticos de solução de problemas, enquanto que os problemas de transformação da informação requeridos por esses planos, metas e submetas denomina-se regras, algoritmos ou operações.

A terceira fase de resolução de um problema se refere à 'execução do plano', que consiste em desenvolver o plano elaborado. Para isso, inicialmente é preciso que o mesmo seja examinado pacientemente para que fique bem claro. Segundo Polya (2006), o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo do seu plano. Além disso, é importante que o aluno fique convicto da correção de cada passo. A esse respeito, de acordo com Echeverría e Pozo (1998, p. 27), a elaboração e execução de um plano fazem com que sejam colocados novos problemas que precisam ser considerados e para os quais precisam ser elaborados novos planos. São geradas assim submetas a serem atingidas. "Cada vez que uma submeta é atingida, o problema transforma-se em uma questão tão diferente da inicial que nos obriga a começar novamente o processo de solução". Verifica-se que a execução do plano não segue sempre uma sequência linear.

A quarta e última fase de resolução de problemas citada por Polya (2006), é o 'retrospecto'. Segundo ele, o aluno que faz um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que o levou até este, pode consolidar seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

A esse respeito, Echeverría e Pozo (1998) ressaltam que a análise da solução obtida, tanto nos diferentes momentos ao longo do processo de resolução, como no final da tarefa, tornaria mais difícil o surgimento de erros. Desse modo, esta fase apresenta dois objetivos: o de avaliar se alcançou ou não a meta, verificando se deve revisar o seu procedimento; e, do ponto de vista didático, ajudar o aluno a tornar-se consciente das estratégias e regras empregadas e, dessa forma, melhorar sua capacidade de resolução de problemas.

Segundo Polya (2006, p. 12):

> Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.

Nesse contexto, para o desenvolvimento de Resolução de Problemas no âmbito da sala de aula, algumas características precisam ser consideradas, tanto no processo de seleção dos problemas que serão trabalhados, como na sua forma de abordagem. Essas características e modos de desenvolvê-las podem contribuir para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem.

3.4 Características e estratégias de desenvolvimento de Resolução de Problemas de Matemática na sala de aula

O trabalho com a metodologia de Resolução de Problemas no ensino de Matemática exige um processo de planejamento e análise de cada problema, bem como da forma de trabalho com o mesmo, no intuito de garantir que os objetivos propostos sejam alcançados e as capacidades pretendidas sejam desenvolvidas.

Além de proporcionar a familiarização com ideias e conceitos matemáticos, esse processo deve fornecer condições para que os alunos desenvolvam habilidades e atitudes fundamentais na aprendizagem, como por exemplo, levantar hipóteses, questionar, argumentar, prever e estimar resultados, desenvolver diferentes estratégias de resolução, validar soluções, perseverar na resolução de um problema, cooperar com os colegas, interessar-se pelo trabalho desenvolvido, respeitar a argumentação do outro e ter segurança na própria capacidade de aprender. (BRASIL, 2007).

O processo de desenvolvimento dessa metodologia começa pela seleção das atividades propostas. Estas devem garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador deve estar presente em todas elas, permitindo o engajamento e a continuidade dos alunos no processo de aprender. (BRASIL, 2002b).

De acordo com Onuchic (1998 *apud* Nunes 2010), inicialmente é fundamental que o professor, ao objetivar uma aula em que será desenvolvida a Resolução de Problemas, reflita sobre questões como:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?

- Para que séries acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

A esse respeito, Milauskas (1994) cita a necessidade de encontrar problemas com enunciado simples, mas que tenham algo de diferente ou uma solução nova. Segundo ele, os problemas reais podem ser motivadores, mas os totalmente irreais, inusitados ou incomuns também podem ser, pois despertam a curiosidade do aluno. Outro ponto seria o trabalho com problemas que contenham informações estranhas ou insuficientes, obrigando o aluno a raciocinar em busca de condições necessárias à sua solução.

Polya (2006) cita alguns aspectos que devem ser observadas quando da escolha de problemas a serem trabalhados: o problema não deve ser nem muito fácil e nem muito difícil; deve ser dedicado um certo tempo à sua apresentação natural e interessante; o seu enunciado verbal precisa ficar bem entendido; e as partes principais do problema – a incógnita, os dados, o condicionante, devem estar em condições de serem identificadas.

Ainda em relação aos problemas a serem trabalhados é ressaltado que:

> Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, assim, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de Matemática. [...] Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares envolvendo as vidas dos estudantes ou seu dia-a-dia na escola, até aplicações envolvendo as ciências ou o mundo do trabalho. [...] Bons problemas dão aos estudantes a oportunidade de solidificar e estender sua compreensão e estimular nova aprendizagem. [...] Muitos conceitos matemáticos podem ser introduzidos através de problemas baseados nas experiências familiares vividas pelos estudantes ou de contextos matemáticos. (STANDARDS, 2000, p. 52 *apud* NUNES, 2010, p. 82).

Segundo Van de Walle (2009, p. 58), um problema voltado para a aprendizagem matemática possui características como:

- O problema deve começar onde os alunos estão: sua seleção deve levar em consideração a compreensão atual dos alunos, de modo que eles considerem a tarefa algo que faça sentido;
- O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos irão aprender: ao resolver o problema, os alunos devem estar preocupados principalmente em dar significado à matemática que se encontra envolvida, visando o desenvolvimento de sua compreensão. De acordo com o autor, embora seja aceitável e

desejável ter contextos para os problemas que os tornem interessantes, esses aspectos não devem ser o foco da atividade. “Nem as atividades ‘não-matemáticas’ (cortar e colar, colorir gráficos, etc) devem distrair os estudantes da matemática envolvida”.

- A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos: os alunos precisam compreender que eles são os responsáveis por determinar se as respostas estão corretas e por que estão corretas.

Uma boa situação-problema deve compor um sistema, ao mesmo tempo, fechado e aberto. Fechado (como ciclo) no sentido de convidar o aluno a percorrer o seguinte percurso no contexto de cada questão: alteração, perturbação, regulação e tomada de decisão (ou formas de compensação). Aberto, no sentido de propor trocas ou elementos de reflexão que transcendem os limites da prova e ilustram algo que será sempre maior e mais importante do que as circunstâncias de uma prova, com todos os seus limites e precariedade de sua realização. (BRASIL, 2005).

A esse respeito, segundo Van de Walle (2009, p. 68):

> Uma tarefa é eficaz quando ajuda os alunos a aprender as ideias que você quer que eles aprendam. Deve ser a matemática na tarefa que a torna problemática para os estudantes de modo que as ideias matemáticas sejam as suas preocupações básicas. Então, o primeiro e mais importante a considerar ao selecionar qualquer tarefa para sua turma deve ser a matemática.

De acordo com Milauskas (1994, p. 91), além do processo de seleção dos problemas, é preciso considerar a maneira como os mesmos são colocados. “O modo como se faz uma pergunta pode sugerir ou limitar a estratégia usada para resolver o problema. Ele pode afetar a motivação para se dedicar um certo tempo ao problema e, até certo ponto, a própria capacidade do aluno para resolvê-lo. ” Ainda, segundo o autor, o professor deve exercer um controle sobre onde e como um problema é utilizado. Talvez haja necessidade de pistas, atividades preliminares e permissão para que os alunos trabalhem em grupo. É sempre necessário o estímulo a soluções alternativas. “As melhores soluções são aquelas que são gerais, que podem ser aplicadas a futuros problemas. ”

Desse modo, não só a seleção de temas e conteúdo, como a forma de tratá-los no ensino, são decisivas. “A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências”. (BRASIL, 2002b, p. 113).

Em relação ao desenvolvimento das estratégias de trabalho com essa metodologia, Van de Walle (2009) apresenta três fases que devem compor a estrutura das atividades a serem propostas na Resolução de Problemas (QUADRO 9):

Quadro 9: Estrutura das atividades utilizando Resolução de Problemas.

	Preparando os alunos
Fase ANTES	✓Verifique se o problema foi compreendido. ✓Ative os conhecimentos prévios úteis. ✓Estabeleça expectativas claras para o produto.
	⇓
	Alunos trabalhando
Fase DURANTE	✓Deixe os alunos construirem seu conhecimento. Evite antecipações desnecessárias. ✓Escute cuidadosamente. ✓Forneça sugestões adequadas. ✓Observe e avalie.
	⇓
	Alunos debatendo
Fase DEPOIS	✓Encoraje a formação de uma Comunidade de Estudantes. ✓Escute/Aceite soluções dos estudantes sem julgá-las. ✓Sitetize as principais ideias e identifique futuros problemas.

Fonte: VAN DE WALLE, 2009, p. 62. Adaptado.

De acordo com o autor, na fase 'antes' as ações do professor devem estar voltadas para a garantia de que o aluno compreendeu o problema, além de proceder o estabelecimento das expectativas em relação ao que se espera dele e do modo como irá trabalhar. Também como parte dessa fase está o preparo mental do aluno para abordar o problema, e pensar sobre os conhecimentos prévios que ele possui e que serão úteis.

Em relação à fase 'durante', segundo o autor, o professor precisa dar chances para que o aluno trabalhe sozinho ou com parceiros. Sugestões são necessárias, mas é preciso cuidado de não sugerir que o método correto de resolução do problema seja o apresentado pelo professor. Nessa fase devem ser utilizadas a observação e a avaliação para acompanhamento das atividades.

O papel do professor na fase 'depois' consiste em envolver a turma em discussões produtivas ajudando os alunos a trabalharem conjuntamente. Nesse contexto, o professor também precisa escutá-los no intuito de verificar o que pensam e de que forma abordam o problema. Além disso deve sintetizar as principais ideias e indicar problemas para futuras resoluções. "Aqui é onde a maior parte da aprendizagem acontecerá enquanto os alunos refletem individual e coletivamente sobre as ideias que eles criaram e investigaram." (VAN DE WALLE, 2009, p. 66). Segundo o autor, o erro mais fácil de ser cometido pelo professor nessa fase é falhar no planejamento do tempo suficiente para uma discussão ou permitir que essa fase se estenda muito.

No contexto de desenvolvimento dessa metodologia, de um modo geral, o papel do professor deve ser o de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, de modo a proporcionar o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos. (BRASIL, 2002b, p. 129).

Nesse processo de resolução de problemas, a comunicação exerce um papel fundamental para o alcance dos objetivos propostos. Segundo Diniz (2001), ela é necessária para descrever e entender a situação inicial, para buscar e registrar possíveis soluções encontradas e para avaliar quais soluções são mais adequadas.

Segundo Onuchic e Allevato (2008), no processo de ensino-aprendizagem com a resolução de problemas devem estar presentes e serem estimulados aspectos como: entender as hipóteses do problema, tomar decisões para resolvê-los, estabelecer relações entre suas variáveis, saber comunicar resultados, além de ser capaz de avaliar criticamente técnicas e concepções utilizadas em sua resolução.

Um outro fator indispensável para o alcance dos objetivos desse processo, segundo Milauskas (1994, p. 86), é proporcionar o contato constante dos alunos com tais atividades. A esse respeito, o autor ressalta que o aluno aprende a resolver problemas resolvendo problemas de qualidade. Esse treinamento o estimula a exercer suas faculdades de resolução de problemas. Segundo o autor, enfatizar essa metodologia não significa somente inserir alguns 'problemas especializados' nas aulas. Ela deveria ser o tema subjacente das aulas de Matemática, de modo a estimular a flexibilidade e o raciocínio. "A matemática torna-se mais significativa para o aluno que está constantemente em contato com uma ampla variedade de problemas. Ele estará mais capacitado a se adaptar a novas situações e a abordar novos problemas com segurança."

De acordo com Polya (2006, p. 4), a resolução de problemas é uma habilitação prática que adquirimos por observação e imitação. "Aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os." Segundo o autor, o professor que deseja desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas deve levá-los a ter interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar.

A esse respeito, Kenney (1994, p. 107) cita que os alunos devem ser orientados para a resolução de um problema de várias maneiras diferentes. Segundo ele, pode-se aprender muito a partir da análise de diferentes abordagens de um mesmo problema. "De fato, eventuais discussões em classe focalizando a multiplicidade de maneiras de resolver um mesmo problema são um expediente muito eficaz para a revisão e integração do conteúdo."

Em relação ao processo avaliativo no contexto da metodologia de Resolução de Problemas, de acordo com Pironel (2002, p. 39), a avaliação está sendo agregada ao processo de ensino-aprendizagem como forte aliada para o desenvolvimento do conhecimento. Segundo o autor, a avaliação na sala de aula de Matemática constitui-se então parte integrante do próprio processo ensino-aprendizagem, que passa a ser visto como ainda mais amplo, chamado ensino-aprendizagem-avaliação. Segundo ele, verifica-se a avaliação contínua como forma de manter os pensamentos dos alunos visíveis para eles mesmos, para seus colegas e para os professores.

A esse respeito, de acordo com os PCN+Ensino Médio, na utilização da metodologia de Resolução de Problemas ganham importância o cuidado com a obtenção de informações, a avaliação em diferentes contextos, o registro e a análise das informações obtidas. Por isso é importante analisar a escolha dos registros que o professor e seus alunos devem manter para acompanhar esse movimento. Ao professor são oferecidas incessantemente muitas oportunidades de observação e avaliação no desenrolar de seu trabalho com os alunos. Segundo esse documento, muitas vezes, são utilizadas informações, mas não é mantido nenhum registro delas; outras vezes são recolhidas informações que já existiam e das quais não se necessita ou das quais nunca fará uso. Pontuar, registrar e relatar são procedimentos comuns numa avaliação que se integra ao ensino. (BRASIL, 2002b).

Diante disso, é preciso ressaltar a necessidade de que o professor esteja capacitado para o trabalho com essa metodologia. Mello (2000, p. 8-9) enfatiza que, "ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve oportunidade de construir".

Segundo Echeverría e Pozo (1998, p. 14), "ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também de criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta." Para os autores, esse processo consiste em ensinar alunos a propor problemas para si mesmos, de modo a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado. Segundo eles, desse modo, a aprendizagem da solução de problemas somente se transformará em autônoma, espontânea e significativa se transportada para o âmbito do cotidiano. "O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender."

Diante disso, de acordo com Diniz (2001), a Resolução de Problemas caracteriza-se por uma postura de inconformismo diante dos obstáculos e do que foi estabelecido por outros, se referindo ao exercício contínuo de desenvolvimento do senso crítico e da criatividade, características primordiais daqueles que fazem ciência. Essas características se referem, também, aos objetivos do ensino de Matemática.

3.5 Resolução de Problemas no contexto da Geometria

Baseado na importância da geometria para a formação dos alunos, já ressaltada neste estudo, e considerando a deficiência e omissão do trabalho com esse conteúdo (LORENZATO, 1995), que podem estar relacionadas à falta de preparo do professor, ao mau uso do livro didático (ALMOULOUD *et al.,* 2004) e à falta de renovação no seu processo de ensino (MACEDO *et al.,* 2005), a metodologia de Resolução de Problemas e as contribuições que ela pode oferecer ao processo de ensino-aprendizagem representa uma estratégia de trabalho que, se adequadamente abordada, pode ser capaz de promover a reestruturação e adequação do ensino de modo a promover a construção de conhecimentos significativos e contextualizados.

De acordo com os PCN, a geometria é um campo fértil para o trabalho com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. Segundo esse documento, o trabalho com noções geométricas estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa, contribuindo para a aprendizagem de números e medidas. Na exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, esse conteúdo permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998c).

No contexto da metodologia de Resolução de Problemas, de acordo com Deguire (1994, p. 73), a geometria oferece a "oportunidade de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas". 'Ensinar a resolver problemas' ultrapassa a mera resolução de exercícios e inclui a reflexão sobre processos de resolução, com o objetivo de desenvolver conhecimentos que poderão ser úteis posteriormente; 'ensinar para resolver problemas' envolve a compreensão do conteúdo de uma maneira significativa, de modo a ser utilizado em outros problemas e aprendizados. Uma maneira de ensinar para resolver problemas consiste em desenvolver o conteúdo a partir de episódios de resolução de problemas.

Segundo Farrell (1994, p. 296), a geometria, com sua rica tradição de problemas clássicos e utilidade contemporânea em termos de modelos matemáticos, parece adequar-se especialmente a atividades de resolução de problemas. "Tudo indica que a compreensão da geometria se aprofunda à medida que os alunos interagem para analisar construções, descobrir demonstrações ou para encontrar um modelo geométrico que melhor se ajuste a uma situação-problema."

A esse respeito, Passos (2000) afirma que o ensino desse conteúdo deve estar voltado para problemas abertos (com mais de uma resposta e/ou com diferentes formas de resolução), com caráter dinâmico, que propiciem um processo de busca e investigação para resolvê-los. Nessa concepção, segundo a autora, uma tarefa se constituiria em um problema se a pessoa que estivesse resolvendo-a encontrasse algum tipo de dificuldade que a obrigasse a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta. Com isso, os alunos envolver-se-iam com sua imaginação criativa e suas fantasias, sentindo-se interessados e motivados.

De acordo com Polya (2006, p. 82), as figuras, que são o objeto dos problemas geométricos, constituem-se também como um elemento auxiliar, podendo, nesse caso, serem entendidas como um elemento introduzido na esperança de que venha a facilitar a resolução de um problema.

