UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Lincoln Ferreira Nunes

MODELOS DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO APLICADOS AO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

TEÓFILO OTONI
2017

Lincoln Ferreira Nunes

MODELOS DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO APLICADOS AO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Jaqueline Maria da Silva

Teófilo Otoni

2017

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

N972m
2017

Nunes, Lincoln Ferreira.
Modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas. / Lincoln Ferreira Nunes. Teófilo Otoni: UFVJM, 2017.
145 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Profª. Drª. Jaqueline Maria da Silva.

1. Modelagem Matemática. 2. Engenharia Didática. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Funções exponenciais e logarítmicas. 5. GeoGebra. I. Título.

CDD: 510

LINCOLN FERREIRA NUNES

MODELOS DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO APLICADOS AO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Dissertação apresentada ao PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMáTICA EM REDE NACIONAL - STRICTO SENSU, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MAGISTER SCIENTIAE EM MATEMÁTICA

Orientador : Prof.ª Dr.ª Jaqueline Maria Da Silva

Data da aprovação : 19/05/2017

Prof.Dr. ALEXANDRE FAISSAL BRITO - UFVJM

Geraldo Moreira da Rocha Filho

Prof.Dr. GERALDO MOREIRA DA ROCHA FILHO - UFVJM

Prof.ª Dr.ª DEBORAH FARAGÓ JARDIM - UFVJM

Jaqueline Maria da Silva

Prof.ª Dr.ª JAQUELINE MARIA DA SILVA - UFVJM

TEÓFILO OTONI

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me dado vida, saúde e capacidade para realizar este sonho.

Aos meus pais Antônio Ferreira Sobrinho e Wilma Nunes Ferreira por todo o apoio, compreensão e força.

Aos meus familiares que puderam me ajudar de todas as formas possíveis.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, em especial, Nicson, Mario, Lucas, Silvia, Raphael, Bruce, Paulo e Adaias pelo companheirismo, compreensão, descontração e aprendizagem, obrigado.

Aos meus amigos pela motivação, amizade e compreensão.

À Universidade dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) pela oportunidade de realizar o curso.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela organização e coordenação do PROFMAT.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela criação do programa e pela concessão da bolsa de estudos.

Aos professores do PROFMAT, Dr. Nolmar Melo, Dra. Deborah Jardim, Me. Aílton Vieira, Me. Fábio Souza, Dr. Faissal, Dr. Mauro Lúcio Franco.

Em especial à professora Dra. Jaqueline Maria da Silva pela orientação, paciência, respeito e sugestões durante todo o processo.

Em especial também ao professor Me. Luiz Cláudio Mesquita de Aquino por ter apresentado a linguagem LaTeX.

Aos coordenadores, professores e técnicos administrativos ligados ao programa PROFMAT na UFVJM em geral pela dedicação e trabalho no processo.

A todos os funcionários da UFVJM que auxiliaram durante o processo.

Aos estudantes de Iniciação Científica que participaram com afinco da pesquisa.

Ao Grupo de Estudos em *Software* Livre de Ensino (GESE) da UFVJM Campus Mucuri.

Ao estudante de Iniciação Científica Dérek Bomfim Prates pelo suporte técnico e apoio durante o processo.

Ao Colégio Municipal Vera Cruz de Posto da Mata/Nova Viçosa-BA e aos colegas de trabalho pelo apoio, compreensão e motivação.

A todos que passaram pelo meu caminho e apoiaram de alguma forma de gestos simples como um boa sorte até os mais complexos, agradeço de coração.

Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu. Eclesiastes 3:1 (ECLESIASTES, 1969).

RESUMO

Este trabalho relaciona a utilização da Modelagem Matemática no processo de ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas nos primeiros anos do ensino Superior, com possibilidades de aplicação no Ensino Médio. Inicialmente, relacionou-se a importância das funções supracitadas na descrição de fenômenos das ciências em geral. Em seguida, após análise sobre os livros didáticos, detectou-se deficiências em relação à contextualização do estudo das referidas funções nestes livros. Para propor sequências didáticas que auxiliassem a suprir as lacunas desta contextualização utilizou-se a Modelagem Matemática, com auxílio do *software* GeoGebra. Para analisar a utilização das sequências didáticas propostas, foi escolhida a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Finalmente, após planejadas as sequências didáticas, as intervenções didáticas foram realizadas, tendo como público-alvo um grupo de estudantes do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia do Campus Mucuri da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Ao final das intervenções, questionários e relatos produzidos foram analisados, em relação ao cumprimento do objetivo inicial da pesquisa. Constatou-se ao final das análises dos resultados obtidos, um progresso expressivo dos estudantes em relação à compreensão da utilização das funções supracitadas nas ciências.

Palavras chave: Modelagem Matemática. Engenharia Didática. Ensino-aprendizagem. Funções exponenciais e logarítmicas. GeoGebra.

ABSTRACT

This work relates the use of Mathematical Modeling in the teaching-learning process of exponential and logarithmic functions in College Education, With possibilities of application in High School. The importance of the above-mentioned functions in phenomenas description in general was initially related. Then, after analyzing the textbooks, deficiencies were detected in relation to the contextualization of the study of these functions in these books. In order to propose didactic sequences that helps to fulfil the gaps of this contextualization, Mathematical Modelling with the help of software GeoGebra was used. In order to analyze the use of the proposed didactic sequences, Didactic Engineering was chosen as a research methodology. Finally, after the didactic sequences were planned, the didactic interventions were carried out targeting a group of students from the Bachelor's Degree in Science and Technology of the Mucuri Campus of the Federal University of the Jequitinhonha and Mucuri Valleys. At the end of the interventions, the questionnaires and reports produced were analyzed in relation to the accomplishment of the initial objective of the research. At the end of the analysis of the reports and questionnaires, a very significant progress was made by the students in understanding the use of these functions in the sciences.

Keywords: Mathematical Modeling. Didactic Engineering. Teaching-Learning. Exponential and Logarithmic Functions. GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática enquanto ciência desenvolveu-se gradualmente às necessidades intelectuais e práticas da sociedade. O crescimento desta ciência teve como um dos seus precursores o pensamento de Euclides que visava a construção lógica e axiomática da Geometria. Em seguida, o avanço desta ciência fomentou-se pelas invenções práticas de Arquimedes, que preferia a Matemática Pura à Aplicada. As ciências exatas também tiveram verdadeira proteção, ampliação e divulgação do conhecimento dados pelos árabes durante a Idade Média. Estes fatos mostram que o impulso das grandes construções científicas foram os problemas de natureza tanto intelectual quanto práticas, como é visto em Boyer (2012).

Conforme os desafios matemáticos foram surgindo, novas teorias foram construídas para auxiliar o contorno de um problema específico e posteriormente estas novas construções foram utilizadas para problemas similares, ou muitas das vezes totalmente diferentes no princípio, como foi o caso dos logaritmos antes usados apenas como auxílio para cálculos procedimentais e hoje utilizados em diversas aplicações importantes como modelos de crescimento populacional, como é citado em Lima (2013), Beltrão e Igliori (2010) e Tatsch e Bisognin (2007).

Relacionadas aos logaritmos há a função logarítmica e a sua função inversa, a função exponencial, as quais são importantes nas ciências exatas, sociais, médicas e muitas outras, já que vários fenômenos necessitam de tais funções na sua análise e compreensão como podemos ver em Lima et al. (2010). Contudo, para que as pessoas que trabalham com a Ciência, ou as que necessitam dos seus conhecimentos em algum momento, possam aprender de alguma forma como manipular e compreender tais funções elas precisam estudá-las. O meio usual para que a aprendizagem ocorra são as instituições de ensino e, desta forma, este trabalho partiu de indagações sobre como o processo de ensino-aprendizagem das funções supracitadas está acontecendo no Brasil.

Para analisar como está o ensino destas funções e propor intervenções que introduzam melhorias neste processo foi escolhida a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática, encontrada em Artigue (1996), Brousseau (1996), Carneiro (2005) e Fonseca (2012).

Para Almouloud e Da Silva (2012) a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) iniciou-se na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. A Engenharia Didática foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica.

A Engenharia Didática que visa unir a pesquisa à prática tem como foco o ensino de Matemática, segundo Carneiro (2005), abrangendo quatro etapas: Análises

Prévias, Concepção e Análise *a Priori*, Experimentação e Análise *a Posteriori* e Validação da Experiência. As quatro etapas descritas anteriormente estão explicadas no segundo capítulo deste trabalho.

Durante a fase das análises prévias analisou-se como está o ensino das funções exponenciais e logarítmicas na Educação Básica. Para esta finalidade foi necessário investigar os livros utilizados pelas escolas públicas brasileiras provenientes do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). A alocação de uma coleção de livros neste programa e sua posterior escolha por uma equipe escolar obedecem diretrizes como a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Lei nº 9394 de 1996) (BRASIL, 1996), os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) (BRASIL, 1997) e o PPP (Projeto Político Pedagógico) de cada unidade escolar.

O material e os métodos utilizados pelo docente durante o processo de ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas é influenciado diretamente pelos livros didáticos que o mesmo utiliza, já que estes livros estão presentes em quase todas as escolas públicas do território nacional e muitas vezes são a única fonte de pesquisa para os professores e estudantes.

Em Masetti e Pires (2014) os autores analisaram como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas em livros didáticos de Matemática, oferecidos às escolas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, no Ensino Médio de 2015 e como é proposta a construção, sistematização e consolidação de conhecimentos nesses manuais, notando uma preferência dos autores por exercícios procedimentais repetitivos e estudo mecanizado das propriedades das potências e dos logaritmos.

Nos PCN's do ensino médio a necessidade da Matemática auxiliar o desenvolvimento das Ciências da Natureza é explicitada, levando em conta a contextualização e a utilização da Matemática como linguagem de construção das Ciências (BRASIL, 2002).

Seguindo esta linha de raciocínio, Oliveira (2014) analisou a contextualização das funções exponencial e logarítmica nos livros didáticos do ensino médio e detectou que embora vários livros didáticos motivem o ensino das funções exponenciais e logarítmicas através da contextualização, muitos promovem a contextualização de forma equivocada.

O fato da contextualização do estudo das funções supracitadas não ser trabalhada corretamente durante o ensino médio acarreta dificuldades de aprendizagem para os estudantes da Educação Básica que seguem para o Ensino Superior. Em Da Silva, Jardim e Carius (2016) são explicitadas algumas dificuldades, dos estudantes, encontradas nos primeiros períodos do Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BC&T) da UFVJM, Campus do Mucuri. Por este motivo, escolheu-se como público-alvo da pesquisa estudantes dos primeiros semestres de um curso superior voltado para as Ciências Exatas.

Durante a fase de análise *a priori* e concepção da pesquisa foi proposta a utilização da Modelagem Matemática no processo de ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas em uma turma recém chegada do Ensino Médio que estava nos primeiros semestres do BC&T da UFVJM campus do Mucuri.