Nesse aspecto, de acordo com o autor, na resolução de problemas geométricos, uma figura pode ser considerada na imaginação ou ser desenhada no papel. Segundo ele, em certas ocasiões, será melhor imaginar a figura sem desenhá-la. No entanto, se for preciso examinar vários detalhes, será necessário traçar uma figura, uma vez que não será possível imaginá-los todos simultaneamente. "Um detalhe visualizado em nossa imaginação pode ser esquecido, mas o mesmo detalhe desenhado no papel aí permanece, de tal maneira que, quando a ele voltamos, relembramos as observações anteriores, com isso nos poupando tempo e trabalho."

A respeito do processo de abordagem das figuras no âmbito da geometria, conforme consta nos Standards (2000 *apud* Nunes, 2010), a modelagem geométrica e o raciocínio espacial oferecem maneiras de interpretar e descrever ambientes físicos e pode ser uma ferramenta importante na resolução de problemas. Além disso, é útil na representação e resolução de problemas em outras áreas da Matemática, bem como em situações do mundo real devendo ser integrada a outras áreas. Ainda segundo esse documento, as representações geométricas podem ajudar os alunos a encontrar o sentido de áreas e frações, histogramas, e coordenadas gráficas, que podem servir para conectar a Geometria com a Álgebra, por exemplo.

Diante disso, considerando os aspectos a serem observados em relação à Resolução de Problemas envolvendo a geometria e visando dar suporte ao professor para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do seu trabalho através da referida metodologia, baseado nos objetivos previstos para este estudo, foram selecionadas e resolvidas questões que compuseram o ENEM, nos anos de 2009 a 2016, que abordam a Competência de área 2 da Matriz de Referência do ENEM, 'Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela', com a finalidade de que, através de exemplos práticos e contextualizados, o professor tenha a possibilidade de nortear suas ações.

Além da apresentação dessas resoluções, cada uma das questões foi associada à Competência e Habilidade a que está relacionada segundo os PCNEM, e ao Conteúdo e Habilidade de acordo com PCN+Ensino Médio. A apresentação desse processo é feita no Capítulo que se segue.

4 ANÁLISE DE QUESTÕES DAS PROVAS DO ENEM DE 2009 A 2016

Foram selecionadas algumas questões das provas do ENEM do período de 2009 a 2016 pertencentes à Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela - da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM. Essas questões foram subdivididas de acordo com a(s) habilidade(s) (H) referentes a competência citada, e resolvidas com a utilização do método de Resolução de Problemas apresentado por Polya (2006) e descriminado no Quadro 8 deste estudo. Utilizando-se do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, foram construidas figuras no contexto de cada questão, como o objetivo de facilitar o entendimento do processo de resolução. Foram descritas as competências e habilidades abrangidas por cada questão de acordo com os PCNEM, bem como conteúdos e habilidades previstos no PCN+Ensino Médio.

4.1 Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional - H6

Questão 166 (ENEM 2009)

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema Estruturador 2. Geometria e medidas

Unidade Temática - 3. Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

• Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

Figura 1: Questão 166 (ENEM 2009)

Questão 166

Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Mapa do Brasil e algumas Capitais

SIQUEIRA, S. **Brasil Regiões**. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135° graus no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

- **A** Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.
- **B** Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.
- **C** Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.
- **D** Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.
- **E** Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

Fonte: INEP, 2009, p. 26.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

A conexão feita pelo passageiro Carlos.

Quais são os dados?

Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135° no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF.

Quais são as condições?

A direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião.

A questão deve ser lida quantas vezes for preciso para a sua compreensão.

Construção de um Plano de Resolução

Conhece um problema igual ou semelhante?

Se os discentes se recordam de um problema parecido:

É possível utilizá-lo? É possível utilizar seu método, seu resultado?

Caso não se recordem de um problema parecido:

O esboço das possíveis rotas é essencial para a resolução.

De onde parte o avião AII?

É uma informação inicialmente importante que está presente nos dados da questão.

Como podem ser entendidos os ângulos de $135°$ *e* $90°$*, lembrando que* $360°$ *é uma volta completa?*

O discente pode visualizar o ângulo de $135°$ como um ângulo reto mais a metade de um ângulo reto.

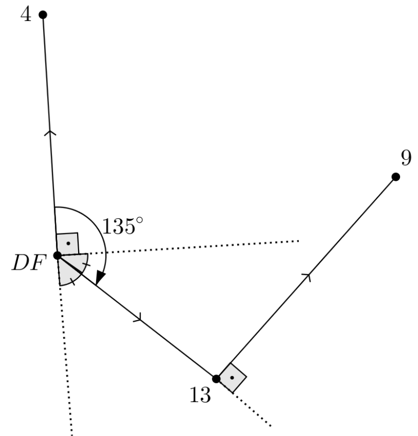
Qual é a importância em definir o sentido dos ângulos nas rotas informadas na questão?

São questões que podem nortear os alunos que apresentam alguma dificuldade.

Execução do Plano

Esboço da rota:

Figura 2: Conexão em Belo Horizonte e em seguida embarque para Salvador



Fonte: Feita pelo autor.

Retrospecto (examinando a solução)

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

O professor deve valorizar outros métodos de resolução.

É possível utilizar o resultado ou o método em outros problemas?

Os alunos devem ser estimulados a descrever outras situações em que o método ou o resultado possam ser utilizados.

Questão 137 (ENEM 2010 - 2ª aplicação)

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema Estruturador 2. Geometria e medidas

Unidade Temática - 1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

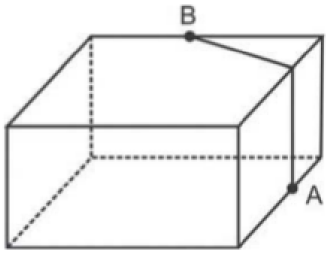
• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

Figura 3: Questão 137 (ENEM 2010 - 2ª aplicação)

Questão 137

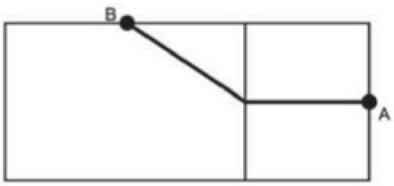
A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.



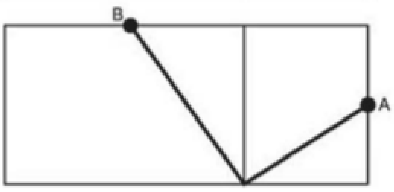
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

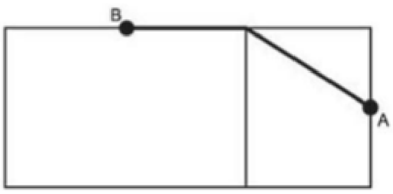
A



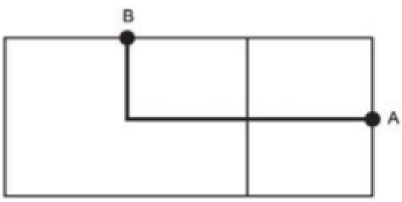
B



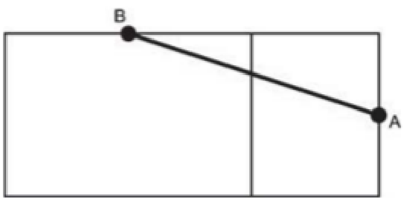
C



D



E



Fonte: INEP, 2010b, p. 19.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O comprimento do cabo que irá ligar o ponto A ao ponto B.

Quais são os dados?

Os pontos A e B pertencem a paredes distintas, perpendiculares entre si e o cabiamento seguirá na parte interna da parede.

Quais são as condições?

O cabo que liga o ponto A ao ponto B deve ser o menor possível.

Construção de um Plano de Resolução

Compare as alternativas.

Para a resolução da questão, deve-se fazer uma análise das representações no plano. O discente escolherá a opção correta ao se lembrar que a menor distância entre dois pontos é dada por uma linha reta.

O que pode-se usar para mostrar qual é a alternativa correta?

A condição de existência do triângulo.

Execução do Plano

O aluno deve ser desafiado a demonstrar por que a alternativa E é a correta.

Retrospecto (examinando a solução)

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

Algum aluno pode tentar resolver a questão de outro modo, ou propor um método diferente. É uma oportunidade para discutir com a turma sobre a resolução da questão.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

A condição de existência do triângulo pode ser de grande ajuda na resolução de diversos problemas. Os alunos podem expor algumas situações em que o método ou o resultado podem ser usados.

Questão 160 (ENEM 2014)

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema Estruturador 2. Geometria e medidas

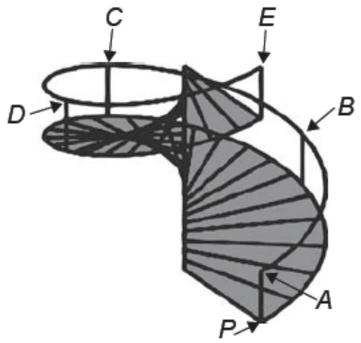
Unidade Temática - 2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

• Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.

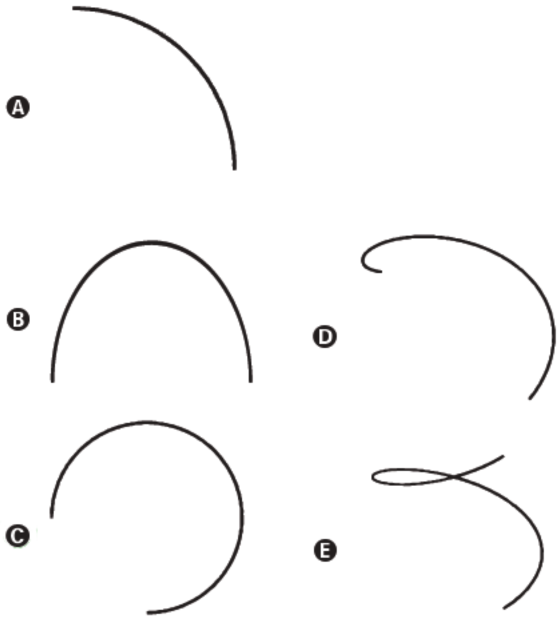
Figura 4: Questão 160 (ENEM 2014)

QUESTÃO 160

O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P*, *A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:



Fonte: INEP, 2014, p. 26.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

A projeção ortogonal sobre o piso da casa, do caminho percorrido pela mão do ponto A ao D do corrimão.

Quais são os dados?

A escada é circular e os pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados.

Qual é a condição?

Os pontos P, A e E estão em uma mesma reta.

Construção de um Plano de Resolução

A análise da figura da questão é fundamental.

Já resolveu uma questão igual ou parecida?

Os discentes podem não se lembrar de questões semelhantes, mas é importante que se lembrem o que é uma projeção ortogonal. Neste sentido, o professor pode trabalhar uma atividade anterior à proposição do problema que permita aos discentes recordar tal assunto, ou lançar a seguinte indagação durante a construção do plano de resolução, caso ache necessário: *O que você entende por projeção ortogonal?*

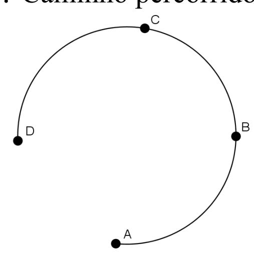
De acordo com as informações passadas pela questão, o que pode-se dizer sobre a projeção ortogonal procurada?

Este questionamento chama a atenção do aluno para os dados fornecidos e para a figura da questão. Ele deve observar que a projeção ortogonal completa do corrimão seria fechada; um círculo ou algo muito próximo, mas a projeção ortogonal procurada, falta aproximadamente $\frac{1}{4}$ do seu total para ser fechada.

Execução do Plano

Portanto, com estas características tem-se a seguinte projeção ortogonal:

Figura 5: Caminho percorrido pela mão



Fonte: Feita pelo autor.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?

A projeção ortogonal pode ser útil na resolução de questões ou em partes dela. Por isso os discentes devem ser estimulados a descrever outras situações onde possam utilizá-la.

4.2 Identificar características de figuras planas ou espaciais - H7

Questão 164 (ENEM 2010 - 2ª aplicação)

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema Estruturador 2. Geometria e medidas

Unidade Temática - 1. Geometria plana**:** semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

• Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.

Unidade Temática - 2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

• Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.

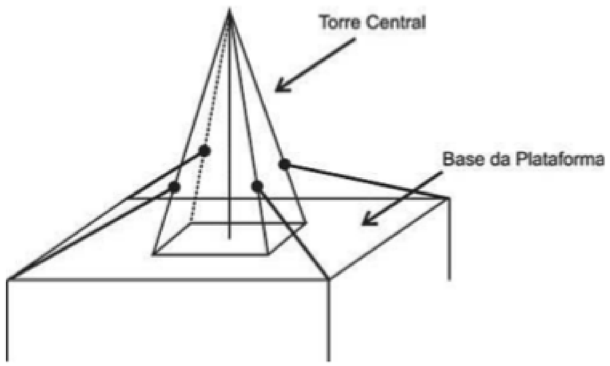
• Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

Figura 6: Questão 164 (ENEM 2010 - 2ª aplicação)

Questão 164

Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central.

Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.



Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

- **A** $\sqrt{288}$
- **B** $\sqrt{313}$
- **C** $\sqrt{328}$
- **D** $\sqrt{400}$
- **E** $\sqrt{505}$

Fonte: INEP, 2010b, p. 26.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O comprimento, o tamanho de cada cabo de aço.

Quais são os dados?

A altura da torre é igual a $24\,m$, a aresta da base da torre é igual a $6\sqrt{2}\,m$, a aresta da base da plataforma é igual a $19\sqrt{2}\,m$, a pirâmide é quadrangular regular e a base da plataforma é quadrada de lados paralelos aos lados da base da pirâmide.

Quais são as condições?

Os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma das extremidades no ponto médio das arestas laterais da torre e a outra nos vértices da base da plataforma. Os centros da torre e da plataforma são coincidentes.

Construção de um Plano de Resolução

Faça uma análise do desenho da situação do problema, considerando os valores fornecidos e a incógnita.

De acordo com o desenho e os dados fornecidos o que pode-se dizer da incógnita?

O discente poderá notar que com as informações inicialmente fornecidas no problema, não é possível encontrar diretamente a incógnita.

Conhece um problema parecido?

Se os alunos não se recordarem de problemas parecidos, continuar indagando.

Que informações auxiliares precisa-se para calcular o valor da incógnita?

A análise a figura do problema com ênfase em apenas um dos cabo de aço, pode ajudar os discentes a perceberem que os segmentos auxiliares que devem encontrar são: a diagonal da base da plataforma, a diagonal da base da torre e a distância do ponto médio da aresta lateral da torre à diagonal da base.

Pode-se dividir o problema em partes?

Este é um questionamento que pode ser feito, caso os alunos não percebam que deve-se dividir o problema inicial em problemas menores, que possibilitem encontrar cada segmento auxiliar até obter informações suficientes para calcular o valor da incógnita.

Referente às partes do problema inicial: Lembra de algum problema parecido? Algum teorema?

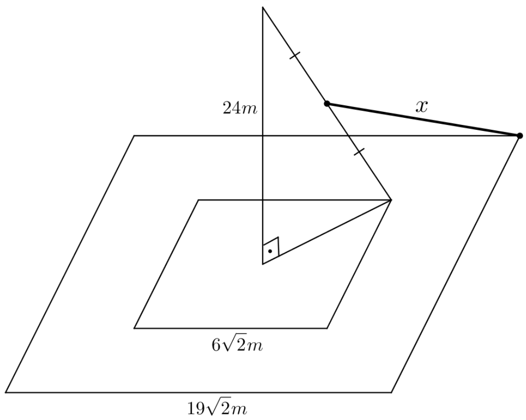
O Teorema de Pitágoras possibilitará encontrar as informações auxiliares necessárias.

Faça a figura representante de cada parte em que ficou dividido o problema inicial.

Execução do Plano

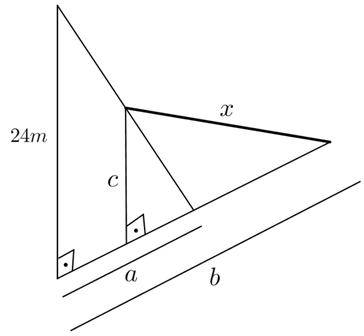
Chamando de x o comprimento do cabo de aço, tem-se a figura onde estão representados os dados do problema.

Figura 7: Considerando apenas um dos cabos de aço



Fonte: Feita pelo autor.

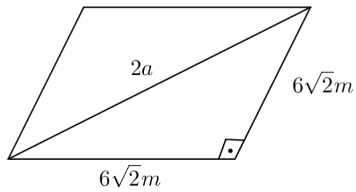
Figura 8: Segmentos auxiliares a, b e c



Fonte: Feita pelo autor.

Encontrando os elementos auxiliares: a metade da diagonal da base da torre, b metade da diagonal da base da plataforma e c distância do ponto médio da aresta lateral da torre à diagonal da base da torre ou da plataforma.

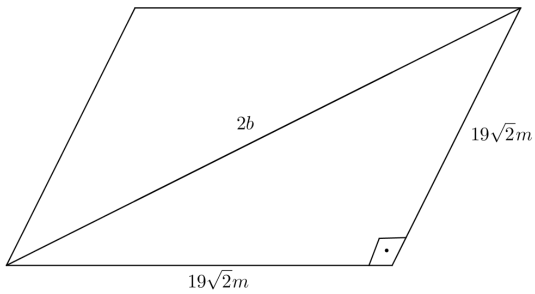
Figura 9: Encontrando o segmento auxiliar a



Fonte: Feita pelo autor.

$$4a^2 = 72 + 72 \ \Rightarrow \ a^2 = \tfrac{144}{4} \ \Rightarrow \ a = 6$$

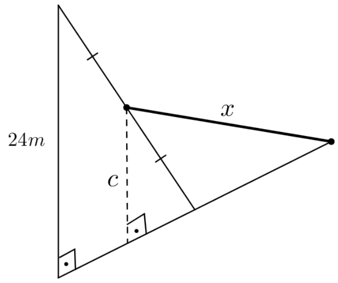
Figura 10: Encontrando o segmento auxiliar b



Fonte: Feita pelo autor.

$$4b^2 = 722 + 722 \ \Rightarrow \ b^2 = \tfrac{1444}{4} \ \Rightarrow \ b = 19$$

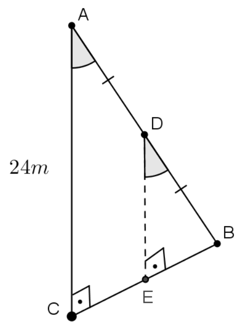
Figura 11: Encontrando o segmento auxiliar c



Fonte: Feita pelo autor.

Tomando $c = \overline{DE}$, tem-se:

Figura 12: Semelhança de triângulos

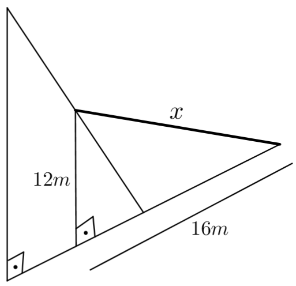


Fonte: Feita pelo autor.

O triângulo ABC é semelhante ao triângulo DBE pelo caso de semelhança Ângulo, Ângulo. Daí tem-se que a razão de semelhança é $\frac{DBE}{ABC} = \frac{1}{2}$, pois $\frac{DBE}{ABC} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}$ como $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ e $\overline{AD} = \overline{DB}$, tem-se que $\overline{AB} = 2\overline{DB} \Rightarrow \frac{DBE}{ABC} = \frac{\overline{DB}}{2\overline{DB}} = \frac{1}{2}$, portanto tem-se que $\overline{DE} = 12\,m$ e o ponto E é ponto médio de $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{CE} = \overline{EB} = 3\,m$.

Agora, calculando o valor da incógnita x,

Figura 13: Encontrando a incógnita x



Fonte: Feita pelo autor.

$x^2 = 144 + 256 \;\;\Rightarrow\;\; x = \sqrt{400}$

<u>Retrospecto</u> (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

O discente pode verificar cada passo.

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

O professor deve valorizar outros caminhos que também levem ao resultado.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Estimular o aluno a dar exemplos de problemas que podem ser resolvidos de modo parecido.

Questão 164 (ENEM 2010)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

<u>Investigação e compreensão</u>

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

<u>Contextualização sócio-cultural</u>

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

<u>Tema 2 Geometria e medidas</u>

<u>Unidade temática Geometria plana</u>: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

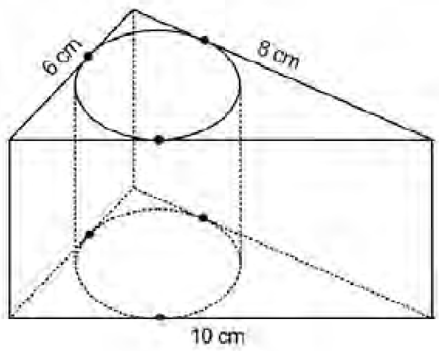
• Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

Figura 14: Questão 164 (ENEM 2010)

Questão 164

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

A) 1 cm.
B) 2 cm.
C) 3 cm.
D) 4 cm.
E) 5 cm.

Fonte: INEP, 2010a, p. 27.

<u>Resolução da questão</u>

<u>Compreendendo o problema</u>

Qual é a incógnita?

O raio da perfuração da peça.

Quais são os dados?

A peça tem formato de prisma reto de base triangular, cujas dimensões da base são $6\,cm$, $8\,cm$ e $10\,cm$ e cuja altura é $10\,cm$.

Qual é a condição?

A peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais.

Sabendo que o prisma e o cilindro em questão são retos, represente a situação em uma figura bidimencional.

<u>Construção de um Plano de Resolução</u>

A análise da figura da situação do problema é fundamental.

Que relação tem a incógnita com os dados fornecidos no problema?

Neste momento apresentam-se dois caminhos distintos, que podem levar o aluno à solução do problema.

1º) Se perceber que o triângulo da base é retângulo e com as informações fornecidas é possível encontrar a sua área.

Conhece um problema parecido?

Se recordam de um problema parecido, questiona-se:

É possível utilizar seu método? Seu resultado?

Do contrário, indaga-se:

Tem-se uma circunferência inscrita no triângulo, o que é possível dizer do raio r e da reta tangente a circunferência?

Os discentes podem recordar que toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Analise cada lado do triângulo retângulo e o raio do círculo inscrito que o toca. É possível calcular a área do triângulo retângulo em função do raio?

Tem-se um raio perpendicular a cada um dos lados do triângulo. Tomando o lado como base e o raio como altura e usando três segmentos auxiliares, é possível obter a área dos três triângulos em que o triângulo retângulo fica dividido.

Caso o aluno não note que o triângulo retângulo pode ser dividido em três triâgulos disjuntos menores, continuar a indagação.

Pode-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível calcular a área do triângulo retângulo em função do raio?

Os segmentos auxiliares AO, BO e CO, possibilitam visualizar os três triângulos disjuntos menores, que quando somadas suas áreas, poderão fornecer o valor da incógnita r procurada.

2º) Se perceber que o triângulo da base é retângulo e visualizar um quadrado de lado r junto ao ângulo reto.

Conhece um problema semelhante?

Se recordam de um problema semelhante, questiona-se:

É possível utilizar seu método? Seu resultado?

Do contrário, indaga-se:

É possível representar cada lado do triângulo da base da mesa, em função da incógnita r?

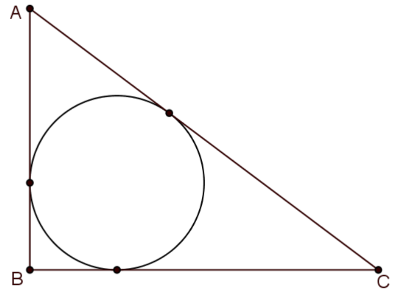
O discente poderá perceber que cada um dos catetos podem ser entendidos com sendo a união de dois segmentos colineares, disjuntos e adjacentes de tamanhos, r e $8 - r$ e r e $6 - r$. Para representar a hipotenusa em função de r, os discentes podem encontrar alguma dificuldade. Neste momento, o professor deve intervir:

Observe a circunferência e os segmentos tangentes a ela, AP e AQ ou BQ e BS ou CS e CP. Conhece alguma relação entre segmentos tangentes à circunferência?

Ao reconhecê-los como congruentes, será possível escrever a hipotenusa em função de r, como $(8-r)+(6-r)$ e obter a incógnita em questão.

Execução do Plano

Figura 15: Representação bidimencional da situação da questão

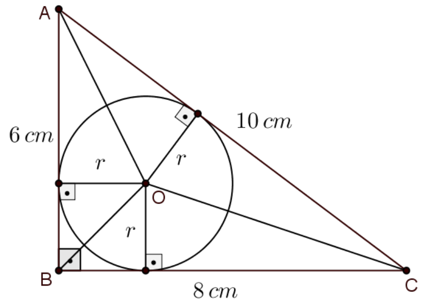


Fonte: Feita pelo autor.

1º caso: Com os dados do problema é possível calcular a área S do triângulo retângulo, $S=\frac{6\cdot 8}{2}=24\,cm^2$.

Adicionando as informações do problema os segmentos auxíliares AO, BO e CO, na figura, tem-se:

Figura 16: Destaque ao triângulo retângulo, raios e segmentos auxiliares

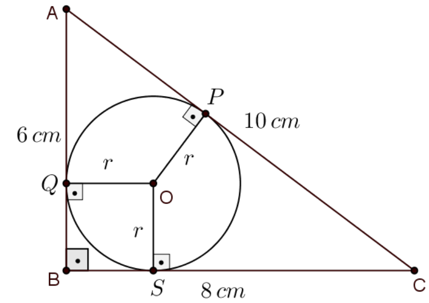


Fonte: Feita pelo autor.

O triângulo da base dividido em três triângulos menores AOC, AOB e BOC, onde os lados do triângulo maior são as bases e r é a altura de cada um dos três triângulos menores, cujas áreas são $A_{AOC}=\frac{8\cdot r}{2}$, $A_{AOB}=\frac{6\cdot r}{2}$, $A_{BOC}=\frac{10\cdot r}{2}$ e a soma das áreas desses triângulos deve ser igual a $24\,cm^2$, $\frac{8\cdot r}{2}+\frac{6\cdot r}{2}+\frac{10\cdot r}{2}=24 \;\Rightarrow\; 24r=48 \;\Rightarrow\; r=2\,cm$.

2º caso: O triângulo da base é retângulo e o ângulo $\hat{B}$ desse triângulo também é ângulo de um quadrado de lado r.

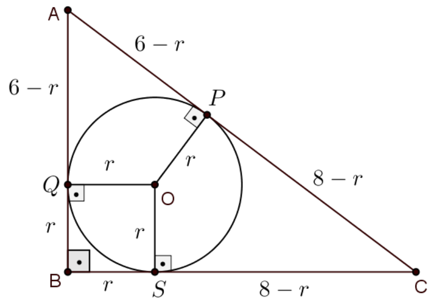
Figura 17: Destaque ao triângulo retângulo e ao quadrado de lado r



Fonte: Feita pelo autor.

Sabendo que $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$, $\overline{BQ} \equiv \overline{BS}$ e $\overline{CP} \equiv \overline{CS}$, tem-se que os lados do triângulo ABC podem ser representados em função de r e o lado $\overline{AC}$ possibilita encontrar o valor da incógnita.

Figura 18: Representando os lados do triângulo em função de r



Fonte: Feita pelo autor.

$\overline{AC} = (6 - r) + (8 - r) = 10 \quad \Rightarrow \quad r = 2\,cm.$

É possível verificar se cada passo está correto?

Cada um dos passos deve ser feito com atenção para evitar erros de cálculo.

É possivel demonstrar que ele está correto?

A congruência dos segmentos tangentes à circunferência conduzidos de um ponto externo à mesma, que é usada no 2º caso, é possível de demonstrar por congruência de triângulos e pode ser proposta aos alunos como desafio.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Cada passo pode ser verificado pelos alunos. O professor pode apresentar ou propor aos discentes algumas demonstrações como da recíproca do Teorema de Pitágoras.

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

A questão foi apresentada com dois caminhos para se chegar ao resultado, mas outros podem ser encontrados e discutidos em sala.

É possível utilizar o resultado ou o método em outros problemas?

O discente deve ser levado a refletir sobre o problema, em que situações pode aplicá-lo ou usar seu resultado.

Questão 152 (ENEM 2012)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

Figura 19: Questão 152 (ENEM 2012)

QUESTÃO 152

Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estátua.

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

A) $R \geq L / \sqrt{2}$
B) $R \geq 2L / \pi$
C) $R \geq L / \sqrt{\pi}$
D) $R \geq L / 2$
E) $R \geq L / (2\sqrt{2})$

Fonte: INEP, 2012, p. 23.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

A relação entre R e L adequada às medidas de segurança.

Quais são os dados do problema?

A base da escultura é quadrada e a base da plataforma é circular.

Qual é a condição?

A base da escultura deve ser integralmente apoiada na plataforma.

Construção de um Plano de Resolução

Trace uma figura representando a situação.

Que relação pode-se observar entre R e L?

Caso o discente não visualize que R é a metade da diagonal do quadrado, outras indagações podem ser feitas.

Pode-se introduzir um segmento auxiliar para ajudar visualizar a relação entre R e L?

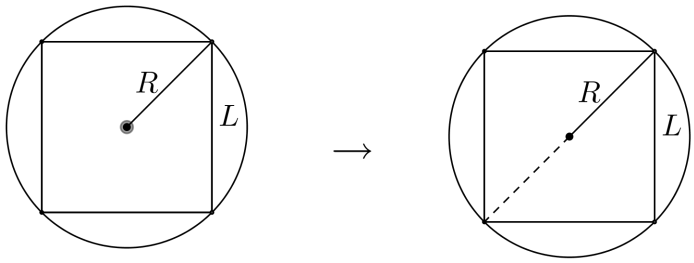
Que outro segmento no quadrado é possível encontrar o valor em função de L ou de R?

Por ser um assunto básico da geometria, existe a possibilidade dos alunos encontrarem um relação entre R e L, sem muita dificuldade.

Execução do Plano

Analisando a figura.

Figura 20: Representação da situação da questão



Fonte: Feita pelo autor.

Tem-se que R é a metade da diagonal do quadrado, $R = \frac{L\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L}{\sqrt{2}}$, daí tem-se que $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$.

Retrospecto (examinando a solução)

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

Outros caminhos podem ser usados, como traçar um segmento auxiliar que liga o centro do quadrado à metade de um dos seus lados e usar o Teorema de Pitágoras. Estas variações na resolução devem ser valorizadas e discutidas com a turma.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

É o momento de analisar com a turma possíveis situações em que este resultado ou método podem ser utilizados.

Questão 141 (ENEM 2013)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc)

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

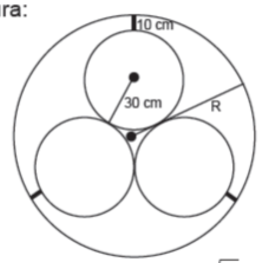
• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

Figura 21: Questão 141 (ENEM 2013)

QUESTÃO 141

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R, em centímetros, é igual a

(A) 64,0.
(B) 65,5.
(C) 74,0.
(D) 81,0.
(E) 91,0.

Fonte: INEP, 2013, p. 20.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

A medida R do raio do cano maior.

Quais são os dados?

O raio dos três canos menores é igual a $30\,cm$ e eles estão soldados e colocados dentro de um cano de raio maior.

Qual é a condição?

Deve haver uma distância de $10\,cm$ entre os canos soldados e o cano de raio maior.

Construção de um Plano de Resolução

Analise a figura fornecida pelo problema.

Já viu este problema antes ou conhece um problema parecido?

Se sim: *Pode-se utilizar seu método ou resultado? É preciso adicionar algum elemento auxiliar para tornar possível sua utilização?*

Se não: *Destaque alguns elementos importantes que estão implícitos na figura.*

Se o triângulo equilátero formado pelos centros dos canos menores não for notado, a pergunta pode ser mais específica:

É possível traçar mais alguns pontos e/ou segmentos na figura?

Que relação é possível perceber entre a incógnita e os dados fornecidos e encontrados?

Os alunos podem notar que o raio procurado é a soma das medidas do espaçador, do raio do cano menor e de parte do baricentro do triângulo equilátero formado pelos centros dos canos de raio menor. Para chegar a esta percepção outros questionamentos ou sugestões um pouco mais específicos podem ser feitos:

Simule um raio do cano maior passando pelo centro de um dos canos de raio menor. Que relação pode-se notar entre a incógnita R e os dados fornecidos pelo problema?

Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível esta relação?

Os discentes podem perceber que o centro do cano de raio maior coincide com o baricentro do triângulo equilátero. Deste modo, os $\frac{2}{3}$ da mediana podem ser usados para encontrar o valor do raio procurado R. Caso esta percepção não aconteça, as perguntas podem ficar mais específicas:

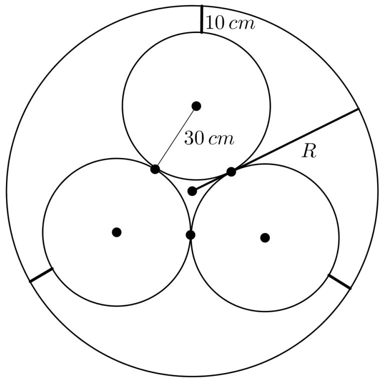
Analise o centro do cano de raio maior em relação ao triângulo equilátero. O que ele representa?

Se recorda de alguma propriedade do baricentro?

Execução do Plano

Analisando a figura, pode-se destacar alguns pontos implícitos.

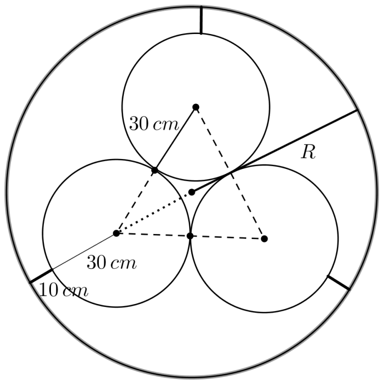
Figura 22: Destaque aos pontos importantes implícitos na figura



Fonte: Feita pelo autor.