Como proposta de contextualização do ensino, foi escolhida a Modelagem Matemática que atua satisfatoriamente neste fim, pois a sua aplicação pressupõe a interdisciplinariedade, ou seja, propõe aliar a matemática às outras ciências para que atue como instrumento de compreensão e de eventuais modificações da realidade, de acordo com Bassanezi (2014).

Este trabalho visa apresentar algumas aplicações das funções exponenciais e logarítmicas em problemas de crescimento e decaimento, bem como os mecanismos de modelagem computacional destas funções, com aporte de equações diferenciais e de diferenças, propiciando uma proposta relevante para os estudantes dos primeiros semestres de um curso superior em Ciências exatas e tecnológicas.

É importante ressaltar que feitas as devidas adaptações, como utilização de equações de diferenças, passíveis de serem utilizadas no ensino médio e não uso das equações diferenciais, a proposta deste trabalho pode ser explorada na Educação Básica.

De acordo com as indagações e relatos, vistos anteriormente, as seguintes hipóteses foram levantadas:

A) A utilização de computadores, com o *software* GeoGebra como recurso didático, fomenta as possibilidades de visualização, cálculo e interpretação;

B) O estudo das funções exponencial e logarítmica, através dos modelos de crescimento e decaimento, melhora a compreensão destes conteúdos;

C) Há relação entre o estudo contextualizado das funções exponenciais e logarítmicas e a aplicação do conteúdo aprendido em situações reais, pelos discentes;

Para descrever melhor a pesquisa realizada, este trabalho será dividido em capítulos. Esta Introdução compõe o primeiro capítulo e no segundo capítulo a metodologia de pesquisa Engenharia Didática será elucidada e algumas experiências no processo de ensino serão relatadas.

O terceiro capítulo abordará a primeira etapa da Engenharia Didática, as análises prévias, levando em consideração a análise sobre funções exponenciais e logarítmicas. Serão mostradas as definições e as caracterizações destas relações funcionais, vide Lima et al. (2012a) e Lima (2013).

Também no terceiro capítulo, ainda em relação às análises prévias, será levado em conta como os estudantes do Ensino Médio estudam as funções logarítmicas e exponenciais. Esta análise leva em conta que os discentes alvos da pesquisa, 18 estudantes que aceitaram espontaneamente o convite, estavam nos semestres iniciais do BC&T e haviam estado no ensino médio há menos de três anos em média, como foi constatado por conversas iniciais.

O quarto capítulo mostrará a fase de análise *a priori* e construção das atividades do projeto, onde inicialmente serão introduzidos tópicos sobre a Modelagem Matemática abordando as equações diferenciais e de diferenças, vistos em Bassanezi e Ferreira Junior (1988), Bassanezi (2014) e Zill (2003). Posteriormente serão relacionados os modelos de crescimento e decaimento que serão utilizados nas ações didáticas,segundo Bassanezi (2014). Neste capítulo será apresentado o processo de construção e planejamento das rotinas didáticas com o auxílio das TIC's (Tecnologias da Informação e Conhecimento), na forma do *software* GeoGebra, já que a utilização de tais recursos é um grande auxílio no processo de ensino-aprendizagem, segundo Borba (2007).

No quinto capítulo, a experimentação realizada com discentes do BC&T da UFVJM Campus Mucuri será detalhada. Serão apresentadas e discutidas as interações dos estudantes com os modelos produzidos no GeoGebra, tanto na visualização, quanto na construção dos mesmos.

No sexto capítulo os resultados das Análises *a Priori* e *a Posteriori* da Engenharia Didática serão comparados, mostrando as características que apresentam a relevância dos modelos de crescimento e decaimento no processo de ensino-aprendizagem das funções exponencias e logarítmicas. Finalmente, após intensos estudos e discussões dos resultados obtidos, a experiência será validada.

Por fim, no sétimo e último capítulo serão feitas as considerações finais sobre os estudos realizados e as perspectivas futuras.

2 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Durante a fase de estudos que antecedeu a confecção desta dissertação, foram diagnosticadas algumas discrepâncias em relação ao que foi proposto no ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas, para o Ensino Médio, pelos PCN's Brasil (2002). Estas discrepâncias acarretam defasagens de aprendizagem para os alunos ingressantes nos primeiros anos do ensino superior, principalmente em cursos envolvendo as ciências exatas, segundo Jardim et al. (2015).

A análise, que suscitou o percebimento destas faltas, está presente na subseção deste trabalho que trata das funções exponenciais e logarítmicas nos livros didáticos do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Nesta investigação detectou-se, nos referidos livros didáticos distribuídos pelo PNLD, a falta ou inadequação de contextualização, segundo Oliveira (2014).

Após análises de trabalhos como Carneiro (2005), Fonseca (2012), Jardim et al. (2015) e Pereira, Da Silva e Jardim (2017) optou-se em utilizar a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa de forma que auxiliasse no estudo das possibilidades para melhoras na aprendizagem, pois, como cita Pais (2015), a principal vantagem da Engenharia Didática é aliar a prática pedagógica com a pesquisa. Além disso, o interesse pela utilização de tal metodologia durante o processo de investigação é motivado pela dualidade entre as dimensões teórica e experimental do saber.

Segundo Pais (2015), as técnicas tradicionais que utilizam questionários, observações diretas, entrevistas, análises de livros, análise documental, não suprem a complexidade do fenômeno didático. O autor ainda afirma que esses instrumentos são válidos, no universo de suas próprias limitações, mas que não têm a especificidade necessária para interpretar a dimensão do aspecto cognitivo em nível da aprendizagem escolar. Finalmente, o autor reitera que a utilização da Engenharia Didática reforça a confiabilidade da pesquisa e sua potencialidade se deve à defesa do vínculo com a realidade da sala de aula.

Para Araújo e Igliori (2009), nesta metodologia de pesquisa tem-se um método qualitativo de pesquisa que utiliza a abordagem comparativa baseada em uma validação interna, ou seja, não utiliza métodos comparativos da Estatística Clássica. O fato desta metodologia ser de validação interna é propício para o trabalho com uma amostra reduzida de estudantes. No trabalho apresentado nesta dissertação, a pesquisa contou com a colaboração de 18 estudantes.

A formação da metodologia de pesquisa Engenharia Didática serve para analisar situações didáticas, que são objeto de estudo da Didática da Matemática. Esta metodologia tem sido mais utilizada na orientação de pesquisas que fazem referência à didática da matemática, que por sua vez, é formada em parte pelos conceitos como a Teoria dos Obstáculos epistemológicos de Bachellard e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, segundo Machado (1999).

A expressão Engenharia Didática faz alusão ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de sua área, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo se vê obrigado a trabalhar objetos bem mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, enfrentar, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta, de acordo com Artigue (1996).

Quando se utiliza a Engenharia Didática é necessário controlar sistematicamente a prática da pesquisa para que se preserve as condições de confiabilidade da atividade científica, através da utilização de métodos bem fundamentados. A Engenharia Didática se constitui em uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática, como é visto em Pais (2015).

A autora, em Artigue (1996), caracteriza a Engenharia Didática como um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, onde o pesquisador trabalha sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.

Após análises de trabalhos de Artigue (1996), Carneiro (2005), Fonseca (2012) e Pais (2015) tem-se um referencial explicativo sobre as fases da Engenharia Didática que são apresentadas em quatro etapas: Análises Prévias, Concepção e Análise *a Priori*, Experimentação e Análise *a Posteriori* e Validação da Experiência. Estas etapas serão explicitadas a seguir, bem como a delimitação do que foi feito durante a pesquisa seguindo esta organização em fases.

Análises Prévias

Na etapa de análises prévias é escolhido um quadro teórico sobre o qual o pesquisador fundamenta seu trabalho. Nesta etapa se fazem as inferências, como o levantamento das constatações experimentais, a caracterização das concepções dos sujeitos envolvidos e a análise das condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. Durante esta fase é aconselhável descrever inicialmente as principais dimensões que participam da constituição do objeto de estudo e que definem o fenômeno a ser estudado, tais como a epistemológica, cognitiva e pedagógica, de acordo com Pais (2015).

Para Carneiro (2005), as análises prévias são estruturadas, com a finalidade de averiguar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo para, em seguida, propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. Nesta análise os efeitos do ensino tradicional são analisados, levando em conta as concepções dos estudantes e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução da aprendizagem. Neste ponto as falhas encontradas são o ponto de partida para determinar condições possíveis de melhoras no processo de ensino-aprendizagem.

Em Artigue (1996) e Carneiro (2005) tem-se a distinção das três dimensões das análises prévias: A dimensão epistemológica ou do saber, a dimensão didática ligada ao funcionamento do sistema de ensino e a dimensão cognitiva ligada ao público-alvo do processo de ensino-aprendizagem.

Durante a investigação, na pesquisa relatada nesta dissertação, a dimensão epistemológica analisada tratou das Funções Exponenciais e Logarítmicas, seus conceitos, características e definições inerentes. Esta análise está apresentada no terceiro capítulo deste trabalho.

A análise da dimensão didática foi voltada inicialmente para os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) do Ensino Médio, (BRASIL, 2002), onde verificou-se as indicações para o ensino da Matemática durante esta etapa do ensino regular brasileiro. Em seguida, analisou-se os trabalhos de Masetti e Pires (2014) e Oliveira (2014), onde os autores verificam como o conteúdo referente às Funções Exponencial e Logarítmica está representado nos livros didáticos do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). A escolha pela análise destas obras foi motivada pela utilização dos livros didáticos do programa em todo o território nacional, o que influencia o trabalho dos profissionais da Educação que muitas vezes utilizam este material como única fonte bibliográfica. Esta investigação está relatada também no terceiro capítulo.

A análise da dimensão cognitiva investigou as impressões e ideias dos estudantes, público alvo da pesquisa, em relação ao conteúdo a ser trabalhado. Durante a pesquisa esta etapa foi realizada na Aula 01, onde os cursistas participantes responderam à Entrevista Introdutória e à Entrevista Exploratória. As discussões e os levantamentos destas entrevistas estão relacionados no quinto capítulo deste trabalho.

Concepção e análise *a priori*

Nesta fase define-se as variáveis de comando que, em tese, interferem no fenômeno. As variáveis escolhidas serão trabalhadas e investigadas durante a aplicação das sequências didáticas, de acordo com Pais (2015).

Em Artigue (1996) tem-se a distinção entre as variáveis locais que dizem respeito ao planejamento específico de uma sessão da sequência didática e as variáveis gerais que são dependentes do conteúdo trabalhado. As primeiras variáveis são relativas ao problema em si e as segundas variáveis associadas ao meio que estrutura o fenômeno. O objetivo da análise *a priori* é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os estudantes podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão (PAIS, 2015).