Traçando segmentos auxiliares tem-se,

Figura 23: Destaque aos segmentos importantes implícitos na figura



Fonte: Feita pelo autor.

Sabendo que o baricentro de um triângulo dista do vértice $\frac{2}{3}$ de sua mediana e calculando o tamanho desta mediana, que tem a mesma medida da altura do triângulo equilátero $\left(\frac{lado\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$, tem-se $30\sqrt{3}cm$, calculando $\frac{2}{3}$ da mediana obtem-se 34 (considerando $\sqrt{3} = 1,7$). Logo o raio $R = 10 + 30 + 34 = 74\,cm$.

É possível verificar se o passo está correto?

Os cálculos realizados em cada passo devem ser verificados para minimizar os erros.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Os cálculo feitos podem se verificados e algumas demonstrações podem ser propostas aos discentes, tal como, mostrar que no triângulo equilátero medianas e alturas são coincidentes.

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

Outros caminhos de resolução devem ser discutidos na turma.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os alunos devem descrever outras situações em que o método ou o resultado podem ser utilizados.

Questão 179 (ENEM 2013)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

De acordo com PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

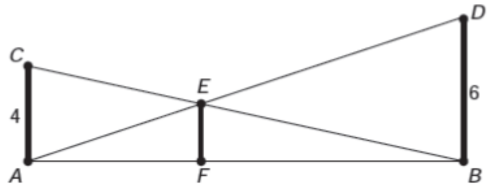
• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.

Figura 24: Questão 179 (ENEM 2013)

QUESTÃO 179

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos *AC* e *BD* e a haste é representada pelo segmento *EF*, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta *AB*. Os segmentos *AD* e *BC* representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste *EF*?

Ⓐ 1 m

Ⓑ 2 m

Ⓒ 2,4 m

Ⓓ 3 m

Ⓔ $2\sqrt{6}$ m

Fonte: INEP, 2013, p. 31.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O comprimento da haste $\overline{EF}$.

Quais são os dados?

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medem respectivamente $4\,cm$ e $6\,cm$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.

Quais as condições apresentadas no problema?

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{EF}$ são perpendiculares a $\overline{AB}$.

Construção de um Plano de Resolução

Já viu um problema igual ou parecido?

Os alunos podem se lembrar de um problema parecido em que se usa semelhança de triângulos. O próximo questionamento seria:

Observe a figura do problema. Quais são os triângulos semelhantes?

Caso não se recordem de problemas parecidos, pode-se sugerir:

Faça um esboço da figura do problema e acrescente o máximo de informações possíveis.

Objetiva-se possibilitar a visualização dos triângulos semelhantes. Caso isso não ocorra, o questionamento pode ser mais específico:

Observe os triângulos formados e os seus ângulos. Quais são os triângulos semelhantes?

Os alunos poderão perceber que são semelhantes os triângulos ABD e AFE e também ABC e FBE, ambos pelo caso de semelhança - Ângulo, Ângulo, e que é possível descrever algumas razões de semelhança. Caso os discentes utilizem as razões de semelhança sem muito sucesso, o professor deve orientá-los questionando:

Existe algum segmento comum entre os pares de triângulos semelhantes?

Pode-se encontrar $\overline{EF}$ e ou $\overline{AB}$ como respostas. Como $\overline{EF}$ é a incógnita procurada e não há uma relação imediata ligada a esse segmento, a indagação será sobre $\overline{AB}$:

Que relação pode ser obtida para $\overline{AB}$?

Espera-se que notem que $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$.

É possível utilizar esta relação de alguma forma?

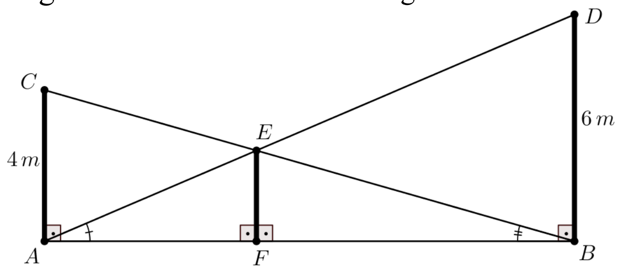
Caso os discentes não percebam que os termos do segundo membro da relação $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$ devem aparecer no numerador da razão de semelhança, ou não tenham escolhido uma razão de semelhança conveniente, o professor deve indagá-los:

A relação pode ser utilizada diretamente ou é preciso reorganizar as ideias para utilizá-la?

Pretende-se que os alunos notem que a razão de semelhança a ser usada deve envolver os segmentos comuns aos pares de triângulos semelhantes e percebam, também, que a conexão entre as razões de semelhança estão na relação $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$.

Execução do Plano

Figura 25: Visualizando os triângulos semelhantes



Fonte: Feita pelo Autor.

Os triângulos $ABD \sim AFE$ e $ABC \sim FBE$,

De $ABD \sim AFE$ tem-se que $\frac{\overline{EF}}{6} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ (I);

De $ABC \sim BFE$ tem-se que $\frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$ (II);

Somando (I) e (II), tem-se $\frac{\overline{EF}}{6} + \frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{5\overline{EF}}{12} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{5\overline{EF}}{12} = 1$ $\Rightarrow \overline{EF} = \frac{12}{5} = 2,4\,cm.$

É possível verificar se os passos estão corretos?

Cada passo deve ser revisto com atenção, para corrigir possíveis erros.

Retrospecto (examinando a solução)

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

Outros métodos de resolução do problema, devem ser valorizados e discutidos em sala. Os alunos devem ser incentivados a buscar outros caminhos para resolução.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

A semelhança de triângulos poderá ser útil para resolver problemas em diversas situações. A turma pode destacar algumas destas situações.

Questão 147 (ENEM 2014)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

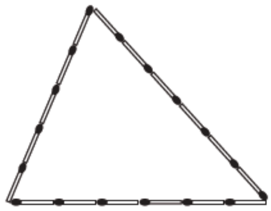
Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

Figura 26: Questão 147 (ENEM 2014)

QUESTÃO 147

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

A 3.
B 5.
C 6.
D 8.
E 10.

Fonte: INEP, 2014, p. 22.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

A quantidade máxima de triângulos distintos que podem ser construídos.

Quais são os dados?

O perímetro dos triângulos devem ser 17 palitos.

Qual é a condição?

Pelo menos um dos lados tem que medir 6 palitos.

Construção de um Plano de Resolução

Conhece uma questão igual ou parecida?

Os alunos podem não se recordar de uma questão semelhante.

Você se recorda de alguma propriedade ou relação que envolva triângulos e seus lados?

A condição de existência do triângulo resolverá a questão. Os alunos devem se lembrar que a soma dos comprimentos de dois quaisquer lados de um triângulo deve ser maior que o terceiro lado. Caso os discentes ainda apresentem dificuldades, o questionamento pode ser mais específico:

Existe um modo de garantir se três segmentos podem ou não formar um triângulo?

Execução do Plano

Sabendo que o perímetro dos triângulos devem ser 17 palitos e pelo menos um dos lados deve ter 6 palitos, restam 11 palitos para os outros dois lados do triângulo.

Considerando um dos lados do triângulo com 6 palitos, tem-se abaixo medidas possíveis para os dois outros lados do triângulo, cuja soma resulta em 11 palitos:

6 palitos e 5 palitos;

7 palitos e 4 palitos;

8 palitos e 3 palitos;

9 palitos e 2 palitos;

10 palitos e 1 palito.

Usando a condição de existência do triângulo, tem-se:

Para 6 palitos e 5 palitos: $6 + 5 > 6$, $6 + 6 > 5$, é um triângulo.

Para 7 palitos e 4 palitos: $7 + 4 > 6$, $7 + 6 > 4$, $6 + 4 > 7$, é um triângulo.

Para 8 palitos e 3 palitos: $8 + 3 > 6$, $8 + 6 > 3$, $6 + 3 > 8$, é um triângulo.

Para 9 palitos e 2 palitos: $9 + 2 > 6$, $9 + 6 > 2$, $6 + 2 < 9$, não é um triângulo.

Para 10 palitos e 1 palito: $10 + 1 > 6$, $10 + 6 > 1$, $6 + 1 < 10$, não é um triângulo.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

A condição de existência do triângulo pode ser de grande ajuda na resolução de diversos problemas. Os discentes podem exemplificar algumas situações em que ela pode ser usada.

Questão 165 (ENEM 2015)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

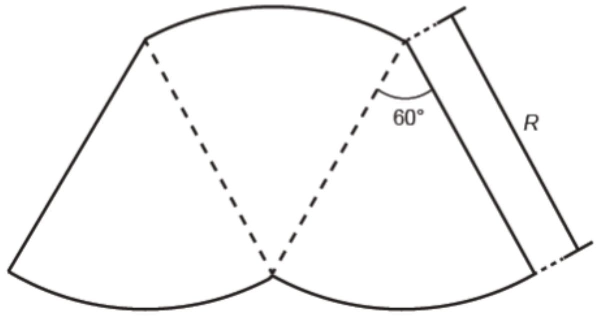
• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

Figura 27: Questão 165 (ENEM 2015)

QUESTÃO 165

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para *R*, em metros, deverá ser

A 16.
B 28.
C 29.
D 31.
E 49.

Fonte: INEP, 2015a, p. 27.

<u>Resolução da questão</u>

<u>Compreendendo o problema</u>

Qual é a incógnita?

O valor do raio R.

Quais são os dados?

A piscina é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a $60°$. O parque já possui uma piscina retangular com dimensões $50\,m \times 24\,m$.

Quais as condições apresentadas no problema?

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente e R deve ser um número natural maior possível.

<u>Construção de um Plano de Resolução</u>

Conhece uma questão igual ou parecida?

Caso os discentes se recordem de um questão parecida, pode-se perguntar:

É possível utilizar seu método ou resultado?

Caso não se lembre de uma questão parecida, deve-se continuar o questionamento.

É possível calcular a área da nova piscina com os dados fornecidos?

Presume-se que os discentes, em algum momento, estudaram sobre área da circunferência ou setor circular e poderão encontrar a área da nova piscina em função de R.

Todas as informações fornecidas na questão foram usadas?

Este questionamento objetiva direcionar a atenção do discente para a relação que existe entre as áreas das piscinas, retangular e nova. Caso os discentes encontrem alguma dificuldade em perceber a relação, pode-se indagá-los:

De acordo com o problema, qual é a relação entre a área das duas piscinas?

Ao verificar que a área da nova piscina deve ser menor que a da piscina já existente, terá condições de encontrar o valor de R.

<u>Execução do Plano</u>

Sabendo que a área da nova piscina é igual a três vezes a área do setor circular de ângulo central $60°$ e raio R, tem-se que a área da nova piscina é:

$3 \cdot \left(\frac{60°}{360°} \cdot \pi R^2\right) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3R^2 = \frac{3}{2}R^2.$

Calculando a área da piscina retangular tem-se: $50 \cdot 24 = 1200\, m^2$.

Como a nova piscina deve ter área menor que a piscina retangular, tem-se:

$\frac{3}{2}R^2 < 1200 \quad \Rightarrow \quad R^2 < 800 \quad \Rightarrow \quad R < 28,284271.$

Segundo as condições da questão $R = 28$.

É possível verificar que cada passo está correto?

Cada passo deve ser verificado. Acredita-se que os alunos tenham como pré-requisito o domínio de cálculos básicos.

<u>Retrospecto</u> (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Ao substituir o valor encontrado para R, as condições da questão devem ser satisfeitas.

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

Discutir em sala os outros métodos pensados pela turma.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

É uma oportunidade para a turma refletir e exemplificar em quais situações pode-se usar o mesmo método ou resultado.

4.3 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma - H8

Questão 164 (ENEM 2009)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

<u>Investigação e compreensão</u>

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema estruturador 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

• Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.

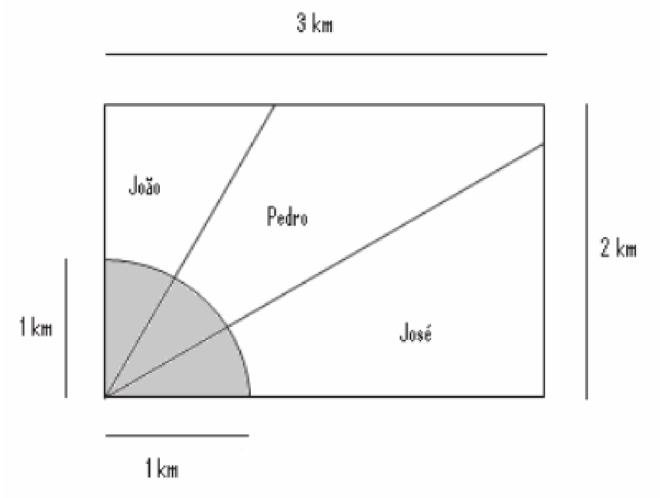
Tema estruturador 1 Álgebra: números e funções

Unidade temática Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.

Figura 28: Questão 164 (ENEM 2009)

Questão 164

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$)

A 50%.
B 43%.
C 37%.
D 33%.
E 19%.

Fonte: INEP, 2009, p. 26.

<u>Resolução da questão</u>

<u>Compreendendo o problema</u>

Qual é a incógnita?

A área do terreno que coube a João.

Quais são os dados?

O terreno é retangular com medidas $3\,km$ e $2\,km$ e tem uma área de extração de ouro delimitada por $\frac{1}{4}$ de círculo de raio $1\,km$, localizado no canto inferior esquerdo da propriedade.

Qual é a condição?

Que o terreno fosse dividido de modo que a área de extração de ouro fosse repartida igualmente entre os irmãos.

<u>Construção de um Plano de Resolução</u>

Recorda-se de uma questão igual ou semelhante?

Provavelmente os alunos já resolveram questões onde era preciso encontrar área de um triângulo retângulo.

Com os dados fornecidos na questão pode-se calcular a área do terreno de João?

Os alunos poderão perceber que é necessário encontrar uma informação auxiliar para se chegar à resolução da questão, ou seja, deve-se saber a medida do lado menor do triângulo que representa a parte do terreno que cabe a João.

Na parte do terreno que cabe a João a medida do lado menor do triângulo é um elemento auxiliar para encontrar a incógnita. Defina uma notação adequada para representar a medida do lado menor do terreno de João e sua área.

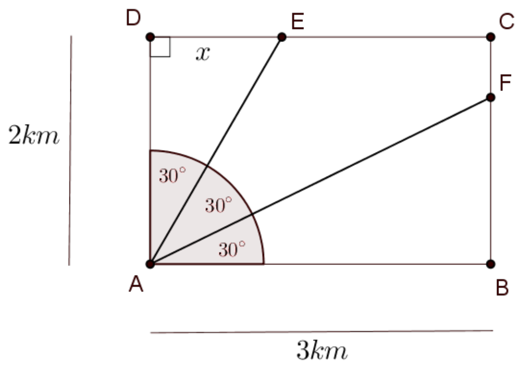
Tomando x para o lado menor do triângulo e S para a área deste triângulo.

O que é possível dizer da área de extração de ouro que coube a cada irmão? E do ângulo?

A área de extração de ouro será $\frac{1}{3}$ de um quarto de círculo de raio 1 km, ou seja, cada irmão ficou com uma área de extração com formato de um setor circular de ângulo central igual a $30°$.

Trace uma figura com as informações até o momento.

Figura 29: Terreno retangular $ABCD$



Fonte: Feita pelo autor.

Que relação os dados têm com a incógnita?

S é a área do triângulo ADE, $2\,km$ e x são a altura e a base do triângulo que representa a parte do terreno que coube a João.

Para resolver o problema será necessário encontrar o valor de x. É possível obter o valor de x utilizando os dados fornecidos pelo problema?

Tem-se a medida de um dos lados e o ângulo formado entre este lado e um dos lados desconhecidos.

Conhece um problema parecido? É possível utilizá-lo?

Os discentes poderão usar seus conhecimentos sobre trigonometria no triângulo retângulo. O triângulo ADE é retângulo e pode-se utilizar a tangente do ângulo de $30°$.

Para os discentes com mais dificuldade em recordar sobre a trigonometria no triângulo retângulo, será preciso ser mais específico. Pode-se indagá-los:

No triângulo retângulo ADE identifique catetos e hipotenusa. Considerando o ângulo de $30°$ o que pode-se dizer dos segmentos 2 e x? Analisando o triângulo em questão e as informações de ângulo de $30°$, cateto oposto e cateto adjacente, é possível calcular o valor de x?

Execução do Plano

No triâgulo ADE, tem-se $\overline{AD} = 2$, $\overline{DE} = x$, e $E\hat{A}D = 30°$. Encontra-se a medida x, fazendo:

$tg\,30° = \frac{x}{2}$, sabendo que $tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$, tem-se que $0,58 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1,16$

Encontrando a área do terreno que coube a João:

$S = \frac{(1,16)\cdot 2}{2} = 1,16\,km^2$

Sabendo que a área total do terreno herdado é $2 \cdot 3 = 6\,km^2$ tem-se que $\frac{1,16}{6} \approx 0,1933 = 19,33\%$ é a porcentagem da área do terreno que coube a João.