Nesta fase da Análise *a priori*, segundo Artigue (1996), é necessário descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando globalmente e descrever cada atividade proposta localmente. As variáveis globais da pesquisa relatada nesta dissertação foram: melhoras no ambiente de aprendizagem, utilização de outros recursos didáticos além da exposição oral e escrita em lousa, incentivo da aplicação do conteúdo estudado em situações reais, incentivo à criação de autonomia pelos discentes na criação de modelos.

Em seguida partiu-se para o Plano de Ações definindo as escolhas locais. Este plano se apresenta como sequências didáticas envolvendo modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino das funções supracitadas. Estas ações, segundo Artigue (1996), ajudam a prever os comportamentos dos alunos para que haja o controle das relações entre o sentido das suas realizações e as situações didáticas propostas.

As variáveis locais podem ser entendidas como as hipóteses da pesquisa e a partir desse ponto elas não podem ser muito amplas, a ponto de colocar em risco o processo de aprendizagem, a longo prazo. É necessário que elas sejam passíveis de análise pois serão confrontadas durante a experimentação. No final será verificada a validade destas hipóteses (CARNEIRO, 2005).

Em relação às variáveis locais, foram consideradas as funções exponenciais e logarítmicas, trabalhadas em três momentos distintos.

No primeiro momento, os discentes **assistiram** a uma aula teórica, com exposição oral e auxilio da lousa, sobre as definições e caraterizações das funções exponencias e logarítmicas. Ainda nesta etapa, os discentes também **foram expostos** à uma introdução sobre modelagem matemática, em especial sobre a utilização de equações diferenciais e de diferenças.

No segundo momento, os estudantes **observaram** e **construíram**, acompanhando as ações do pesquisador, as representações dos modelos de decaimento e crescimento utilizando o *software* GeoGebra.

No terceiro momento, os discentes **construíram**, no GeoGebra, as representações dos modelos de crescimento e decaimento, utilizando o conhecimento adquirido na construção dos roteiros, no momento anterior. Nesta etapa, os estudantes também utilizaram dados populacionais do site do IBGE, para relacionarem o crescimento de cidades à funções exponenciais.

Experimentação

Em Machado (1999) é observado que na fase de experimentação da Engenharia Didática deve ocorrer a explicação dos objetivos e condições da execução da pesquisa aos estudantes participantes. Deve ser estabelecido o contrato didático, aplicadas as sequências didáticas e feitos os registros das obervações realizadas.

As aulas 01 e 02 serviram como base para o trabalho com os modelos de crescimento e decaimento . Na aula 01, houve uma apresentação teórica sobre conceitos das funções exponenciais e logarítmicas. Na aula 02, houve uma elucidação sobre a modelagem matemática, com enfoque para uma introdução sobre equações diferenciais e de diferenças.

Durante a aplicação das sequências didáticas do projeto, na Aula 03, o pesquisador construiu no GeoGebra, com o auxílio do projetor multimídia, os modelos sobre a Lei do resfriamento de Newton, sobre o processo de Eliminação de álcool ingerido, e o Modelo de crescimento populacional de Malthus. Estes três Modelos simplistas resultam em funções exponenciais e necessitam do auxílio das funções logarítmicas durante sua fase de resolução. Os estudantes acompanharam essas construções fazendo-as no GeoGebra. A descrição deste processo e das respostas aos questionários propostos encontram-se no quinto capítulo.

Na Aula 04, os discentes construíram os modelos de Decaimento da concentração de drogas no organismo (Modelo similar ao de Eliminação de álcool ingerido) e o modelo de Decaimento Radioativo. Eles utilizaram os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores sobre modelagem e sobre o GeoGebra. Este processo e as descrições das respostas aos questionários propostos encontram-se no quinto capítulo.

Na Aula 05 os estudantes utilizaram dados obtidos no site do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e as funções de regressão do GeoGebra para projetar o crescimento populacional de algumas cidades através de curvas logísticas e exponenciais. Ao final desta aula, os estudantes responderam aos questionários referentes ao que foi trabalhado durante esta intervenção e sobre os principais pontos, avaliando de forma qualitativa o trabalho em geral. A descrição deste processo e das respostas aos questionários propostos encontram-se no quinto capítulo.

Análise *a posteriori* e validação

Durante a análise *a posteriori* é feito o tratamento das informações obtidas durante a aplicação das sequências didáticas na experimentação. É importante que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, desvelando seus procedimentos de raciocínio, segundo Pais (2015).

Como foi explicado, na Engenharia Didática, a validação é interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, segundo Carneiro (2005). Para Artigue (1996), o confronto destas duas análises serve para investigar o que foi considerado nas hipóteses, verificando se houve distorções durante o processo.

Para Pais (2015), a validação dos resultados, obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, do ponto de vista metodológico, deve ser feita de maneira consciente para garantir a essência do caráter científico. Enquanto procedimento de pesquisa, a Engenharia Didática, que se fundamenta em registros de estudos de casos e cuja validação é interna, deve estar circunscrita ao contexto da experiência realizada.

A análise *a posteriori*, bem como a validação da pesquisa relacionada nesta dissertação, estão presentes no sexto capítulo deste trabalho.

3 AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS, CONCEITOS INERENTES E COMO SÃO REPRESENTADAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD

Um passo importante na modelagem matemática de um fenômeno natural é entender como as variações ocorrem ao longo do tempo, se as quantidades iniciais aumentam ou diminuem, ou seja, como as variáveis dependentes se comportam em relação às variações das variáveis independentes, de acordo com Da Silva (2011).

Com o intuito de descrever um fenômeno natural matematicamente, as funções exponenciais, ao lado das funções afins e quadráticas, descrevem os modelos mais utilizados em problemas básicos, como é visto em Lima et al. (2012a).

O problema inicial trata-se de escolher quais funções modelam tal fenômeno natural, então na escolha do instrumento matemático mais pertinente deve-se conhecer as propriedades características de cada função, segundo Lima et al. (2012a).

Nos parágrafos seguintes, estas funções serão definidas matematicamente conforme Lima et al. (2012a).

Definição 1 *Função*

Dados os conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ (lê-se ''uma função de A em B'') é uma regra (ou conjunto de instruções) que nos diz como associar a cada elemento x, pertencente ao conjunto A, a um e apenas um elemento $y = f(x)$ pertencente ao conjunto B.

Definição 2 *Variação relativa de uma função*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x)$.

Seja x um ponto qualquer do domínio de f e h um incremento da variável x. Definimos a variação de f em relação ao incremento h por $f(x+h) - f(x)$.

Denominamos então, a razão (1) como a taxa de variação relativa ou acréscimo relativo da função.

$$\frac{[f(x+h) - f(x)]}{f(x)} \tag{1}$$

Definição 3 *Função Afim*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função monótona crescente, ou decrescente, então ''f é afim se, e somente se, o acréscimo $f(x+h) - f(x)$, sofrido por f quando se passa de x para $x + h$, depende apenas do acréscimo h dado a x mas não depende do próprio valor de x''.

Mas, e se houver a necessidade de uma função real de variável real $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que seja monótona crescente, ou decrescente, tal que, a variação relativa (2) dependa apenas de h, mas não de x?

$$\frac{[g(x+h) - g(x)]}{g(x)} \tag{2}$$

Neste caso, as únicas funções com estas propriedades são as do tipo (3), ou seja, são funções do tipo exponencial.

$$g(x) = b \cdot a^x \; com \; a > 0 \tag{3}$$

Os valores de a e b, podem ser interpretados em termos de valores de g nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Com $g(0) = b \cdot a^0 = b$ e no ponto $x = 1$, $g(1) = b \cdot a^1 = g(0) \cdot a$. Portanto, $a = \frac{g(1)}{g(0)}$ corresponde à constante pela qual a função g é multiplicada em todo intervalo de comprimento 1.

No final do século XVI o avanço da Astronomia e da Navegação exigia alternativas práticas e rápidas para os cálculos aritméticos, como é visto em Lima (2013). Os matemáticos da época procuravam um processo para reduzir operações mais complexas como potenciação, radiciação, multiplicação e divisão para operações mais simples como adição e subtração.

Para os cientistas, desta época supracitada, os logaritmos serviam como uma importante ferramenta de aceleração dos cálculos. O trabalho, para quem necessitava de operar com números extensos, deixava de ser tão massivo.

Jost Biirgi (1552-1632), suíço fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, e John Napier (1550-1617), um nobre escocês, teólogo e matemático, publicaram em trabalhos independentes, as primeiras tábuas de logaritmos. A influência de Napier foi maior devido às suas publicações e bom relacionamento no meio universitário, de acordo com Lima et al. (2012a).

Uma tábua de logaritmos é composta por duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu logaritmo. Na Figura 1, apresenta-se uma tábua de logaritmos de base natural. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Para extrair a raiz enésima de um número basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz.

As relações descritas no parágrafo anterior, na terminologia matemática de hoje, são consideradas funções. Convém notar porém, que a invenção dos logaritmos foi anterior à introdução do conceito de função na Matemática, de acordo com Lima (2013).

Figura 1 – Tábua de logaritmos.

Logaritmos naturais de 1 a 10,09

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1,1	0414	0453	0492	0531	0569	0606	0645	0682	0719	0755
1,2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1039	1072	1106
1,3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1,4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1,5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1,6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1,7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1,8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1,9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2,0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2,1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2,2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2,3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3829	3747	3766	3784
2,4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2,5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2,6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2,7	4314	43[illegible]	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2,8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2,9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3,0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3,1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038

Fonte: (LIMA, 2013, p.146)

3.1 Caracterização da função exponencial

Nesta seção, serão apresentados conceitos e definições de funções de acordo com Lima et al. (2012a), Lima (2013) e Anton, Bivens e Davis (2007).

Teorema 1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes informações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração 1 *A prova deste teorema se baseia nas implicações* $(1) \implies (2)$, $(2) \implies (3)$ *e* $(3) \implies (1)$. *A hipótese* (1) *implica que, para todo número racional* $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *daí, para* $nr = m$:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Para $f(1) = a$, *tem-se* $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.

Agora supondo-se que f *seja crescente então,* $1 = f(0) < f(1) = a$. *Admitindo-se por absurdo, que exista* $x \in \mathbb{R}$ *com* $f(x) \neq a^x$. *Para* $f(x) < a^x$ *(o caso contrário é análogo).*

É importante ressaltar que fixado o número real positivo $a \neq 1$, *em todo intervalo de* $\mathbb{R}^+$ *existe alguma potência* a^r, *com* $a \in \mathbb{Q}$.

Então existe um número racional r *tal que* $f(x) < a^r < a^x$, *ou seja,* $f(x) < f(r) < a^x$. *Como* f *é crescente, tendo* $f(x) < f(r)$ *conclui-se que* $x < r$. *Por outro lado, tem-se também* $a^r < a^x$, *daí* $r < x$, *um absurdo. Logo tem-se que* $(1) \implies (2)$.

Para provar a implicação $(2) \implies (3)$ *tem-se:*

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, *prova-se por indução a implicação* $(3) \implies (1)$:

Para $n = 1$ *tem-se* $f(1 \cdot x) = f(x) = f(x)^1$, *supõe-se para* $n \leq k$ *que* $f(kx) = f(x)^k$, *agora é necessário provar esta igualdade para* $n = k + 1$, *daí:*

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(x)^k \cdot f(x) = f(x)^{k+1}$$

Logo a afirmativa é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. *Agora, se* $n = 0$:

$$f(0 \cdot x) = f(0) = a^0 = f(x)^0$$

Com $n < 0$ *tem-se* $-n > 0$ *daí:*

$$f(-nx) = f(x)^{-n}$$

Como $n + (-n) = 0$ tem-se:

$$1 = f(0) = f((n + (-n))x) = f(nx) \cdot f(-nx)$$

Sendo assim, tem-se,

$$f(nx) = \frac{1}{f(-nx)} = f(-nx)^{-1} = (a^{-nx})^{-1} = a^{(-nx)\cdot(-1)} = a^{nx} = (a^x)^n = f(x)^n$$

Logo, $(3) \implies (1)$.

■

3.2 Caracterizações de $b \cdot a^t$

Primeira caracterização

Teorema 2 *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo* (4) *dependa apenas de h, mas não de x.*

$$\frac{[g(x+h) - g(x)]}{g(x)} \tag{4}$$

Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se:

$$g(x) = ba^x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração 2 *Seja $\varphi(h)$ uma função que dependa apenas de h, mas não de x, então:*

$$\frac{[g(x+h) - g(x)]}{g(x)} = \varphi(h)$$

Quando substitui-se $g(x)$ por $\dfrac{f(x)}{b}$, com $b = g(0)$, obtém-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ não dependendo de x e com $f(0) = 1$.

*Colocando $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtém-se $\varphi(h) = f(h)$, $\forall\ h \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a função monótona injetiva f cumpre a condição $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, o que acarreta $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Do **Teorema 1** tem-se $f(x) = a^x$, daí*

$$g(x) = b \cdot f(x) = ba^x$$

■

Segunda caracterização

Teorema 3 *Para cada b e cada t reais, supõe-se dado um número $f(b,t) > 0$ com as seguintes propriedades:*

(1) *$f(b,t)$ depende linearmente de t e é monótona injetiva em relação a t;*

(2) *$f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$.*

Então, pondo $a = f(1,1)$, tem-se $f(b,t) = b \cdot a^t$.

Demonstração 3 *A função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $\varphi(t) = f(1,t)$, é monótona injetiva, com*

$$\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s), t) = f(1,s) \cdot f(1,t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

*devido às condições **(1)** e **(2)** pois $f(1,s) = 1$.*

*Pelo **Teorema 1**, tem-se $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1,1)$. Em consequência:*

$$f(b,t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t$$

■

Observação: As demonstrações dos **Teoremas 1, 2 e 3** são consoantes com o exposto em Lima et al. (2012a).

A condição **(2)** do (**Teorema 3**) tem seu significado esclarecido quando se observa que $b = b \cdot a^0 = f(b,0)$, ou seja, que b é o *valor inicial* da grandeza $f(b,t)$ no instante $t = 0$ (pensando em t como o tempo decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b,0)$) para o valor $f(b,t)$). Então **(2)** diz que, começar com o valor b e deixar passar o tempo $s+t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b,s)$ e deixar transcorrer o tempo t.

3.3 Funções Exponenciais e Progressões

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \cdots, f(x_n) = ba^{x_n}, \cdots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h.$$

Teorema 4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$, com $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração 4 *Teorema 4*

*Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$, é monótona injetiva e também transforma progressões aritméticas em progressões geométrica, com $g(0) = 1$. Para $\forall\ x \in \mathbb{R}$, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Daí $g(x) = \dfrac{1}{g(-x)}$. Agora para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, a sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é um progressão aritmética, daí $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica de razão $g(x)$. O termo $(n+1)$ desta progressão geométrica é $g(nx) = g(x)^n$. Para $-n < 0$ então $g(-nx) = \dfrac{1}{g(nx)} = \dfrac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$. Desta forma tem-se $g(nx) = g(x)^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Do **Teorema 1** tem-se, para $a = g(1) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.*

■

Observação: A demonstração do **Teorema 4** é consoante com o exposto em Lima et al. (2012a).

3.4 Função Inversa

Diz-se que a função $g : Y \to X$ é a inversa da função $f : X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Uma função $f : X \to Y$ possui inversa se, e somente se, for sobrejetiva, ou seja se existir uma correspondência biunívoca entre X e Y.

3.5 Funções Logarítmicas

Definição 4 *Função logarítmica*

Para todo número real positivo $a \neq 1$*, a função exponencial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*,* $f(x) = a^x$*, é uma correspondência biunívoca entre* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^+$*, crescente se* $a > 1$*, decrescente se* $0 < a < 1$*, com a propriedade adicional*

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Segue-se que f *possui uma função inversa. A inversa da função exponencial de base* a *é a função*

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x *o número real* $\log_a x$*, chamado o logaritmo de* x *na base* a*. Por definição de função inversa, tem-se*

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

para x e y positivos quaisquer. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$ então $a^u = x$ e $a^v = y$, logo

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v},$$

ou seja

$$\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Observação: O uso das calculadoras fez com que a utilização das tábuas de logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a importância dos logaritmos é permanente na Matemática, já que como a função logarítmica é a inversa da função exponencial (portanto equivalentes), ela está ligada a um grande número de fenômenos, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma no instante dado.

3.6 Caracterização das Funções Logarítmicas

Teorema 5 *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração 5 *Teorema 5*

Seja f crescente (para f decrescente é análogo). Tem-se $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, daí $f(1) = 0$. Supondo-se que exista $a \in \mathbb{R}$ com $f(a) = 1$, tem-se, para $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \\ f(a^m) &= f(a) + f(a) + \cdots + f(a) \\ f(a^m) &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m\ fatores} = m, \end{aligned}$$

Também, para todo $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) \\ 0 &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}) \\ 0 &= m + f(a^{-m}) \\ -m &= f(a^{-m}) \end{aligned}$$

Para $r = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{R}$, tem-se $rn = m$, daí

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f(((a^r)^n)) = n \cdot f(a^r)$$

Logo, $f(a^r) = \dfrac{m}{n} = r$. Se $x \in \mathbb{Q}$ então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \implies a^r < a^x < a^s \implies f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \implies r < f(a^x) < s.$$

Desta maneira todo número racional $r < x < f(a^x)$ *e* $s > x > f(a^x)$. *Daí,* $f(a^x) = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Este fato acarreta* $f(y) = \log_a y$, $\forall\ y > 0$.

Para o caso geral de uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *com* $g(xy) = g(x) + g(y)$, *então* $g(1) = 0$ *e para* $1 < 2$ *acontece* $g(2) = b > 0$. *A função formada como* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *definida como* $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$ *que é crescente, transforma soma em produtos e satisfaz* $f(2) = 1$. *Portanto, pela primeira parte desta demonstração, tem-se* $f(x) = \log_2 x$, $\forall x > 0$. *Daí,*

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

para $a = 2^{\frac{1}{b}}$. *Finalmente,*

$$a^{g(x)} = x \iff \log_a a^{g(x)} = \log_a x \iff g(x) = \log_a x$$

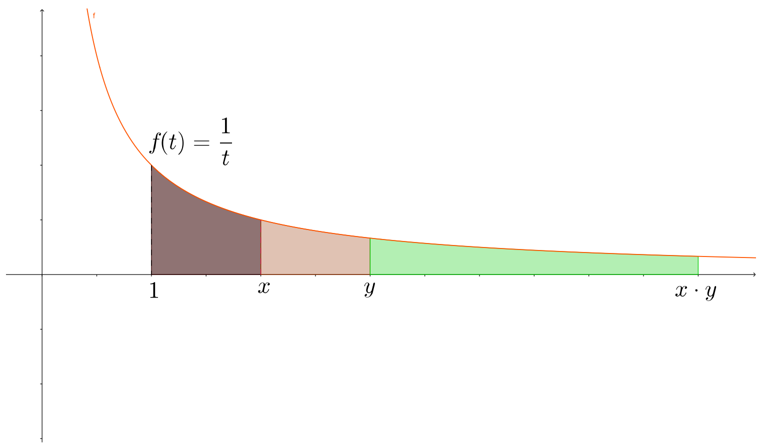
$\blacksquare$

Observação: Demonstração do **Teorema 5** consoante com Lima et al. (2012a).

3.7 Logaritmos Naturais

Nesta subseção, será mostrado como o logaritmo natural $\ln(x)$ pode ser apresentado segundo o **Teorema 5** como a a medida da área delimitada pelo gráfico da função $f(t) = \frac{1}{t}$, o eixo x e as retas $t = 1$ e $t = x$, Figura 2.

Figura 2 – Gráfico de $f(t) = \frac{1}{t}$, o eixo x e as retas $t = 1$, $t = x$, $t = y$ e $t = x \cdot y$.



Fonte: Produzida pelo autor.

Demonstração 6 *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(t) = \frac{1}{t}$, temos que:*

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Como é visto na Figura 2 tem-se:

$$x < y \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^y \frac{1}{t} dt \tag{5}$$

Agora:

$$g(xy) = \int_1^{x \cdot y} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^y \frac{1}{t} dt + \int_y^{x \cdot y} \frac{1}{t} dt \tag{6}$$

como

$$\int_x^y \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

e

$$\int_y^{x \cdot y} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_y^y \frac{1}{t} dt$$

tem-se

$$g(xy) = \int_1^{x \cdot y} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_y^y \frac{1}{t} dt \tag{7}$$

como

$$\int_y^y \frac{1}{t} dt = 0$$

finalmente:

$$g(xy) = \int_1^{x \cdot y} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt = g(x) + g(y) \tag{8}$$

Por (5) e (8) vemos que $g(x)$ é monótona e transforma produtos em somas. Logo, pelo (Teorema 5), existe um número real positivo, que chamamos de e, tal que $g(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Escreve-se $\ln x$ em vez de $\log_e x$ e chama-se o número $\ln x$ de logaritmo natural de x.

$\blacksquare$

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de seu logaritmo natural ser igual a 1, ou seja:

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

O número $e \approx 2,718281828459$ é irracional, e os logaritmos com essa base são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal, segundo Lima et al. (2012a).