É possível verificar que cada passo está correto?

Como os cálculos efetuados são básicos, é possível que os discentes não tenham dificuldade na verificação dos passos.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

O professor pode propor que seja encontrada a área dos demais herdeiros.

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

Esta parece ser uma resolução simples, mas pode-se encontrar a área do triângulo fazendo o produto de $\frac{1}{2}$, $\overline{AE}$, 2 e o seno do ângulo entre estes segmentos. O professor deve valorizar e discutir em sala todos os caminhos diferentes encontrados.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Estimular a turma a exemplificar outras situações-problema onde o método ou resultado pode ser usado.

Questão 172 (ENEM 2010, 2ª aplicação)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema estruturador 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

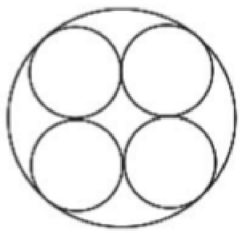
Unidade temática Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

• Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.

Figura 30: Questão 172 (ENEM 2010, 2ª aplicação)

Questão 172

Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior.



Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos.

Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a

Ⓐ 12 cm.

Ⓑ $12\sqrt{2}$ cm.

Ⓒ $24\sqrt{2}$ cm.

Ⓓ $6(1+\sqrt{2})$ cm.

Ⓔ $12(1+\sqrt{2})$ cm.

Fonte: INEP, 2010b, p. 28.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O raio do tubo cilíndrico maior (R).

Quais são os dados?

O valor do raio dos tubos cilíndricos menores $(r = 6\,cm)$.

Quais as condições apresentadas no problema?

Os quatro tubos cilíndricos menores estão acondicionados perfeitamente em um tubo cilíndrico de raio maior, ou seja, o aluno deve perceber que os tubos cilíndricos de raio menor tangenciam o tubo cilíndrico de raio maior e se tangenciam, de acordo com a figura.

É importante esboçar a figura.

Construção de um Plano de Resolução

Na figura, adicione a incógnita e os dados fornecidos pelo problema (inicialmente aconselha-se não utilizar o valor numérico de r).

Conhece um problema igual ou semelhante?

Se sim, indagar: *É possível utilizar seu método ou resultado?*

Se não, continuar.

Quais pontos são possíveis de serem marcados na figura?

Os centros dos círculos e os pontos de tangência podem ser marcados na figura. São pontos auxiliares importantes na construção da resolução que devem ser notados pelos discentes.

Observando os raios dos tubos cilíndricos, o maior (R) e o menor (r), existe uma relação entre eles?

É possível utilizar um elemento auxiliar para expressar esta relação?

Adota-se uma outra incógnita x, e encontrando o seu valor é possível chegar à solução do problema.

Analise a figura pensando também na nova incógnita.

Caso os discentes não observem que os centros dos círculos de raio menor formam um quadrado de lado $2r$ ou quatro quadrados de lado r, eles podem ser provocados:

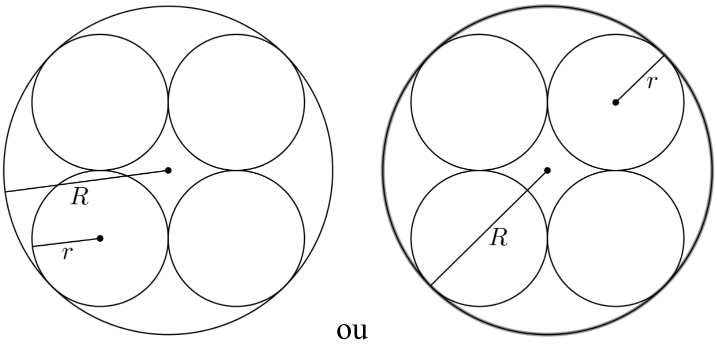
Explorando os pontos: centro dos círculos e pontos de tangência, o que pode-se observar?

Execução do Plano

A análise das figuras é de suma importância.

Adicionando os dados fornecidos pelo problema e a incógnita:

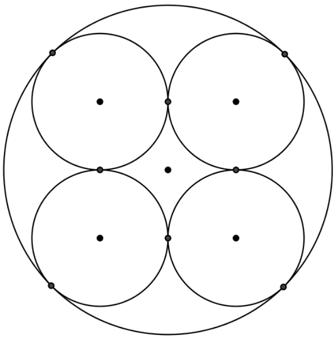
Figura 31: Destaque aos raios dos tubos cilíndricos



Fonte: Feita pelo autor.

Marcando pontos importantes implícitos na figura, os centros dos círculos e os pontos de tangência entre eles:

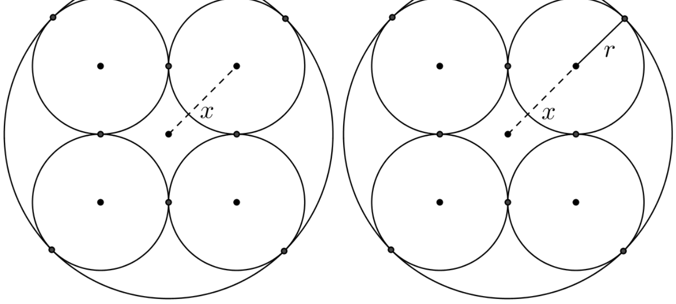
Figura 32: Destaque aos pontos implícitos na figura



Fonte: Feita pelo autor.

Uma relação que o aluno poderá notar rapidamente entre R e r é que $R > r$, mas analisando a situação com mais atenção, percebe-se que é possível acrescentar um segmento auxiliar x, de modo que a relação entre eles seja $R = r + x$.

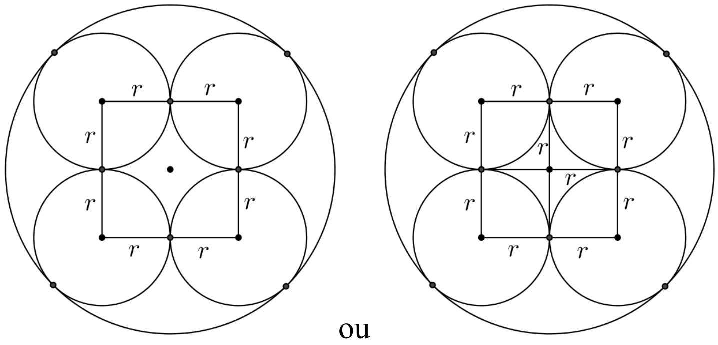
Figura 33: Acrescentando o segmento auxiliar x



Fonte: Feita pelo autor.

Obtendo-se o valor da nova incógnita x, é possível chegar à solução do problema. Continuando a análise da situação-problema pensando na nova incógnita x, tem-se:

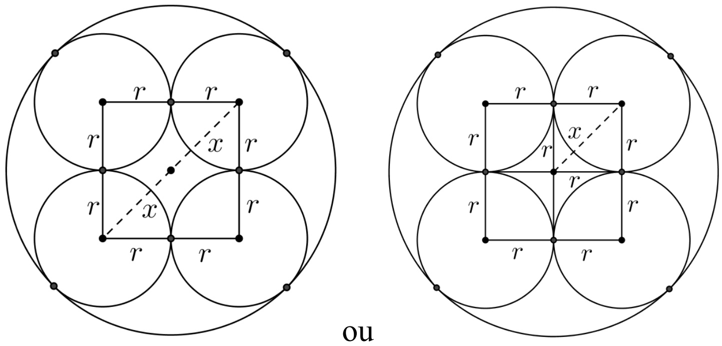
Figura 34: Explorando os centros dos tubos



Fonte: Feita pelo autor.

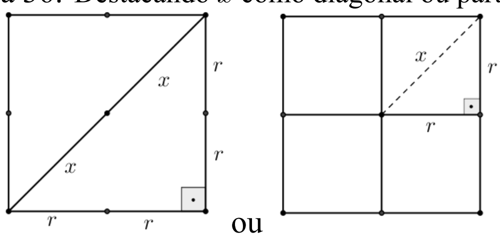
O discente pode encontrar o valor da incógnita x. Ela pode ser a metade da diagonal do quadrado de lado $2r$ ou a diagonal do quadrado de lado r.

Figura 35: Destacando os segmentos de tamanho x



Fonte: Feita pelo autor.

Figura 36: Destacando x como diagonal ou parte dela



Fonte: Feita pelo autor.

Daí tem-se que:

$(2x)^2 = (2r)^2 + (2r)^2$

$4x^2 = 4r^2 + 4r^2$

$x^2 = \frac{8r^2}{4}$

$x = r\sqrt{2}$, ou seja, $x = 6\sqrt{2}$ e o raio do tubo cilíndrico maior $R = 6 + 6\sqrt{2} = 6\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

É possível verificar se cada passo está correto?

O aluno deve verificar os cálculos relativos a cada passo.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Estando correto o valor do segmento auxiliar x, um cálculo básico verifica o resultado.

É possível chegar ao resultado por outro caminho?

Outros tipos de solução ou estratégias devem ser valorizadas e discutidas pelo professor com a turma.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

A turma deve discutir sobre em quais situações este método ou solução pode ser usado novamente.

Questão 177 (ENEM 2010, 2ª aplicação)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

• Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.

Unidade temática Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

• Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.

Figura 37: Questão 177 (ENEM 2010, 2ª aplicação)

Questão 177

Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade.

Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem.

Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (h)?

Ⓐ $a = \frac{h}{12}$

Ⓑ $a = \frac{h}{6}$

Ⓒ $a = \frac{2h}{3}$

Ⓓ $a = \frac{4h}{3}$

Ⓔ $a = \frac{4h}{9}$

Fonte: INEP, 2010b, p. 30.

<u>Resolução da questão</u>

<u>Compreendendo o problema</u>

Qual é a incógnita?

A altura da nova embalagem (a) em função da altura da embalagem tradicional.

Quais são os dados?

As embalagens são cilíndricas; a embalagem tradicional tem altura (h); o raio da nova embalagem é a metade do raio da embalagem tradicional.

Quais são as condições?

O volume da nova embalagem é um terço da tradicional.

<u>Construção de um Plano de Resolução</u>

Já viu algum problema igual ou parecido?

Caso não seja possível recorrer a um problema parecido, pressupõe-se que os discentes consigam aplicar a fórmula de volume de um cilindro.

Considere os dados e a incógnita procurada. É possível descrever o volume de cada recipiente?

Se preciso, os alunos devem ser orientados a utilizar notação adequada, esboçando os volumes das embalagens tradicional e nova em função do raio (R) e respectivas alturas.

Qual a relação entre os dois recipientes?

Se não for lembrada a condição da embalagem nova ter um terço da capacidade da embalagem antiga, sugerir ao discente que leia o problema novamente.

Se ainda assim não for lembrada, questione:

Utilizou todas as informações fornecidas no problema?

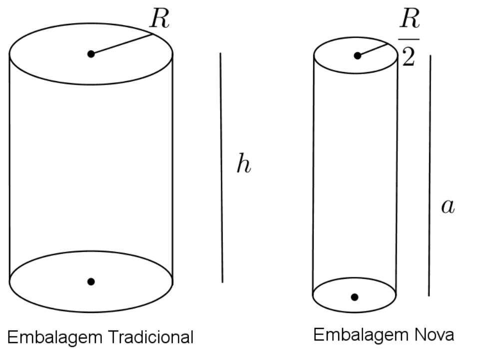
Ao perceber que o volume da nova embalagem é um terço da tradicional, e tendo descrito o volume dos recipientes, o discente terá as informações necessárias para resolver a questão. Caso encontre dificuldades, pode ser questionado:

Qual é a relação entre os volumes das embalagens tradicional e nova?

<u>Execução do Plano</u>

Esboço da figura do problema:

Figura 38: Esboço das embalagens cilíndricas



Fonte: Feita pelo Autor.

O volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura. Sabendo que a área da base é $\pi \cdot (raio)^2$, temos:

Volume da embalagem tradicional $V_T = \pi\ R^2 \cdot h$;

Volume da embalagem nova $V_N = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot a$.

Como $\frac{1}{3}V_T = V_N$ Tem-se que

$\frac{1}{3}\pi\ R^2 \cdot h = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot a$

$\frac{1}{3}\pi\ R^2 h = \frac{1}{4}\pi\ R^2 a$

$\frac{1}{3}h = \frac{1}{4}\ a$

$\frac{4}{3}h = a$

É possível verificar se os passos estão corretos?

O aluno deve ser orientado a verificar cada passo.

<u>Retrospecto</u> (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Os discente podem utilizar $a = \frac{4}{3}h$ na fórmula do volume da embalagem nova $\left(V_N = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 a\right)$ para obter $\frac{1}{3}V_T$.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Deve-se incentivar os discentes a investigarem outras situações em que o método ou o resultado podem ser utilizados.

Questão 178 (ENEM 2013)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

<u>Investigação e compreensão</u>

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

<u>Contextualização sócio-cultural</u>

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

<u>Tema estruturador 2 Geometria e medidas</u>

<u>Unidade temática Geometria plana</u>: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

<u>Unidade temática Geometria espacial</u>: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

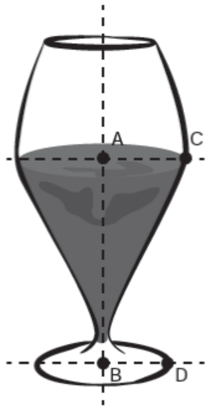
• Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.

• Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

Figura 39: Questão 178 (ENEM 2013)

QUESTÃO 178

Um restaurante utiliza, para servir bebidas, bandejas com bases quadradas. Todos os copos desse restaurante têm o formato representado na figura:



Considere que $\overline{AC} = \frac{7}{5}\overline{BD}$ e que l é a medida de um dos lados da base da bandeja.

Qual deve ser o menor valor da razão $\frac{l}{BD}$ para que uma bandeja tenha capacidade de portar exatamente quatro copos de uma só vez?

- **A** 2
- **B** $\frac{14}{5}$
- **C** 4
- **D** $\frac{24}{5}$
- **E** $\frac{28}{5}$

Fonte: INEP, 2013, p. 31.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O menor valor da razão $\frac{l}{BD}$.

Quais são os dados?

$\overline{AC} = \frac{7}{5}\overline{BD}$ e o lado da bandeja quadrada vale l.

Quais são as condições?

A bandeja deve ter a capacidade de portar exatamente 4 copos de uma só vez.

Construção de um Plano de Resolução

Já viu algum problema igual ou parecido?

Os alunos podem não se lembrar de um problema parecido.

É muito importante uma análise da figura da situação do problema.

O que deve acontecer para que a razão $\frac{l}{BD}$ *seja a menor?*

As bases dos copos devem estar o mais próximas possível, mas caso algum discente considerar as bases tangentes, pode-se propor:

Considere as informações que o problema forneceu sobre o copo. Faça um esboço de como as bases dos 4 copos poderiam estar na bandeja, em uma visão de cima.

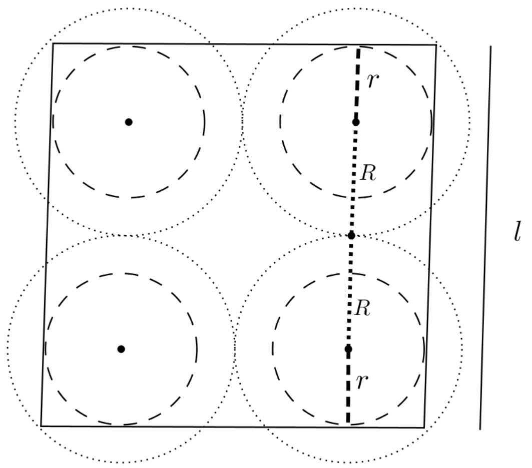
Isso pode possibilitar que os discentes visualizem que as bases dos copos não podem estar tangentes, pois a largura do meio do copo impede tal situação.

Segundo as informações obtidas até o momento, que relação existe entre a medida do lado da bandeja e o raio da base circular do copo?

<ins>Execução do Plano</ins>

Esboço da situação do problema, considerando que as bases dos copos não podem estar tangentes, pois o raio do meio do copo é maior que o raio da base.

Figura 40: Esboço da base dos copos na bandeja



Fonte: Feita pelo autor.

Tomando $\overline{BD} = r$, $\overline{AC} = R$ e observando que na parte interna da bandeja a distância entre os centros das bases dos copos mais próximos é dada por $2R$ tem-se:

$l = 2r + 2R$, sabendo que $R = \frac{7}{5} \cdot r$,

$l = 2r + 2 \cdot \left(\frac{7}{5}r\right)$

$l = 2r + \frac{14}{5}r$

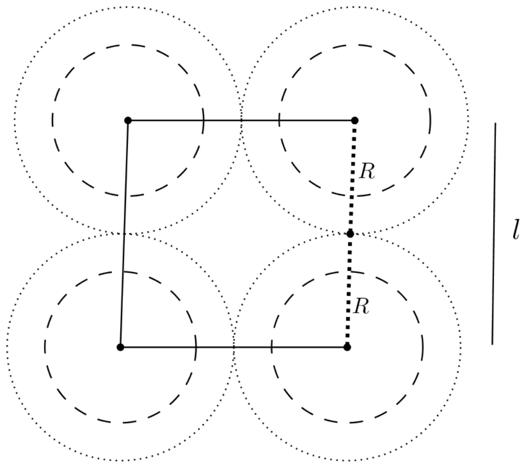
$l = \frac{24}{5}r$

$\dfrac{l}{r} = \frac{24}{5} \Rightarrow \frac{l}{\overline{BD}} = \frac{24}{5}.$

É possível verificar se os passos estão corretos?