3.8 A função Exponencial de Base e

O número e é o único número real positivo tal que:

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Por sua vez, a função exponencial $x \mapsto e^x$, de base e, pode ser definida pelo fato de que $y = e^x$ é o único real positivo tal que

$$\int_1^y \frac{1}{t} dt = x.$$

As funções de tipo exponencial, $f(x) = be^{\alpha x}$, com base e, surgem em questões naturais e possuem taxa de variação instantânea de fácil cálculo.

A expressão $f(x) = be^{\alpha x}$ pode também ser escrita sob a forma $f(x) = ba^x$, onde $a = e^\alpha$, portanto $\alpha = \ln a$. Ou se houver preferência por uma determinada base d, pode-se sempre escrever $f(x) = bd^{\beta x}$, com $\beta = \frac{\alpha}{\ln d}$. As vezes é conveniente tomar a base 2, de modo que se tem $f(x) = b2^{\beta x}$, onde $\beta = \frac{\alpha}{\ln 2}$.

Matemáticos e cientistas que se utilizam da Matemática preferem geralmente escrever as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

A *taxa de crescimento* de uma função f no intervalo de extremidades x e $x+h$ é, por definição, o quociente

$$\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \tag{9}$$

Definição 5 *Denomina-se derivada da função f no ponto x ao limite da taxa (9) quando h tende para zero. Este número é a taxa de crescimento instantâneo de f no ponto x, sendo representado por $f'(x)$. Ele é o número real cujos valores aproximados são os quocientes (9) para valores muito pequenos de h.*

A derivada da função $f(x) = be^{\alpha x}$ é igual a $\alpha \cdot f(x)$. Ou seja, a taxa instantânea de crescimento/decaimento de uma função do tipo exponencial é, em cada ponto x, proporcional ao valor da função naquele ponto. E o coeficiente α é precisamente o fator de proporcionalidade.

3.9 As funções exponenciais e logarítmicas nos livros didáticos do PNLD

Os livros utilizados pelas escolas públicas brasileiras provém do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). A alocação de uma coleção neste programa e sua posterior escolha por uma equipe escolar obedecem diretrizes como a Lei nº 9394 de 1996, os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) e o PPP (Projeto Político Pedagógico) de cada unidade escolar.

Desta maneira, o material e os métodos utilizados pelo docente durante o processo de ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas é influenciado diretamente pelos livros didáticos que utiliza.

Nos PCN's do ensino médio a necessidade da Matemática auxiliar o desenvolvimento das Ciências da Natureza é explicitada, levando em conta a contextualização e utilização da Matemática como linguagem de construção das Ciências, (BRASIL, 2002).

Os autores, em Masetti e Pires (2014), fizeram uma análise de como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas em livros didáticos de Matemática, oferecidos às escolas brasileiras pelo PNLD, no Ensino Médio de 2015 e como são propostas a construção, a sistematização e a consolidação de conhecimentos nesses manuais.

Em Masetti e Pires (2014), foi analisada a coleção MATEMÁTICA – Ciências e Aplicações de autoria de Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida. O tema "Funções Exponenciais e Logarítmicas" é abordado no volume destinado ao primeiro ano do ensino médio, onde os autores desta coleção dedicam quarenta e oito páginas para trabalhar o tema, o que corresponde pouco mais de 16% de toda obra.

Segundo Masetti e Pires (2014), apesar de o livro apresentar uma situação de crescimento populacional e propor situações e problematizações utilizando temas como ocorrência de terremoto, escala de acidez, o material propõe poucas questões de modelação, na verdade nenhuma de função logarítmica e 5 questões de função exponencial, sendo que se desdobram em 13 alternativas para resolução.

Ainda nesta análise, os autores relatam que grande ênfase conferida a tarefas de caráter procedimental, com 614 tarefas, na maioria de cálculo algorítmico (236), seguidas por 135 tarefas de aplicação de uma propriedade e por 74 tarefas baseadas em definições.

Desta forma, seguindo o material de referência, o docente é levado a apoiar seu planejamento em tarefas procedimentais, deixando de lado a exploração e construção significativa do conhecimento.

Em Oliveira (2014), a contextualização das funções exponencial e logarítmica nos livros didáticos do ensino médio é analisada. A autora analisa como os livros didáticos motivam o ensino das funções supracitadas e como a contextualização destes assuntos é proposta.

Após analisar 10 coleções voltadas à matemática do ensino médio, Oliveira (2014), chegou à conclusão de que a maioria dos problemas contextualizados envolvendo funções, equações e inequações exponenciais tratam de crescimento exponencial, decaimento radioativo e juros compostos e que há nestas coleções muitas questões com contextualizações inadequadas, onde são apresentadas informações incoerentes, fictícias ou erradas.

O professor deve ter o olhar crítico e atento no momento de escolher a maneira como irá abordar os conteúdos e quais exercícios contextualizados utilizará em sala de aula. Para isto, o professor deve pesquisar e buscar o conhecimento de outras áreas do currículo, pois as questões contextualizadas têm esta conexão com outras áreas do saber, segundo Oliveira (2014).

Finalmente, encontra-se em Lima (2007) a importância do professor considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está sendo apresentada aos alunos.

4 A MODELAGEM MATEMÁTICA E A UTILIZAÇÃO DE MODELOS COMO FERRAMENTAS DE ENSINO

Diversos pesquisadores, autores e professores brasileiros como Biembengut e Hein (2002), Bassanezi (2014), Burak (1992), Barbosa, Caldeira e Araújo (2007) e Barbosa (2001) desenvolveram, trabalharam e divulgaram a Modelagem Matemática ao longo das últimas três décadas como pode ser observado em Biembengut (2009).

Inicialmente é necessário caracterizar o que é Modelagem Matemática. De fato, pois para Bassanezi (2014), a Modelagem Matemática tanto como método científico como estratégia de ensino-aprendizagem, transforma problemas reais em problemas matemáticos cujas soluções são em seguida interpretadas na linguagem do mundo real. A modelagem pode também ser definida como o processo de criação de modelos que refletem as estratégias de ação do modelador sobre a realidade. Em Nagle, Saff e Snider (2012) os autores definem a Modelagem Matemática como estratégia de imitação do mundo real através da linguagem matemática.

Em Barbosa (2004), o autor critica a visão da Modelagem Matemática como simples aplicação de matemática em outras áreas do conhecimento referindo a esta ideia como limitação teórica. O autor reitera a necessidade de se ter maior clareza sobre o que é chamado de Modelagem.

Para Matos e Carreira (1996), a Modelagem no contexto escolar difere nos objetivos, na dinâmica, no trabalho e na natureza das discussões matemáticas em relação aos modeladores profissionais.

No âmbito do modelador profissional, o passo inicial é encontrar dados experimentais e/ou inferências de especialistas relativos ao tema. Esta etapa Nagle, Saff e Snider (2012) define como **Formulação do Problema** e inicia-se com tabelas de valores que podem ser obtidos experimentalmente, através de revisão bibliográfica ou pela *Internet*. O refinamento ou fase de **Desenvolvimento do Modelo** é a fase seguinte do processo. Em sequência é necessário que se **Teste o modelo** comparando as previsões com os dados experimentais. Após os testes o pesquisador decide fazer, ou não, modificações no modelo.

No contexto escolar, a Modelagem Matemática tem sido utilizada para diminuir a distância entre a matemática formal e a sua utilização na vida real. Através dos modelos matemáticos é possível estudar e formalizar fenômenos do cotidiano. Há significativas melhoras da consciência dos estudantes em relação à utilidade da matemática para resolver e analisar problemas a partir dos conceitos já aprendidos. Este momento é crucial no processo de significância dos conceitos adquiridos pelos discentes, de acordo com D'Ambrosio (1989).

Para Biembengut (2012), a concepção de Modelagem Matemática do professor depende de como ele interagiu na sua práxis pedagógica com a Modelagem. A utilização da

Modelagem na Educação Matemática desenvolve nos estudantes a capacidade de avaliar o processo de construção do conhecimento nos diferentes contextos.

Em Blum et al. (2007), a Modelagem Matemática surge na Educação para o estudante adquirir as habilidades matemáticas mais importantes na construção das competências inerentes ao saber desta disciplina.

Para Bassanezi (2014), a parte computacional adequada para introdução à modelagem se restringe, invariavelmente, à confecção de gráficos e ajuste de curvas. Por este fim, a proposta deste trabalho visa utilizar o *software* GeoGebra que contém planilha eletrônica, visualização de gráficos, entre outros recursos.

No enfoque do uso de Modelagem Matemática como ferramenta de ensino, vários autores como Burak e Klüber (2008), Biembengut (2004) e Barbosa, Caldeira e Araújo (2007) apresentam algumas interpretações e apontamentos para a Educação Matemática e desenvolvimento teórico da Modelagem Matemática.

Como processo de ensino-aprendizagem, a Modelagem pode ser utilizada e adaptada de acordo com o público-alvo, que pode ser de pesquisadores no ambiente de Iniciação Científica, de professores em cursos de Especialização ou estudantes em cursos regulares onde é desejável que o professor já tenha trabalhado anteriormente com o tema para que o desenvolvimento do curso flua normalmente, segundo Bassanezi (2014). A pesquisa que originou esta dissertação teve como público-alvo 18 discentes nos primeiros semestres do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BC&T).

Através da inspeção de pesquisas de autores que utilizavam teorias de ensino-aprendizagem voltadas para as ciências exatas, identificou-se em trabalhos como Da Silva (2011), Bassanezi (2014), Carius, Júnior e Da Silva (2017) e Da Silva, Jardim e Carius (2016), a Modelagem Matemática como importante perspectiva para contextualização das funções exponenciais e logarítmicas.

Alguns projetos de iniciação científica utilizando a Modelagem Matemática realizados no campus do Mucuri da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) que geraram publicações científicas como Nascimento et al. (2015), Lopes et al. (2016), Frisso et al. (2017), Prates et al. (2015), Prates et al. (2016), Da Silva, Godinho e Moraes (2016) e Da Silva, Jardim e Carius (2016), influenciaram a escolha da modelagem como ferramenta de ensino.

4.1 Como fazer Modelagem Matemática?

As etapas do processo de Modelagem Matemática, segundo Bassanezi e Ferreira Junior (1988) e Bassanezi (2014), envolvem **Experimentação**, **Abstração**, **Resolução**, **Validação** e **Modificação**. Este processo pode ser cíclico, sempre visando a melhora do modelo criado.

A Modelagem Matemática funciona da seguinte maneira: após a obtenção dos dados empíricos e da organização de tais informações, inicia-se a etapa de **Experimentação**, onde o modelador procura padrões para formular as hipóteses durante o processo de **Abstração**. Neste momento, o problema é traduzido para a linguagem matemática para ser resolvido durante o processo de **Resolução**. As soluções obtidas são confrontadas com os dados empíricos durante a **Validação** e, dependendo da sua usabilidade, poderá ser alterado durante a **Modificação**, conforme pode ser visualizado na Figura 3.

Figura 3 – Organograma mostrando a inter-relação das etapas da Modelagem Matemática.