Cada passo pode ser analisado com atenção, para evitar erros, mas há uma possibilidade não usual onde as bases dos copos não estão completamente dentro da bandeja e os copos podem ser equilibrados em uma bandeja de comprimento $l = 2R$, conforme figura abaixo:

Figura 41: Uma possibilidade não usual



Fonte: Feita pelo autor.

Neste caso tem-se:

$l = 2R$, sabendo que $R = \frac{7}{5} \cdot r$,

$l = 2 \cdot \frac{7}{5}r$

$l = \frac{14}{5}r$

$\frac{l}{r} = \frac{14}{5} \;\Rightarrow\; \frac{l}{BD} = \frac{14}{5}$.

A resposta correta segundo o gabarito oficial é $\frac{l}{BD} = \frac{24}{5}$.

A segunda interpretação poderia ser evitada se, no enunciado da questão, a pergunta especificasse que a bandeja deveria conter a base dos quatro copos.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Sim, considerando que o caso da solução não usual pode ser descartada. Uma vez que trata-se de uma situação em que os copos devem ser equilibrados e é uma situação atípica, tem-se que a razão $\frac{24}{5}$ é a menor possível estando as bases dos copos na bandeja.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os discentes devem descrever outras situações em que este mesmo raciocínio possa ser usado.

Questão 161 (ENEM 2015, 2ª aplicação)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

• Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.

Figura 42: Questão 161 (ENEM 2015, 2ª aplicação)

QUESTÃO 161

Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

(A) 1,44
(B) 6,00
(C) 7,20
(D) 8,64
(E) 36,00

Fonte: INEP, 2015b, p. 26.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

A profundidade do poço, ou seja, a altura do cilindro circular reto.

Quais são os dados?

O poço tem o formato de um cilindro circular reto. Toda terra retirada é amontoada em forma de um cone circular reto de altura $2,4$ metros e com raio de base igual ao triplo do raio da base do poço.

Quais são as condições?

O volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico.

Construção de um Plano de Resolução

Já viu alguma questão igual ou parecida?

Os discentes podem não se lembrar de uma questão parecida, mas devem estar aptos a calcular o volume de um cone e/ou o volume de um cilindro.

Com as informações da questão, é possível calcular o volume do cilindro e o volume do cone?

O aluno poderá descrever o volume do cone em função do raio do cilindro e o volume do cilindro em função de seu raio e altura.

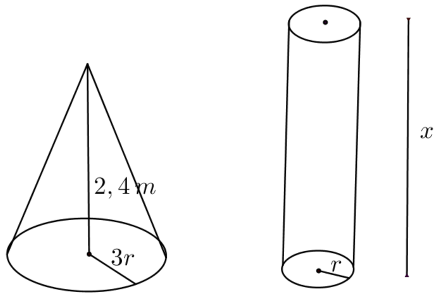
Existe alguma informação que relacione estes dois volumes?

Este questionamento pode chamar a atenção do discente para o fato do volume do cone ser 20% maior que o do cilindro, o que pode induzi-lo a comparar estes volumes.

Execução do Plano

Faça o esboço da situação da questão.

Figura 43: Esboço do cone e do cilindro



Fonte: Feita pelo autor.

Cálculo do volume do cone, $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi\,(3r)^2 \cdot 2,4 = 7,2\pi r^2$.

Cálculo do volume do cilindro, $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot x$.

Tem-se que $V_{cone} = 1,2 \cdot V_{cilindro}$

$7,2\pi r^2 = 1,2\pi r^2 x$

$\frac{7,2\pi r^2}{1,2\pi r^2} = x$

$6 = x$

É possível verificar se os passos estão corretos?

Cada passo deve ser feito com atenção para evitar erros.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Ao substituir o valor encontrado para a altura do cilindro (x) na expressão que fornece o volume do cilindro, o discente poderá observar se o volume do cone é realmente 20% maior.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os alunos devem descrever outras situações em que é possível utilizar este método ou resultado.

Questão 137 (ENEM 2015)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema estruturador 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

Figura 44: Questão 137 (ENEM 2015)

QUESTÃO 137

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

Ⓐ 18.
Ⓑ 26.
Ⓒ 30.
Ⓓ 35.
Ⓔ 60.

Fonte: INEP, 2015a, p. 19.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O raio do tampo de vidro circular.

Quais são os dados?

O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo $30\,cm$.

Quais são as condições?

Procura-se o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Construção de um Plano de Resolução

Conhece um problema igual ou parecido?

Caso os alunos não se recordem de um problema parecido, deve-se continuar as sugestões e/ou indagações.

De acordo com os dados fornecidos, faça um esboço da situação do problema.

Os alunos poderão perceber que o raio procurado deve ser maior ou igual ao raio de um círculo que contém os vértices do triângulo equilátero, ou seja, maior ou igual ao raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero.

Para os demais questionamentos é importante que os discentes se recordem, pelo menos do básico, sobre pontos notáveis do triângulo, suas propriedades e inscrição e circunscrição de polígonos. Para tanto, o professor pode trabalhar o assunto em aulas anteriores, por meio de atividade extra que estimule a busca desse conhecimento.

O que sabe sobre círculo circunscrito ao triângulo?

Seu centro é o circuncentro do triângulo.

O que pode-se afirmar sobre os pontos notáveis de um triângulo equilátero?

São coincidentes.

Observe o esboço da situação do problema, com destaque às medianas, mediatrizes, alturas e medidas dos lados do triângulo. É possível calcular o raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero?

O discente não encontrará diretamente o valor do raio, mas poderá notar que usando o Teorema de Pitágoras encontrará o valor da mediana ou da altura do triângulo em questão.

Qual outro ponto notável do triângulo pode ajudar a encontrar o raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero?

O aluno poderá responder baricentro, caso se lembre de sua propriedade. Caso contrário, o questionamento pode ser mais específico.

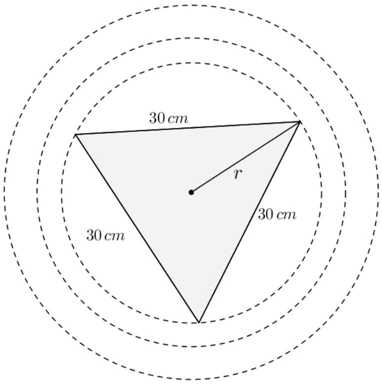
O que você lembra sobre o baricentro?

Informar que é o ponto de interseção das medianas de um triângulo não é suficiente. Os discentes devem se lembrar da sua propriedade de dividir as medianas em dois segmentos, onde o segmento que une o vértice ao baricentro vale $\frac{2}{3}$ da mesma.

Execução do Plano

Esboço da situação do problema:

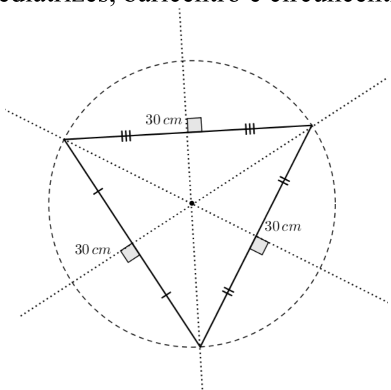
Figura 45: Visão de cima do suporte da mesa e possíveis tampos



Fonte: Feita pelo autor.

Como o raio procurado deve ser maior ou igual ao raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero, e no triângulo equilátero o circuncentro e o baricentro são coincidentes, tem-se:

Figura 46: Medianas, mediatrizes, baricentro e circuncentro do triângulo equilátero



Fonte: Feita pelo autor.

A mediana(y) do triângulo equilátero em questão pode ser encontrada: $30^2 = y^2 + 15^2 \;\Rightarrow\; 900 = y^2 + 225 \;\Rightarrow\; y = 15\sqrt{3} = 25,5$, considerando $\sqrt{3} = 1,7$.

Sabendo que o baricentro divide as medianas em dois segmentos, onde o segmento que une o vértice ao baricentro vale $\frac{2}{3}$ da mesma, tem-se que $r = \frac{2}{3} \cdot 25,5 = 17$. Logo o raio do tampo de vidro circular deve ser maior ou igual a $17\,cm$.

É possível verificar se os passos estão corretos?

Os passos devem ser feitos com atenção para minimizar o erro. O professor pode apresentar ou propor a demonstração da propriedade do baricentro.

<u>Retrospecto</u> (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

Como a questão depende de cálculos básicos, o resultado estará correto se os cálculos em cada passo estiverem certos.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os alunos devem descrever em que outras situações podem utilizar o mesmo método ou resultado.

Questão 161 (ENEM 2015)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

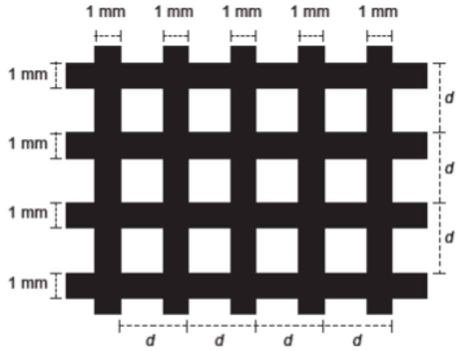
• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

Figura 47: Questão 161 (ENEM 2015)

QUESTÃO 161

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d – 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.

A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

A 2

B 1

C $\frac{11}{3}$

D $\frac{4}{3}$

E $\frac{2}{3}$

Fonte: INEP, 2015a, p. 26.

<u>Resolução da questão</u>

<u>Compreendendo o problema</u>

Qual é a incógnita?

A medida d em milímetros.

Quais são os dados?

Uma malha de proteção solar consiste em fitas plásticas de 1 milímetro de largura, entrelaçadas perpendicularmente nas direções vertical e horizontal, tal que a distância entre elas é de $(d-1)$ milímetros. A malha de proteção solar deve ser aplicada em um vidro retangular de $5m$ de largura por $9\,m$ de comprimento.

Quais são as condições?

Sabendo que a taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro, a taxa de cobertura da malha deve ser de 75%.

Construção de um Plano de Resolução

Já viu algum problema igual ou parecido?

Caso os discentes não se recordem de um problema semelhante, continuar a questionar.

Que relação os dados fornecidos têm com a incógnita?

Os discentes poderão perceber que, com as informações do problema, é possível encontrar a área total do vidro e o valor da área que deve bloquear a passagem da luz.

Se não for possível resolver o problema proposto, procure antes resolver um problema análogo mais simples, com o tamanho do vidro menor.

Se a dificuldade permanecer, a sugestão pode ser mais específica:

Se o vidro em questão tivesse forma quadrada de medida de lado igual a d milímetros?

Faça um esboço da nova situação.

Encontrando a solução neste caso, pode-se considerar o vidro de medidas $5\,m \times 9\,m$ dividido em quadradinhos de lados iguais a $d\,mm$.

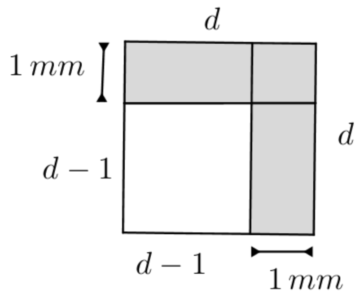
Segundo as informações do problema, da área total do vidro, que percentual deve bloquear a passagem da luz?

75%.

Execução do Plano

Dividindo toda a área do vidro em questão em quadradinhos de lados $d\,mm$ e considerando que cada quadradinho possui uma fita de $1\,mm$ tanto na horizontal quanto na vertical, segundo Figura abaixo.

Figura 48: Vidro quadrado de lado d milímetros



Fonte: Feita pelo autor.

Como a taxa de cobertura é 75%, tem-se que apenas 25% da área do vidro deixa passar a luz. Sabendo que a luz passa pelo quadrado de lado $(d-1)$, tem-se:

$\frac{(d-1)^2}{d^2} = 0,25 \;\Rightarrow\; \left(\frac{d-1}{d}\right)^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \sqrt{\left(\frac{d-1}{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; \frac{d-1}{d} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; d = 2.$

É possível verificar se os passos estão corretos?

O aluno deve ser estimulado a verificar se cada passo está correto.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível verificar o resultado?

A verificação da porcentagem de cobertura do quadradinho e a confirmação de que é possível dividir o vidro retangular de medidas $5\,m \times 9\,m$ em quadradinho de d milímetros, verifica o resultado.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os alunos devem ser encorajados a exemplificar outros problemas em que é possível usar o mesmo resultado ou método.

4.4 Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano - H9

Questão 177 (ENEM 2009)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

• Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.

Figura 49: Questão 177 (ENEM 2009)

Questão 177

Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

A Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

B Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

C Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

D O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

E O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

Fonte: INEP, 2009, p. 30.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

Um argumento capaz de justificar uma peça que tenha uma das faces pentagonal.

Quais são os dados?

A pirâmide tem base quadrada.

Quais as condições apresentadas no problema?

O artesão constrói peças interceptando a pirâmide com um plano.

Imagine tal situação e se possível faça um esboço.

Construção de um Plano de Resolução

Já viu um problema igual ou parecido?

Os discentes podem não se lembrar de um problema semelhante.

Imaginar ou fazer o esboço da situação do problema é essencial para visualizar as possíveis peças que podem ser feitas pela interseção da pirâmide com um plano.

Alguns questionamentos podem ajudar os alunos a visualizar as possíveis peças:

Quais as características de uma pirâmide de base quadrada?

Quantas faces ela tem?

A pirâmide é reta ou oblíqua?

Quais as possíveis posições entre o plano e a base da pirâmide?

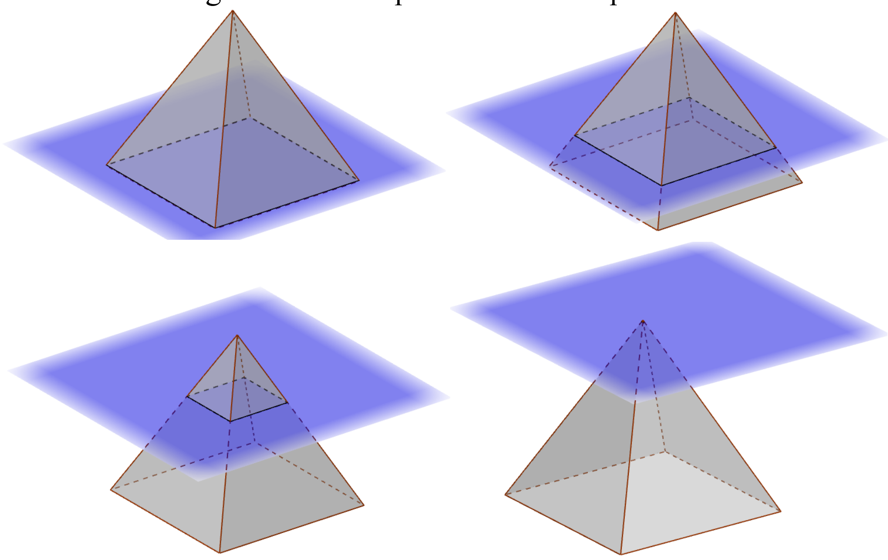
O que se obtém da interseção de dois planos distintos?

Execução do Plano

Os alunos devem observar que a questão não define a pirâmide como reta ou oblíqua. Portanto pode-se considerar qualquer uma ou ambas. O plano pode interceptar a pirâmide segundo três posições em relação a sua base: paralela, perpendicular ou oblíqua.

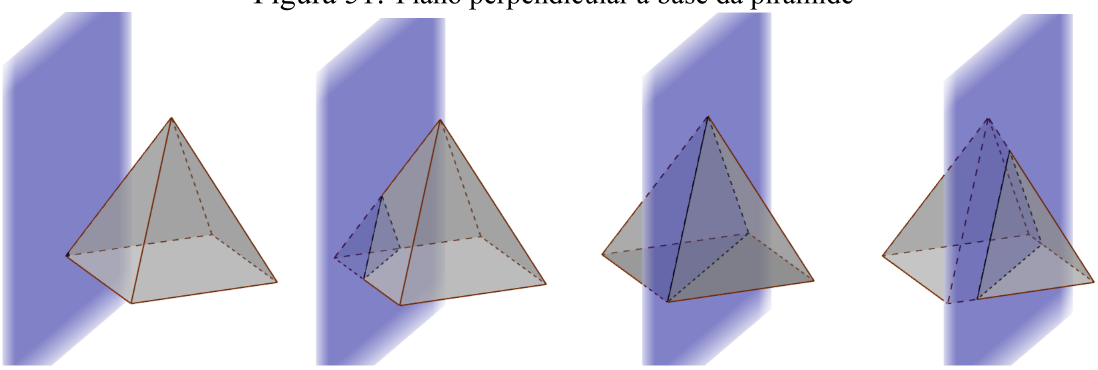
Esboço de possíveis interseções entre um plano e a pirâmide:

Figura 50: Plano paralelo à base da pirâmide



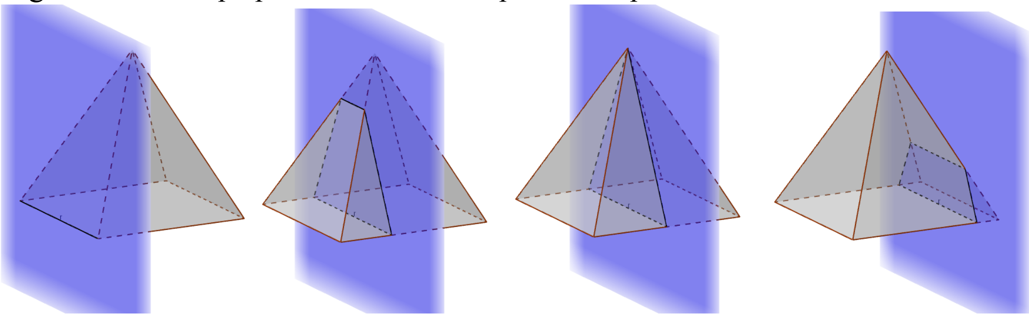
Fonte: Feita pelo autor.