Fonte: Produzida pelo autor.

Durante as etapas descritas anteriormente, o modelador deve possuir técnicas elementares de tradução do problema estudado para a linguagem matemática. Para esta finalidade, além de ter conhecimento matemático suficiente, deve também conhecer problemas clássicos para poder empregar as técnicas conhecidas em novas situações. O pesquisador modelador deve sempre ser crítico em relação às falhas dos modelos usuais, procedendo de maneira criativa quando as técnicas existentes são insuficientes. O pesquisador deve também ter organização dos dados obtidos e saber cooperar com especialistas da área de cada fenômeno estudado, de acordo com Bassanezi (2014).

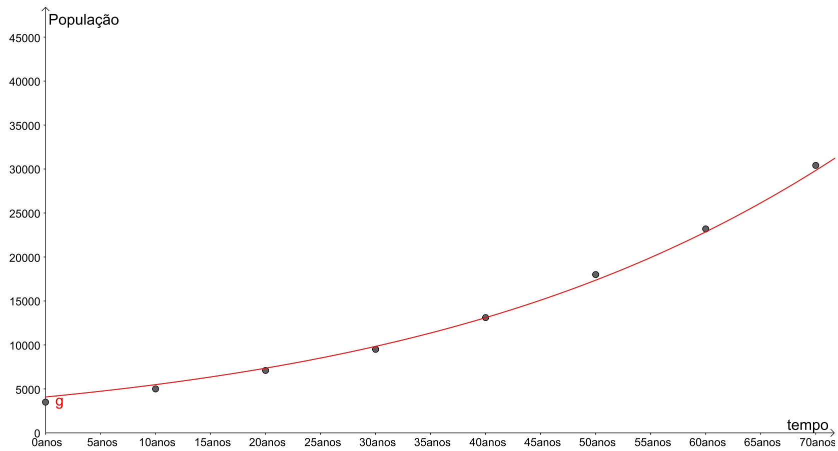
Ao se fazer Modelagem Matemática, são necessárias algumas técnicas, das quais Bassanezi (2014) relaciona como **Formulação de Problemas**, **Ajuste de Curvas**, **Variações**, **Equações de Diferenças** e **Equações Diferenciais Ordinárias**.

A **Formulação de Modelos**, precedida pela coleta de dados, pode ser divida em *estática*, onde a variável *tempo* não é requisitada; e dinâmica, onde a variável *tempo* é a variável independente.

O **Ajuste de Curvas** ou regressão, constrói uma relação funcional através de dados estatísticos. Utilizando técnicas como o Método dos Mínimos Quadrados, o pesquisador pode relacionar os dados por um Ajuste Linear, Quadrático, Exponencial, Geométrico ou Hiperbólico.

Atualmente, planilhas eletrônicas ou o *software* GeoGebra, como mostrado na Figura 4, por exemplo, realizam a regressão em tempo reduzido em relação aos cálculos manuais, possibilitando ao pesquisador ter mais tempo para se dedicar e dar mais enfoque para a análise do modelo.

Figura 4 – Ajuste de Curva Hiperbólico produzido no GeoGebra



Fonte: Produzida pelo autor.

As **Variações** são divididas em *discretas*, quando têm-se um conjunto finito de dados observados que corresponde à uma sequência finita de valores: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e *contínuas*, onde todos os valores intermediários entres os valores discretos podem ser assumidos.

Definição 6 *Conjunto Discreto - Um conjunto é dito discreto quando existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos e um subconjunto dos números naturais.*

Na Modelagem Matemática, muitas vezes as variáveis consistem de sequências finitas de dados $\{x_n\}$, $n = 1, 2, ..., k$ que representam conjuntos discretos. O essencial é descobrir como essas sequências podem ser tratadas como contínuas.

As **Equações de Diferenças** ou recorrências são apropriadas quando lida-se com variações discretas. Elas podem ser classificadas como lineares de 1ª e 2ª ordens e não lineares de 1ª ordem.

Sejam α_i constantes, $m < n$ e $(n - m)$ condições iniciais das equações lineares de ordem $(n - m)$, estas equações têm o formato:

$$y_n = \alpha_{n-1}y_{n-1} + \alpha_{n-2}y_{n-2} + \cdots + \alpha_m y_m, \tag{10}$$

Na equação (10) quando $n-m=1$, para a condição inicial y_0 tem-se o sistema:

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} \\ y_0 \end{cases}$$

que pode ser resolvido recursivamente da seguinte maneira:

Demonstração 7

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_0 \\ y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha y_{n-1} = \alpha^n y_0 \end{aligned}$$

Fazendo o produto destas equações tem-se:

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = \alpha y_0 \cdot \alpha y_1 \cdot \ldots \cdot \alpha y_{n-1} \tag{11}$$

Como ambos os lados da equação (11) possuem fatores $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$, *com* $y_i \neq 0$, *então dividindo cada lado pelo produto* $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_{n-1}$ *tem-se:*

$$y_n = \alpha^n y_0 \tag{12}$$

■

Na equação (10) quando $(n-m)=2$ tem-se uma equação de diferenças de 2ª ordem. Esta equação, com y_0 e y_1 dados é da forma:

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \tag{13}$$

Em Lima et al. (2012b), tem-se detalhadamente uma explicitação sobre as equações de diferenças de 2ª ordem, referidas pelos autores como recorrências lineares de 2ª ordem. Agora, seja $b \neq 0$ na equação (13), pois caso contrário esta seria uma recorrência linear de 1ª ordem. Agora, como a equação (13) é homogênea associa-se a ela uma equação característica do 2º grau, assim tem-se:

$$p^2 = ap + b \tag{14}$$

Teorema 6 *Caso p_1 e p_2 sejam as raízes de $p^2 = ap + b$, então $x_n = K_1p_1^n + K_2p_2^n$ é solução da recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$, para quaisquer K_1 e K_2.*

Demonstração 8 *Teorema 6*
Substituindo $x_n = K_1p_1^n + K_2p_2^n$ em $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$ e após manipular-se os termos, obtém-se:

$$K_1p_1^n(p_1^2 + ap_1 + b) = K_2p_1^n(p_2^2 + ap_2 + b) = K_1p_1^n0 + K_2p_2^n0 = 0$$

■

Quando se tem **Equações de Diferenças não lineares (1ª ordem)** do tipo (15), com f sendo combinação não linear de y_n, na maioria das vezes não é possível obter soluções analíticas para tal função. Um modo de analisar o comportamento de tais equações é encontrando seus pontos de equilíbrio.

$$y_{n+1} = f(y_n) \tag{15}$$

Definição 7 *O ponto de equilíbrio ou de estabilidade de uma equação de diferença ocorre quando não há variação ao se passar do estágio n para o estágio $n + 1$, ou seja:*

$$y_{n+1} = y_n = y^* \tag{16}$$

As **Equações Diferenciais Ordinárias** ou **EDO's** são utilizadas quando os modelos possuem variações contínuas. Neste caso, as taxas de variações são instantâneas.

Definição 8 *Equação Diferencial (ED) - Equação contendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, segundo Zill (2003).*

Uma explanação mais detalhada sobre Equações Diferenciais pode ser obtida em Bassanezi e Ferreira Junior (1988) e Zill (2003). Contudo, neste presente texto, será apresentado apenas o caso particular de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem.

A ordem de uma Equação Diferencial é ditada pela ordem da maior derivada que aparece em sua concepção. Quando a derivada de maior ordem é a primeira então tem-se uma **EDO** de 1ª ordem cujo formato é:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{17}$$

A solução geral da equação (17) é uma família de curvas do tipo $y = g(x)$ onde $f(x, y)$ é a direção de cada reta tangente em cada ponto (x, y). Quando um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é fixado tem-se uma solução particular do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{18}$$

No sistema (18) quando $f(x, y) = F(x)$ e $y = f(x)$ tem-se, **Demonstração 9**:

Demonstração 9 *Utilizando o procedimento de resolução para equações diferenciais separáveis visto em Zill (2003, pp. 44–45):*

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= F(x) \\ df(x) &= F(x)dx \\ f(x) &= \int F(x)dx \end{aligned} \tag{19}$$

As funções $f(x)$ e $g(x)$ têm a mesma derivada em um intervalo I, então

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c, \;\; x \in I$$

Agora basta utilizar a condição inicial $y(x_0) = y_0$ e encontrar a solução particular que satisfaz esta condição.

■

Os modelos de Crescimento e Decaimento utilizados na pesquisa, parte integrante deste trabalho, têm na sua formulação equações da forma (17).

Muitas vezes não é possível obter uma solução analítica de uma **EDO**. Então faz-se necessária a utilização de métodos para aproximar a solução. Uma técnica útil neste contexto para a representação gráfica da solução de uma equação diferencial de primeira ordem é esboçar o **campo de direções** para a equação, de acordo com Nagle, Saff e Snider (2012).

Definição 9 *Campo de direções*

As curvas integrais soluções de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) do tipo (17) *são tais que em cada ponto* (x, y) *a reta tangente à curva integral passando pelo ponto tem coeficiente angular*

$$m = f(x, y)$$

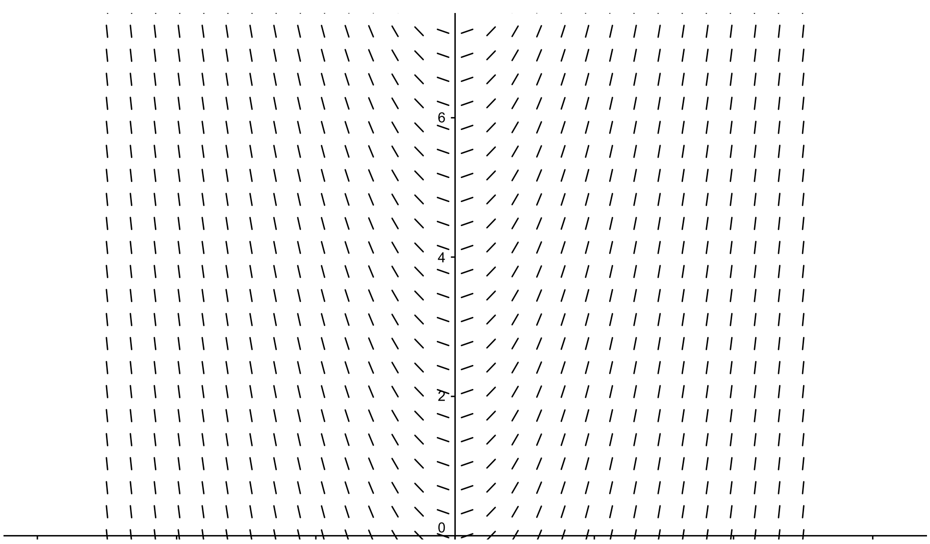
O método geométrico para entender aproximadamente como deveriam ser as curvas integrais da EDO sugere que se trace um pequeno segmento de reta em cada ponto (x, y) *com coeficiente angular* m*, o conjunto destes segmentos é denominado Campo de Direções da EDO.*

Na Figura 5 tem-se um campo de direções da EDO (20):

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{20}$$

Este campo de direções sugere que as soluções desta EDO sejam funções do tipo $f(x) = x^2 + C$, o que de fato é confirmado quando se resolve a EDO referida, utilizando-se o processo da **Demonstração 9**.

Figura 5 – Campo de direções da EDO $\frac{dy}{dx} = 2x$



Fonte: Produzida pelo autor.

4.2 Os modelos utilizados

No processo de modelagem, a escolha do instrumental matemático é fundamental, principalmente em se tratando de promover o conhecimento matemático. Assim, num ambiente de estudo um modelo simples, mesmo que não reproduza perfeitamente os dados experimentais, pode ser bastante eficiente no contexto educacional. Um modelo matemático é bom quando satisfaz algum objetivo e quando o usuário o considera como tal, de acordo com Bassanezi (2012).

Os modelos de crescimento relacionam-se a fenômenos onde as quantidades iniciais tendem a crescer de um instante t_0 para o instante t_f, com $t_0 < t_f$, sendo que este crescimento ocorre de forma monótona (não ocorre decaimento em nenhum instante durante o processo).

Os modelos de decaimento relacionam-se a fenômenos onde as quantidades iniciais tendem a decair (diminuir) de um instante t_0 para o instante t_f, com $t_0 < t_f$, sendo que este crescimento ocorre de forma monótona (não ocorre crescimento em nenhum instante durante o processo).

Todos os modelos utilizados durante as fases de planejamento e execução do projeto possuem taxa de variação (de crescimento ou decaimento) proporcionais à quantidade (concentração, temperatura, população, etc.) em cada instante. Desta forma, para melhor compreensão dos modelos que serão apresentados nesta subseção, faz-se necessária a definição de proporcionalidade.

Definição 10 *Proporcionalidade*

Função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c e x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$, para $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa)

Tradicionalmente, esta definição é equivalente a dizer que a grandeza y é proporcional à grandeza x quando existe um número α (denominado constante de proporcionalidade), tal que $y = \alpha x$ para todo valor de x se as grandezas forem diretamente proporcionais e para $x, y \neq 0$ se as grandezas forem inversamente proporcionais, de acordo com Lima et al. (2012a)

Inicialmente, durante a aplicação do que foi previsto para as atividades do projeto, o pesquisador utilizou os roteiros de construção que foram desenvolvidos durante a fase de planejamento. Os modelos utilizados neste projeto serão descritos nos parágrafos a seguir.

Modelo 1: Eliminação de Álcool

Quanto mais um modelo matemático se aproxima das condições reais de um fenômeno, mais elaboradas e de difícil resolução ficam suas equações. Para o fenômeno da Eliminação de álcool ingerido existem modelos mais complexos como o previsto em Ludwin (2011), que leva em conta a concentração de álcool no estômago após a ingestão, a taxa de absorção de álcool na corrente sanguínea e a taxa em que o álcool é metabolizado pelo fígado.

Nesta pesquisa, foi considerado que a taxa de eliminação do álcool ingerido em um determinado instante é proporcional à quantidade de álcool ingerido no instante referido.

A fase de coleta de dados ocorreu através de pesquisa bibliográfica, juntando informações de pesquisadores que já trabalharam com o referido modelo, tais como Bassanezi (2014) e Sanches e Rodrigues (2015) e que já fizeram a parte da **Experimentação**.

Durante a **Abstração**, supôs-se que o volume do sangue no organismo é constante e que a eliminação do álcool ocorre apenas pela respiração. Porém, em Centro (2005) é exposto que o álcool é eliminado majoritariamente pela urina com apenas cerca de 5% sendo eliminado por meio da respiração, transpiração e salivação. Supôs-se também que, a partir do início da eliminação do álcool, não ocorre mais ingestão desta substância.

Um fator importante de ser destacado é que apenas de 2% a 10% do álcool absorvido é eliminado inalterado, o restante é oxidado no organismo, segundo Bassanezi (2014).

De acordo com a **Definição 10**, para a concentração C, medida em g/l (gramas por litro de álcool) ser proporcional à taxa de eliminação de álcool ingerido $\frac{dC}{dt}$ medida em $g/l/min$ (gramas por litro por minuto) deve haver um α tal que:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \cdot C \tag{21}$$

Como no fenômeno da eliminação do álcool tem-se um problema de decaimento, já que a quantidade diminui com o passar do tempo, então considera-se $\alpha = -k$. Daí, a equação (21) fica da seguinte maneira:

$$\frac{dC}{dt} = -k \cdot C \tag{22}$$

Como foi suposto que a eliminação do álcool ocorre exclusivamente pelos pulmões, então a taxa de eliminação de álcool pelos pulmões é $k = 0,0075\ g/l/min$. Este valor foi obtido por experimentação durante um curso de modelagem citado em Bassanezi (2014).

Escrevendo agora $C = C(t)$, ou seja a concentração referida como uma função de t e considerando a concentração inicial no instante t_0 como $C(t_0) = C_0$ tem-se um problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = -kC \\ \\ C(t_0) = C_0 \end{cases} \tag{23}$$

Na fase de **Resolução** do sistema (23) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -0,0075C \\ dC &= -0,0075Cdt \\ \frac{1}{C}dC &= -0,0075dt \\ \int \frac{1}{C}dC &= \int -0,0075dt \end{aligned} \tag{24}$$

Calculando-se estas integrais tem-se:

$$\begin{aligned} \ln(C) &= -0,0075t + \beta \\ e^{\ln(C)} &= e^{-0,0075t+\beta} \\ C &= e^{-0,0075t+\beta} \\ C &= \beta_1 e^{-0,0075t} \end{aligned} \tag{25}$$

Utilizando-se $C(t_0) = C_0$ com $t_0 = 0$ na equação (25) tem-se:

$$\begin{aligned} C(t_0) &= \beta_1 e^{-0,0075t_0} \\ C_0 &= \beta_1 e^{-0,0075\cdot 0} \\ \beta_1 &= C_0 \end{aligned} \tag{26}$$

Substituindo (26) na equação (25) tem-se a solução particular do sistema (23):

$$C(t) = C_0 e^{-0,0075t} \tag{27}$$

Durante a fase de **Validação** deste modelo, é importante ressaltar que foram ignorados vários fatores como peso do indivíduo, gênero, idade, nível de sedentarismo e outros fatores que interferem no processo de eliminação do álcool de cada organismo.

A partir da fórmula (27) é possível, por exemplo, responder à Questão 1 a seguir:

Questão 1 *Suponha que a legislação brasileira permita a um motorista dirigir tendo a concentração de* $0,1g/l$ *de álcool no organismo. Depois de quantos minutos um indivíduo, que tem uma concentração de* $0,6g/l$*, poderá estar apto a guiar um veículo?*

Resolução:

$$\begin{aligned} 0,1 &= 0,6e^{-0,0075t} \\ 1 &= 6e^{-0,0075t} \\ \ln(1) &= \ln(6e^{-0,0075t}) \\ \ln(1) &= \ln(6) + \ln(e^{-0,0075t}) \\ 0 &= \ln(6) - 0,0075t\ln(e) \\ t &= \frac{\ln(6)}{0,0075} \approx 239\ min \end{aligned} \tag{28}$$

Por (28) nota-se que em aproximadamente 6 horas o indivíduo estaria apto a dirigir.

A fase de **Modificação** deste modelo se daria de acordo com as novas hipóteses inseridas durante a comparação dos dados experimentais e os dados obtidos através da solução. O modelo evoluiria de acordo com as novas necessidades dos atores do processo da modelagem.

Modelo 2: Lei de Resfriamento de Newton

Em Zill (2003) é descrita a lei empírica, derivada da experimentação e atribuída a Isaac Newton, a qual assegura que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença de temperatura do corpo e do ambiente em que o mesmo está inserido.

O modelo a ser exposto é simplista. Em Nagle, Saff e Snider (2012), Sartorelli, Hosoume e Yoshimuray (1999) e Sias e Teixeira (2006) tem-se a utilização de mais parâmetros e eventual complexificação do modelo.

A coleta de dados também ocorreu através de pesquisas bibliográficas, juntando informações de pesquisadores que já trabalharam com o referido modelo, tais como Zill (2003), Sartorelli, Hosoume e Yoshimuray (1999), Sias e Teixeira (2006) e Nagle, Saff e Snider (2012) e que já fizeram a fase de **Experimentação**.

Durante a **Abstração**, supôs-se que a temperatura do ambiente T_a é constante e desprezou-se a geometria do corpo.

Desta maneira, de acordo com a **Definição 10** para a diferença de temperatura $(T - T_a)$, medida em $°C$ (graus Celsius) ser proporcional à taxa de resfriamento do corpo $\frac{dT}{dt}$ medida em $°C/min$ (graus Celsius por minutos) deve haver um α tal que:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot (T - T_a) \tag{29}$$

Na Lei do resfriamento de Newton tem-se um problema de decaimento, já que a quantidade diminui com o passar do tempo, então considera-se $\alpha = -k$. Daí, a equação (29) fica da seguinte maneira:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_a) \tag{30}$$

Escrevendo agora $T = T(t)$, ou seja a temperatura referida como uma função de t e considerando temperatura no instante inicial t_0 como $T(t_0) = T_0$ tem-se um problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \\ \\ T(t_0) = T_0 \end{cases} \tag{31}$$

Na fase de **Resolução** do sistema (31) tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= -k(T - T_a) \\
dT &= -k(T - T_a)dt \\
\frac{1}{(T - T_a)}dT &= -kdt \\
\int \frac{1}{(T - T_a)}dT &= \int -kdt \\
\ln((T - T_a)) &= -0,0075t + \beta \\
e^{\ln(T - T_a)} &= e^{-kt+\beta} \\
T - T_a &= e^{-kt+\beta} \\
T &= T_a + \beta_1 e^{-kt} \qquad (32)
\end{aligned}$$

Sendo $T = T(t)$ e utilizando-se $T(t_0) = T_0$ com $t_0 = 0$ na equação (32) tem-se:

$$\begin{aligned} T(t_0) &= T_a + \beta_1 e^{-kt_0} \\ T_0 &= T_a + \beta_1 e^{-k \cdot 0} \\ \beta_1 &= (T_0 - T_a) \end{aligned} \tag{33}$$

Substituindo (33) na equação (32) tem-se a solução particular do sistema (31):

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \tag{34}$$

Durante a fase de **Validação** desse modelo, é importante ressaltar que foram ignorados vários fatores, tais como a geometria do corpo, a área de contato do corpo com o ar e outros fatores que interferem no resfriamento.