Figura 51: Plano perpendicular à base da pirâmide



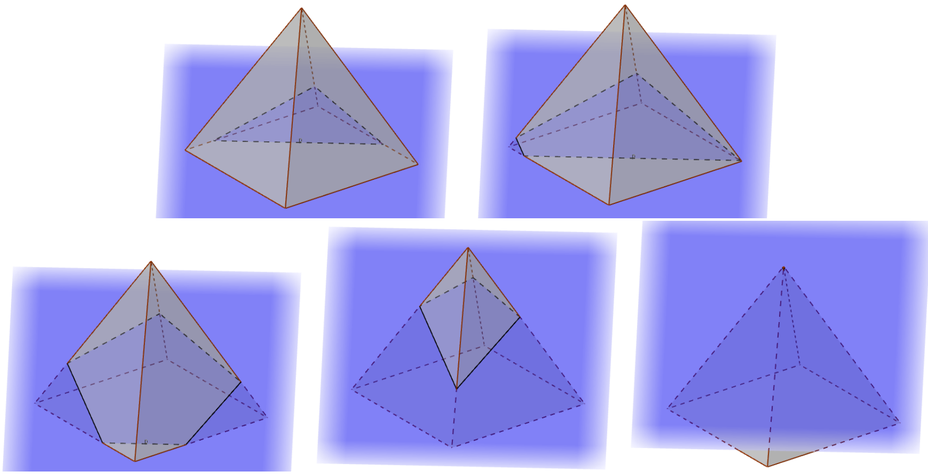
Fonte: Feita pelo autor.

Figura 52: Plano perpendicular à base da pirâmide e paralelo a uma das arestas da base



Fonte: Feita pelo autor.

Figura 53: Plano oblíquo à base da pirâmide



Fonte: Feita pelo autor.

Nesta questão, recomenda-se que o professor faça uso de um *software* de geometria dinâmico, para proporcionar aos discentes uma exata compreensão da situação do problema.

Retrospecto (examinando a solução)

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os discentes podem citar exemplos de situações em que o método ou o resultado podem ser usados.

A visualização da situação do problema por meio de um *software* de geometria dinâmico pode nortear o aluno em situações similares onde não seja possível a utilização deste recurso.

Questão 161 (ENEM 2010)

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema Estruturador 2. Geometria e medidas

Unidade Temática - 1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

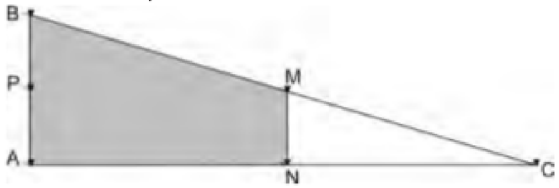
• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.

Figura 54: Questão 161 (ENEM 2010)

Questão 161

Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

A à mesma área do triângulo AMC.
B à mesma área do triângulo BNC.
C à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D ao dobro da área do triângulo MNC.
E ao triplo da área do triângulo MNC.

Fonte: INEP, 2010a, p. 26.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a hipótese?

O triângulo ABC é retângulo em A e tem os pontos M, N e P como pontos médios dos segmentos BC, AC e AB respectivamente.

Qual é a conclusão?

Nesta questão cada alternativa é uma conclusão que precisa ser analisada:

(a) A área a ser calçada corresponde à mesma área do triângulo AMC;

(b) A área a ser calçada corresponde à mesma área do triângulo BNC;

(c) A área a ser calçada corresponde à metade da área formada pelo triângulo ABC;

(d) A área a ser calçada corresponde ao dobro da área do triângulo MNC;

(e) A área a ser calçada corresponde ao triplo da área do triângulo MNC.

Trace a figura. Adote notações adequadas.

Construção de um Plano de Resolução

Os discentes devem analisar hipótese e conclusão para cada alternativa e traçar a figura relativa às informações para cada alternativa.

Alternativa (a) - A área a ser calçada corresponde à mesma área do triângulo AMC.

Com as informações da hipótese é possível tal conclusão?

O discente poderá notar que não se tem nenhuma informação explícita sobre a área dos polígonos em questão.

Conhece alguma propriedade ou teorema que possa fornecer mais alguma informação?

O teorema da base média do triângulo e a propriedade da mediana relativa a hipotenusa no triângulo retângulo, são importantes na resolução do problema. Recomenda-se que os alunos tenham trabalhado com tais assuntos em um passado não muito distante.

Caso o aluno não lembre do teorema e/ou da propriedade, o questionamento pode ficar um pouco mais específico:

A hipótese fala de um triângulo e os pontos médios dos seus lados. Lembra-se de algum teorema que use tais informações?

Será preciso acrescentar segmentos na figura para possibilitar a resolução. Caso os discentes não percebam essa necessidade, o professor pode sugerir ou questionar:

É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a resolução da questão?

Com os segmentos auxiliares PM e AM, o triângulo ABC fica dividido em quatro triângulos. A congruência de triângulos ou a observação de que triângulos de mesma base e mesma altura têm áreas iguais, levará o discente a perceber que a hipótese não permite tal conclusão.

Alternativa (b) - A área a ser calçada corresponde à mesma área do triângulo BNC. *Com as informações da hipótese é possível tal conclusão?*

Trace a figura com as informações que tem até o momento. Aproveite as informações da alternativa (a) que forem cabíveis. O que é possível perceber sobre os triângulos formados?

Dos três triângulos formados, um é comum a área a ser calçada e a área do triângulo BNC, o que obriga aos dois restantes terem a mesma área, o que levará o discente a perceber que a hipótese não permite tal conclusão.

Alternativa (c) - A área a ser calçada corresponde à metade da área formada pelo triângulo ABC. *Com as informações da hipótese é possível tal conclusão?*

A figura, o método e os resultados encontrados na alternativa (a) habilitam os alunos a mostrar que a hipótese não permite tal conclusão.

Alternativa (d) - A área a ser calçada corresponde ao dobro da área do triângulo MNC. *Com as informações da hipótese é possível tal conclusão?*

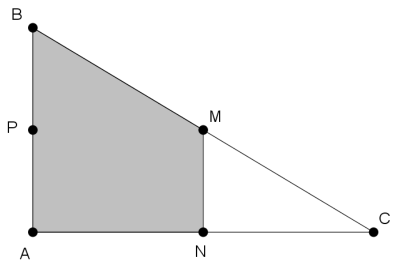
A figura, o método e os resultados encontrados na alternativa (a) habilitam os alunos a mostrar que a hipótese não permite tal conclusão.

Alternativa (e) - A área a ser calçada corresponde ao triplo da área do triângulo MNC. *Com as informações da hipótese é possível tal conclusão?*

A figura, o método e os resultados encontrados na alternativa (a) habilitam os alunos a mostrar que a hipótese permite tal conclusão.

Execução do Plano

Figura 55: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Feita pelo autor.

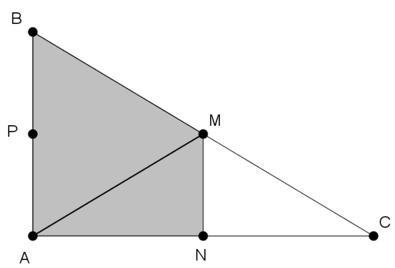
Analise hipótese e conclusão para cada alternativa.

Alternativa (a)

Hipótese: O triângulo ABC é retângulo em A, $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{AN} = \overline{NC}$.

Conclusão: Representando por S a área de um polígono, tem-se: $S_{ABMN} = S_{AMC}$

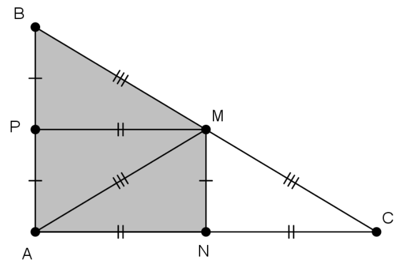
Figura 56: Representando o triângulo AMC



Fonte: Feita pelo autor.

Traçando um segmento auxiliar PM, o triângulo ABC fica dividido em 4 triângulos menores. Sabendo que a mediana relativa a hipotenusa no triângulo retângulo mede a medade da hipotenusa, obtem-se que $\overline{BM} \equiv \overline{MC} \equiv \overline{AM}$ e usando o Teorema da base média de um triângulo, tem-se que $\overline{MN} \equiv \overline{AP} \equiv \overline{PB}$, $\overline{PM} \equiv \overline{AN} \equiv \overline{NC}$ e $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ e $\overline{PM}$ // $\overline{AC}$.

Figura 57: Destaque aos segmentos congruentes



Fonte: Feita pelo autor.

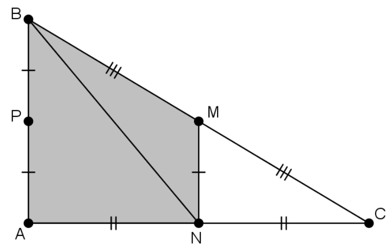
Daí, os triângulos $BMP \equiv AMP \equiv AMN \equiv CMN$ pelo caso de congruência de triângulos lado, lado, lado. Logo verifica-se que $S_{ABMN} \neq S_{AMC}$.

Alternativa (b)

Hipótese: O triângulo ABC é retângulo em A, $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{AN} = \overline{NC}$.

Conclusão: Representando por S a área de um polígono, tem-se: $S_{ABMN} = S_{BNC}$

Figura 58: Representando o triângulo BNC



Fonte: Feita pelo autor.

O triângulo ABC fica dividido em 3 triângulos menores, onde um deles é comum a área a ser calçada e a área do triângulo BNC.

$S_{ABMN} = S_{ABN} + S_{BMN}$ e $S_{BNC} = S_{BMN} + S_{CMN}$

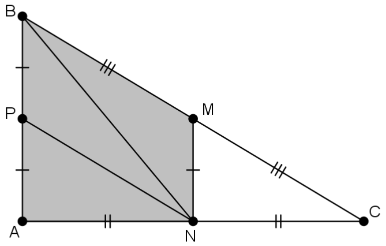
De acordo com a conclusão $S_{ABMN} = S_{BNC}$, daí tem-se que:

$S_{ABN} + S_{BMN} = S_{BMN} + S_{CMN}$

$S_{ABN} = S_{CMN}$, como os triângulos ABN e CMN tem bases iguais e alturas diferentes ou bases diferentes e alturas iguais, logo verifica-se que $S_{ABMN} \neq S_{BNC}$.

Outro modo de verificar esta diferença é traçando um segmento auxiliar PN. O triângulo ABC fica dividido em quatro triângulo menores APN, PNB, BNM, NMC de mesma área, pois tem bases e alturas de mesma medida.

Figura 59: Destaque ao segmento auxiliar PN



Fonte: Feita pelo autor.

Alternativa (c)

Hipótese: O triângulo ABC é retângulo em A, $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{AN} = \overline{NC}$.

Conclusão: Representando por S a área de um polígono, tem-se: $S_{ABMN} = \frac{S_{ABC}}{2}$.

Utilizando as informações obtidas na alternativa (a), é possível perceber que dentre os quatro triângulos congruentes que formam o triângulo ABC, a união de três deles forma o polígono$ABMN$.

Alternativa (d)

Hipótese: O triângulo ABC é retângulo em A, $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{AN} = \overline{NC}$.

Conclusão: Representando por S a área de um polígono, tem-se: $S_{ABMN} = 2 \cdot S_{MNC}$.

Utilizando as informações obtidas na alternativa (a), é possível perceber que a área do polígono $ABMN$, é composta por três dos quatro triângulos congruentes que formam o triângulo ABC, enquanto MNC é um dos quatro.

Alternativa (e)

Hipótese: O triângulo ABC é retângulo em A, $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{AN} = \overline{NC}$.

Conclusão: Representando por S a área de um polígono, tem-se: $S_{ABMN} = 3 \cdot S_{MNC}$.

Utilizando as informações obtidas na alternativa (a) e fazendo a mesma análise da alternativa anterior, percebe-se realmente que a área do polígono $ABMN$, é o triplo da área do triângulo MNC .

É possível demonstrar que cada passo está correto?

O professor pode propor aos discentes a demonstração da base média do triângulo.

Retrospecto (examinando a solução)

Dá para chegar ao resultado por outro caminho?

É importante valorizar outros métodos de se chegar ao resultado, discuti-los.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

O professor deve estimular a turma a dar exemplos de outros problemas onde este método ou resultado pode ser usado.

Questão 167 (ENEM 2016, 2ª aplicação)

De acordo com os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a questão trabalha as seguintes competências e habilidades:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

De acordo com os PCN+Ensino Médio, a questão contempla os seguintes conteúdos e habilidades:

Tema 2 Geometria e medidas

Unidade temática Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

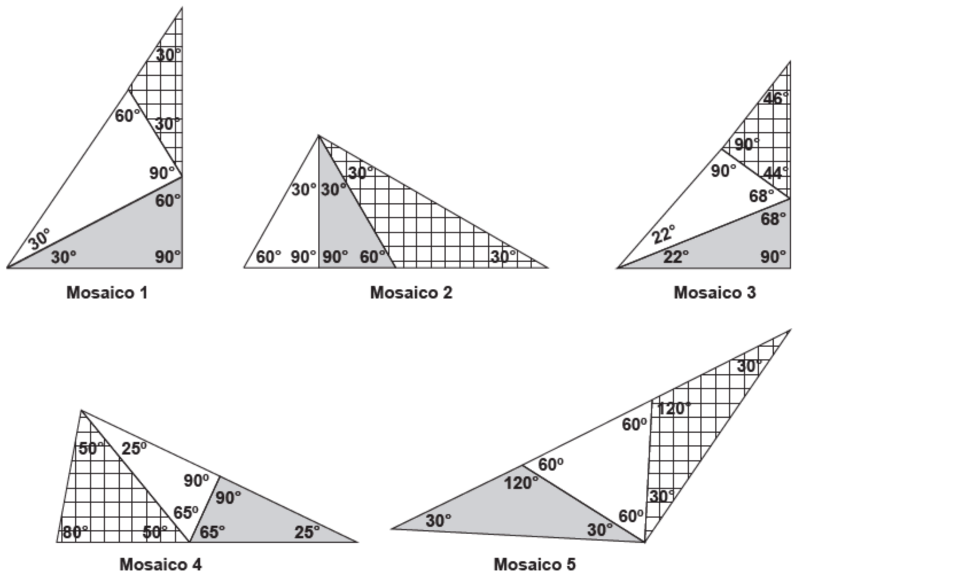
• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.

• Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.

Figura 60: Questão 167 (ENEM 2016, 2ª aplicação)

QUESTÃO 167

Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

- A 1.
- B 2.
- C 3.
- D 4.
- E 5.

Fonte: INEP, 2016, p. 27.

Resolução da questão

Compreendendo o problema

Qual é a incógnita?

O mosaico que tem as caracteristicas daquele que se pretende construir.

Quais são os dados?

Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo de três peças.

Quais as condições apresentadas no problema?

Das três peças, duas são triângulos retângulos congruentes e uma é triângulo isósceles.

Construção de um Plano de Resolução

O professor pode propor aos discentes analisar cada um dos cinco mosaicos e justificar os motivos de ser ou não o mosaico procurado.

Inicialmente pode-se questioná-los:

Segundo a questão, que características o mosaico e suas peças devem apresentar?

O discente deve estar ciente de quais são estas características do mosaico e de suas peças e saber reconhecê-las. Para isso, duas perguntas podem auxiliá-los:

Quais são as propriedades de um triângulo retângulo e de um triângulo isósceles?

O que você entende por triângulos congruentes?

Caso algum discente não se lembre das propriedades dos triângulos retângulos, isósceles e da congruência de triângulos, é uma oportunidade de recordar tais assuntos.

Pelo fato da figura da questão dar destaque aos ângulos, é possível que, ao analisar os mosaicos, a maioria dos discentes descartem inicialmente os três últimos mosaicos, pois não suprem todas as características quanto aos ângulos.

Caso os discentes apresentem dificuldades em identificar e justificar qual dentre os mosaicos 1 e 2 é o mosaico procurado, pode-se indagar:

Utilizou todas as condições fornecidas pela questão?

Pretende-se deste modo, chamar a atenção do aluno ao fato de que os dois triângulos retângulos devem ser congruentes. Caso a dificuldade continue, o questionamento pode ser mais específico:

O que a questão informa sobre as peças?

Sendo ainda mais específico:

Em qual dos mosaicos 1 ou 2, os triângulos retângulos são congruentes?

Estes últimos questionamentos podem levar os discentes a verificar nos triângulos retângulos se há algum caso de congruência.

Execução do Plano

Verificando se os mosaicos têm as características informadas na questão:

1º) O mosaico formado deve ser triângulo retângulo;

2ª) Das três peças, duas são triângulos retângulos e uma é triângulo isósceles;

3ª) As duas peças em formato de triângulo retângulo são congruentes.

O mosaico 5 não é retângulo e sim obtusângulo.

O mosaico 4 não é retângulo e sim agudo.

O mosaico 3 não apresenta a peça em formato de triângulo isósceles.

No mosaico 1 as peças em formato de triângulo retângulo não são congruentes, pois a hipotenusa de um deles é o cateto do outro. Como em um triângulo retângulo a hipotenusa é o maior dos lados, descarta-se a congruência.

O mosaico 2 é o mosaico procurado pois: é retângulo, tem as três peças especificadas e as peças em formato de triângulo retângulo são congruentes, pelo caso Ângulo Lado Ângulo - dois ângulos congruentes e o lado entre os ângulos comum.

O professor pode demonstrar ou propor a demonstração de que a hipotenusa é o maior lado em um triângulo retângulo.

<u>Retrospecto</u> (examinando a solução)

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

Outros caminhos de resolução devem ser valorizados e discutidos com a turma.

É possível utilizar o resultado ou o método em outro problema?

Os discentes devem ser estimulados a exemplificar situações em que o mesmo método ou resultado podem ser usados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo subsidiar os docentes nas atividades de Matemática relacionadas ao conteúdo de geometria, baseando-se nas competências e habilidades esperadas dos alunos conforme discriminado nos PCNEM, PCN + Ensino Médio e Matriz de Referência do ENEM.

Propôs-se responder à seguinte questão: como as competências e habilidades discriminadas nos documentos citados, referentes ao conteúdo de geometria, podem ser trabalhadas pelo docente da disciplina de Matemática de modo significativo e contextualizado?

Para isso, como metodologia desta pesquisa, foi realizado levantamento bibliográfico e análise documental, considerando inicialmente a caracterização da geometria no âmbito escolar. Foi possível destacar a importância e necessidade de que o trabalho com esse conteúdo seja bem planejado, de modo a despertar o interesse do aluno e de proporcionar uma formação significativa, dada a sua possibilidade de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e de resolução de problemas que compõem o cotidiano.

Como forma de conhecer as competências e habilidades esperadas dos alunos e que precisam ser consideradas pelos docentes no planejamento e execução de suas atividades, procedeu-se um estudo dos PCNEM, dos PCN + Ensino Médio e da Matriz de Referência do ENEM. Como resultado foram expostas as competências e habilidades relacionadas ao estudo de geometria.

Considerando a Resolução de Problemas como uma estratégia para o desenvolvimento do referido conteúdo, foi realizada uma análise dessa metodologia, baseada em estudos de alguns autores, e foi verificado desde a definição de problema matemático, até como se dá o desenvolvimento desse processo no âmbito da sala de aula, incluindo as suas estratégias e dimensões. Essa análise resultou na explicitação de todas as fases que compõem a resolução de um problema matemático, além da apresentação de aspectos como a escolha do problema a ser utilizado e dicas para seu intendimento e futura aplicação. Essa explicitação pode representar um suporte para os docentes no planejamento e execução do processo ensino-aprendizagem. Além disso, foi possível ressaltar as diversas contribuições que essa metodologia pode oferecer aos docentes e alunos no trabalho com o conteúdo de geometria.

Nesse contexto, esta pesquisa baseou-se em ‘ensinar sobre resolução de problemas’ e ‘ensinar para resolução de problemas’ que se refere a formas de abordagem dessa metodologia. No entanto, foi possível concluir que, o trabalho constante do docente utilizando-se da resolução de situações-problema para o desenvolvimento de suas atividades de modo a despertar o interesse e iniciativa dos alunos, pode conduzir a uma abordagem relacionada a ‘ensinar através da Resolução de Problemas’, onde os conteúdos de Matemática poderão ser ensinados ao aluno e aprendidos pelo mesmo através da resolução das situações-problema.

Percebe-se que o papel do professor no contexto da metodologia de Resolução de Problemas deve ser o de conduzir o aluno sempre que o mesmo apresentar dificuldades, por meio de questionamentos e sugestões que instiguem a iniciativa, o raciocínio e a retomada dos conhecimentos previamente adquiridos por ele.

Foi possível concluir, também, que a Resolução de Problemas pode contribuir para que o aluno desenvolva uma visão diferente da Matemática por se referir a uma metodologia que se baseia em situações dotadas de significado. Nesse caso, o aluno consegue entender onde os conteúdos matemáticos podem ser empregados, ou seja, dá sentido à sua utilização. Além disso, pode ser importante para o desenvolvimento de sua autoestima, uma vez que, ao conseguir encontrar resposta ao problema proposto, bem como formular e empregar estratégias de resolução, ele se sente satisfeito, ativo e interessado pela busca de novos desafios.

A etapa desta pesquisa que consistiu na seleção e resolução de questões do ENEM com a utilização da Resolução de Problemas, apresentou como resultado a possibilidade de os docentes terem à disposição a explicitação detalhada de como resolver um problema matemático através da utilização dessa metodologia, com a apresentação de todas as suas fases e dos questionamentos necessários para sua resolução, além do conhecimento de quais competências e habilidades estão sendo trabalhadas, servindo-lhes como exemplo para suas práticas.

Convém ressaltar que, as questões aqui resolvidas e apresentadas, representam apenas um ponto de partida para os docentes na busca pela inserção dessa metodologia no contexto da sala de aula. Eles devem buscar outras situações-problema, bem como outras formas de utilizá-las no planejamento e desenvolvimento de suas atividades.

Como resposta à questão proposta para esta pesquisa, é possível afirmar que a metodologia de Resolução de Problemas pode representar uma estratégia eficaz no processo ensino-aprendizagem de geometria, e pode servir de auxílio ao trabalho do docente, de modo a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades deles esperadas, bem como garantir que esse processo ocorra de modo significativo e contextualizado.

Como proposta para futuras pesquisas está a análise da aplicação prática da Resolução de Problemas para o ensino-aprendizagem do conteúdo de geometria no âmbito da sala de aula, e, através de realização de pesquisa de campo, mensurar as contribuições oferecidas ao desenvolvimento do trabalho docente junto aos alunos, bem como prever novas formas de abordagem dessa metodologia nas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94 – 108, set./out./nov./dez. 2004.

BALOMENOS, Richard H.; FERRINI-MUNDY, Joan; DICK, Thomas. Geometria: prontidão para o cálculo. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 240-257.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Matriz de Referência para o ENEM 2009*. Brasília, DF: 2009. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em: 11 jul. 2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *ENEM 2002:* Relatório Pedagógico. Brasília, DF: 2002a. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/relatorios_pedagogicos/relatorio_ pedagogico_enem_2002.pdf>.pdf. Acesso em: 13 jul. 2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *ENEM 2009-2010*: Relatório Pedagógico. Brasília, DF: 2014. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/relatorios_pedagogicos/relatorio_ pedagogico_enem_2009_2010.pdf>.pdf. Acesso em: 13 jul. 2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *ENEM 2011-2012*: Relatório Pedagógico. Brasília, DF: 2015. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/1401>.pdf. Acesso em: 13 jul. 2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)*: Fundamentação Teórico Metodológica. Brasília, DF: 2005. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 12 jul. 2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Matrizes Curriculares de Referência para o SAEB*. Brasília, DF: 1998a. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002747>.pdf. Acesso em: 12 jul. 2016.

BRASIL. Lei nº.9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil _03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 13 jul. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio* – Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília, DF: 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Planejando o ensino de Matemática*. Sistema Nacional de Formação de Professores da Educação Básica. PDE Gestar I. Brasília, DF: 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. Portaria nº 438, de 28 de maio de 1998b. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 01 jun. 1998. Seção 1, p. 5.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998c. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/Semtec, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 17 out. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *PCN + Ensino Médio*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002b. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 17 out. 2016.

CRESCENTI, Eliane Portalone. *Os professores de Matemática e a Geometria*: opiniões sobre a área e seu ensino. 2005. 242f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2007.

DEGUIRE, Linda J. Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas do jardim-de-infância à nona série. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 73-85.

DINIZ, Maria Ignez. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas*: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 87-98.

ECHEVERRÍA, María Del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, Juan Ignacio. (Org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

FARRELL, Margaret A.; FARMER, Walter A. *Systematic Instruction in Mathematics for the Middle and High School Years*. Reading, Mass.: Addison – Wesley, 1979 *apud* FARRELL, Margaret A. Geometria para professores da escola secundária. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 290-308.

FARRELL, Margaret A. Geometria para professores da escola secundária. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 290-308.

FARRELL, Margaret A. *Pattern Centering and Its Relation to Secondary School Geometry Teaching: The Formation of Hypotheses* (dissertação de doutorado, Indiana University, 1967) *apud* FARRELL, Margaret A. Geometria para professores da escola secundária. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 290-308.

FINI, Maria Eliza. Erros e acertos na elaboração de itens para a prova do Enem. As Técnicas de Elaboração de Itens e as Questões Objetivas de Múltipla Escolha do Enem. In: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)*: Fundamentação Teórico Metodológica. Brasília, DF: 2005. p. 101-105. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 12 jul. 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2009*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2009. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2009/dia2_caderno7.pdf>. Acesso em: 12 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2010*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2010a. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_Domingo_GAB.pdf>. Acesso em: 12 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2010 2ª Aplicação*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2010b. Disponível em: <http://http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_quinta-feira_GAB.pdf>. Acesso em: 12 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2012*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/caderno_enem2012_dom_azul.pdf>. Acesso em: 15 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2013*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2013. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf>. Acesso em: 15 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2014*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2014. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/CAD_ENEM_2014_DIA_2_07_AZUL.pdf>. Acesso em: 15 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2015*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2015a. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_07_AZUL.pdf>. Acesso em: 15 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2015 2ª Aplicação*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2015b. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/ 2015/CAD_ENEM_2015_2aAPLICACAO_DIA_02_07_AZUL.pdf>. Acesso em: 15 Jul 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Enem 2016 2ª Aplicação*: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, 2º dia, Caderno 7 – Azul, 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_07_AZUL_2.pdf>. Acesso em: 08 Jan 2017.

KENNEY, Margaret J. A linguagem Logo e a nova dimensão dos programas de geometria no nível secundário. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 107-126.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, SBEM, ano 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

LUPINACCI, Vera Lúcia Martins; BOTIN, Mara Lúcia Müller. Resolução de problemas no ensino de matemática. In: *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004, Recife. Anais do VIII ENEM - Minicurso, GT2 - Educação Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental. Recife: UFPE, Jul. 2004, p. 1-5.

MACEDO, Lino de *et al*. Competência III: Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema. In.: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)*: Fundamentação Teórico Metodológica. Brasília, DF: 2005. p. 79-88. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 12 jul. 2016.

MACHADO, Nílson José. Interdisciplinaridade e contextualização. In: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)*: Fundamentação Teórico Metodológica. Brasília, DF: 2005. p. 41-53. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 12 jul. 2016.

MELLO, Guiomar Namo de. Formação inicial de professores para educação básica: uma (re)visão radical. *São Paulo em Perspectiva*, São Paulo, v.14, n. 1, p. 98-110, Jan./Mar. 2000.

MILAUSKAS, George A. Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 86-106.

MURRIE, Zuleika de Felice. A área de Linguagens e Códigos e suas Tecnologias no ENEM. In: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)*: Fundamentação Teórico Metodológica. Brasília, DF: 2005. p. 57-59. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 12 jul. 2016.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and Standardsfor School Mathematics*. Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000 *apud* NUNES, Célia Barros. *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas*: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 386f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

NUNES, Célia Barros. *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas*: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 386f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Aritmética, Álgebra e Geometria. In: *1ª Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria*, 2008, Santa Maria. Anais da 1ª Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria. Santa Maria, 2008. V. único. p. 1-6.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*, Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, jan./jun. 2013.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. *Uma aula visando o ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas*. 1f. Notas de aula. Mimeografado, 1998 *apud* NUNES, Célia Barros. *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas*: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 386f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

PASSOS, Cármem Lúcia Brancaglion. *Representações, interpretações e prática pedagógica*: a Geometria na sala de aula. 2000. 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PIRONEL, Márcio. *A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática*. 2002. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da; SERRAZINA, Lurdes. Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, Lisboa, v.13, n. 2, p. 51-74, 2004.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de matemática. *Revista Eletrônica de Educação*, São Paulo: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 299-311, maio 2012. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book) *apud* NUNES, Célia Barros. *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas*: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 386f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SILVA, Elisabeth Ramos da. O desenvolvimento do senso crítico no exercício de identificação e escolha de argumentos. *Revista Brasileira de Linguística Aplicada*, Belo Horizonte, v. 3, n. l, p. 58-184, 2003.

SILVEIRA, Fernando Lang da; BARBOSA, Márcia Cristina Bernardes; SILVA, Roberto da. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Uma análise crítica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 37, n. 1, p. 1101-1 - 1101-5, mar. 2015.

USISKIN, Zalman. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 21-39.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WILLOUGHBY, S. S. Perspectives on mathematics education. In: BURKE, M. J.; FRANCES, R. (Orgs.). *Learning mathematics for a new century. Reston*, VA: NCTM, 2000, p. 1-15 *apud* ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*, Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, jan./jun. 2013.

ANEXO A - Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias - Matriz de Referência do ENEM

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em

gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Fonte: BRASIL, 2009, p. 5-7.

ANEXO B - As Competências em Matemática - PCN+ Ensino Médio

Representação e comunicação	
Na área	**Em Matemática**
Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia	
Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica.	• Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; por exemplo, ao ler embalagens de produtos, manuais técnicos, textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens, escritas numéricas, potências de dez, variáveis em fórmulas. • Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos.
Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia	
Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.	• Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas. • Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações. • Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo.
Análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia	
Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculados em diferentes meios.	• Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com plantas de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas. • Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive.
Elaboração de comunicações	
Elaborar comunicações orais ou escritas para	• Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas –

relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências.	para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando idéias, solucionando problemas. • Produzir textos analíticos para discutir, sintetizar e sistematizar formas de pensar, fazendo uso, sempre que necessário, da linguagem matemática. Redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problema, sistematizar as idéias principais sobre dado tema matemático com exemplos e comentários próprios. • Expressar-se da forma oral para comunicar idéias, aprendizagens e dificuldades de compreensão; por exemplo, explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento, propondo e debatendo questões de interesse.
Discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia	
Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.	• Compreender e emitir juízos próprios sobre informações relativas à ciência e tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário, identificar corretamente o âmbito da questão e buscar fontes onde possa obter novas informações e conhecimentos. Por exemplo, ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações.

Investigação e compreensão	
Na área	**Em Matemática**
Estratégias para enfrentamento de situações-problema	
Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.	• Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver. • Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica. • Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.

Interações, relações e funções; invariantes e transformações	
Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.	• Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos eqüidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos. • Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria. • Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. • Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem. • Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou um sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas	
Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.	• Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. • Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza. • Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema. • Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas.

Modelos explicativos e representativos	
Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.	• Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo ou prejuízo mínimo; utilizar ferramentas da estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral ou, ainda, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos.
Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas	
Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento.	• Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. • Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta. • Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. • Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia.

Contextualização sócio-cultural	
Na área	**Em Matemática**
Ciência e tecnologia na história	
Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.	• Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes. • Compreender o desenvolvimento histórico da

	tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de idéias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. • Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos.
Ciência e tecnologia na cultura contemporânea	
Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.	• Compreender a Matemática como parte integrante da cultura contemporânea, sendo capaz de identificar sua presença nas manifestações artísticas ou literárias, teatrais ou musicais, nas construções arquitetônicas ou na publicidade. • Perceber a dimensão da Matemática e da ciência em espaços específicos de difusão e mostras culturais, como museus científicos ou tecnológicos, planetários, exposições. • Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos "com lápis e papel", e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento.
Ciência e tecnologia na atualidade	
Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.	• Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Por exemplo, o uso de satélites e radares nos rastreamentos e localizações, ou dos diferentes tipos de transmissão e detecção de informações, as formas de manipulação genética ou de obtenção e utilização de recursos naturais.
Ciência e tecnologia, ética e cidadania	
Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar	• Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático, sentindo-se mobilizado para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos como consumidor, dos espaços e

esse conhecimento no exercício da cidadania.	equipamentos coletivos ou da qualidade de vida. • Conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência. • Promover situações que contribuam para a melhoria das condições de vida da cidade onde vive ou da preservação responsável do ambiente. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico, manuais técnicos de aparelhos e equipamentos, ou a melhor forma de plantio de lavoura para subsistência de uma comunidade.

Fonte: BRASIL, 2002b, p. 114-119.