A constante k varia com o material do qual é feito o corpo, sua massa e sua condutividade térmica. Experimentalmente aproxima-se o valor de k para um corpo através de aferições da temperatura deste corpo em instantes de tempo diferentes.

A fase de **Modificação** deste modelo se daria de acordo com as novas hipóteses inseridas durante a comparação dos dados experimentais e os resultados obtidos através da discussão do comportamento da solução. O modelo evoluiria de acordo com as novas necessidades dos atores do processo da modelagem.

Modelo 3: Crescimento Populacional de Malthus

Thomas R. Malthus (1766-1834) foi um economista britânico que estudou os modelos de população, de acordo com Nagle, Saff e Snider (2012). Em Alves (2002) e Malthus (1983) encontram-se mais detalhes sobre a vida e obra deste economista.

O modelo malthusiano é o mais simplista quando se trata de crescimento populacional. Várias concessões são feitas neste modelo como as taxas de fertilidade e de mortalidade serem constantes e não existirem fatores inibidores do crescimento.

Malthus apresentou no ano de 1798, o modelo onde tentava descrever matematicamente o crescimento da população humana. Neste modelo o crescimento da população humana se dava em progressão geométrica e os meios de sobrevivência cresciam em progressão arimética. Este economista considerou em seu modelo que o número de indivíduos de uma determinada população se modifica apenas por conta de nascimentos e mortes, sem processos migratórios, durante o período de tempo observado.

Neste modelo, o número de indivíduos $P(t)$ em uma população depende do tempo, sendo uma função discreta de t, já que a população assume valores inteiros. Quando o número de indivíduos é suficientemente grande, $P(t)$ pode ser aproximada para uma função contínua, de acordo com Bassanezi (2014).

No modelo discreto, sendo t_n a taxa de natalidade e t_m a taxa de mortalidade, então $k = t_n - t_m$ será a taxa de crescimento específico da população. Considerando k constante, então a taxa de crescimento relativo de uma população será:

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = k \cdot P(t) \tag{35}$$

Ou seja, o modelo discreto de Malthus, com $P(0) = P_0$, sugere que:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1+k)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{36}$$

A recorrência (36) é resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_1 &= (1+k)P_0 \\ P_2 &= (1+k)P_1 \\ &\vdots \\ P_n &= (1+k)P_{n-1} \end{aligned}$$

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n = (1+k)P_0 \cdot (1+k)P_1 \cdot \ldots \cdot (1+k)P_{n-1} \tag{37}$$

Como ambos os lados da equação (37) possuem fatores $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$, com $P_i \neq 0$, então dividindo cada lado pelo produto $P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_{n-1}$ tem-se:

$$P_n = P_0(1+k)^n \tag{38}$$

Considerando o modelo contínuo, tem-se o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{39}$$

Após resolver o sistema (39), semelhantemente como foi feito nos modelos de Eliminação de álcool e da Lei de resfriamento de Newton, tem-se como solução:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \tag{40}$$

O modelo Malthusiano mostra-se ineficaz em grandes intervalos de tempo como é explicitado em Bassanezi (2014). Em Da Silva et al. (2013) tem-se uma descrição da utilização dos modelos malthusiano e logístico (que será explicitado a seguir) para analisar parâmetros populacionais de municípios do nordeste mineiro.

Modelo 4: Crescimento Populacional Logístico contínuo (Verhulst)

Pierre F. Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que em 1837 formulou o modelo de crescimento populacional, baseado na avaliação de estatísticas disponíveis e na teoria do crescimento exponencial, com termos representando os fatores de inibição do crescimento. Basicamente, este modelo é o aprimoramento do que foi proposto por Malthus, segundo Bassanezi (2014).

A equação é apresentada supondo-se que a população irá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. Considere a taxa de crescimento uma função em t proporcional à população em cada instante:

$$\beta(P) = r\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \tag{41}$$

Fazendo $k = \beta(P)$ na equação de Malthus obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = r\left(\dfrac{P_\infty - P}{P_\infty}\right)P \\ P(0) = P_0, \quad r > 0 \end{cases} \tag{42}$$

No sistema (42) a taxa de variação $\dfrac{dP}{dt}$ tende a zero quando a população P tende ao valor limite P_∞. Para encontrar a solução do sistema (42) utiliza-se a separação das variáveis e a técnica de frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= rP(1 - \frac{P}{P_\infty}) \\ \int \frac{dT}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \int r dt \\ \int \left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P_\infty}}{1 - \frac{P}{P_\infty}}\right) &= \int r dt \\ \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right| &= rt + C \\ \ln\left|\frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}}\right| &= rt + C \\ e^{\ln\left|\frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}}\right|} &= e^{rt+C} \\ \frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}} &= e^{rt+C} \\ \frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)} &= e^{rt+C} \end{aligned} \tag{43}$$

Utilizando-se $P(0) = P_0$ na equação (43) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{P(0)P_\infty}{P_\infty - P(0)} &= e^{r\cdot 0 + C} \\ \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} &= e^{C} \qquad (44)\end{aligned}$$

Substituindo-se (44) em (43) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)} &= e^{rt}\cdot\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \\ \frac{P(t)}{P_\infty - P(t)} &= e^{rt}\cdot\frac{P_0}{P_\infty - P_0} \\ P(t) &= e^{rt}\cdot\frac{P_0}{P_\infty - P_0}\cdot(P_\infty - P(t)) \\ P(t)\left(1 + e^{rt}\cdot\frac{P_0}{P_\infty - P_0}\right) &= e^{rt}\cdot\frac{P_0}{P_\infty - P_0}\cdot P_\infty \\ P(t)\left(\frac{P_\infty - P_0 + e^{rt}P_0}{P_\infty - P_0}\right) &= \frac{e^{rt}P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \\ P(t)(P_\infty - P_0 + e^{rt}P_0) &= e^{rt}P_0 P_\infty \\ P(t) &= \frac{e^{rt}P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0 + e^{rt}P_0} \\ P(t) &= \frac{e^{rt}P_0\cdot P_\infty}{e^{rt}P_0\cdot\left(\frac{P_\infty}{e^{rt}P_0} - \frac{1}{e^{rt}}\right) + 1} \\ P(t) &= \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{e^{rt}P_0} - \frac{1}{e^{rt}} + 1\right)} \\ P(t) &= \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} \qquad (45)\end{aligned}$$

$P(t)$ na expressão (45) é denominada *Curva Logística*. Nesta expressão é perceptível que se t tende ao infinito então $\dfrac{\left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right)}{e^{rt}}$ tende a zero e consequentemente $P(t)$ tende a P_∞. Em outras palavras, ao longo do tempo a população tende a se estabilizar a valores próximo da população suporte.

Neste momento, será mostrado um modelo utilizado em vários livros do PNLD, como visto em Oliveira (2014).

Modelo 5: Decaimento Radioativo

De acordo com Çengel e Palm III (2014), os materiais que emitem radiações como Plutônio, Urânio, Rádio e Carbono 14, decaem naturalmente para isótopos do mesmo elemento ou ainda se tornam outros elementos. A taxa de decaimento é proporcional à quantidade do elemento naquele instante. Este processo de decaimento é descrito pela equação linear de primeira ordem:

$$\frac{dM}{dt} = -kt \tag{46}$$

A constante k é conhecida como constante de desintegração e $M(t)$ é a quantidade de material radioativo em função do tempo. Sendo $M(0) = M_0$ a massa inicial do elemento, tem-se então o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -kt \\ M(0) = M_0 \end{cases} \tag{47}$$

O sistema (47) pode ser resolvido analogamente ao que que foi feito no Modelo de Eliminação de álcool. A solução é dada por:

$$M(t) = M_0 e^{-kt} \tag{48}$$

Os físicos em vez de usarem a constante de $\tau = \dfrac{1}{k}$ para estimarem o tempo de decaimento, utilizam a **meia vida**, que representa o tempo necessário para que a massa do material radioativo decaia pela metade. A **meia vida** de vários materiais foi obtida experimentalmente em laboratórios e está tabulada em várias publicações científicas, de acordo com Çengel e Palm III (2014).

Após a meia vida, a quantidade de material radioativo inicial se reduz pela metade, ou seja, $M(t) = \dfrac{M_0}{2}$. Para encontrar uma fórmula que relacione a meia vida com a constante k, faz-se:

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{2} &= M_0 e^{-kt} \\ \frac{1}{2} &= e^{-kt} \\ 2e^{-kt} &= 1 \\ \ln(2e^{-kt}) &= \ln(1) \\ \ln(2e^{-kt}) &= 0 \\ \ln(2) - kt &= 0 \\ k &= \frac{\ln(2)}{t} \end{aligned} \tag{49}$$

Utilizando a fórmula (49) e o tempo de meia de vida do material radioativo, encontra-se a constante de decaimento ou desintegração do elemento requerido.

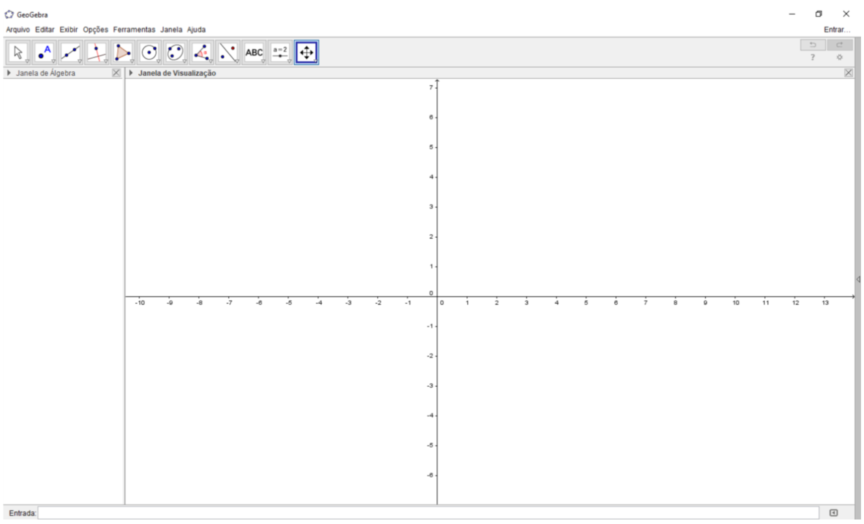
4.3 Sequências Didáticas utilizando a Modelagem Matemática e o GeoGebra

Nesta subseção serão apresentadas e descritas as Sequências Didáticas (SD) que compõem as etapas da pesquisa. Levando em consideração a etapa de análise *a priori* da Engenharia Didática, as variáveis locais, referentes a cada SD, serão relacionadas, bem como os meios de viabilização da elaboração e aplicação das SD's. Além disso, inicialmente uma breve descrição do *software* GeoGebra será apresentada, bem como algumas de suas funcionalidades.

4.3.1 O software GeoGebra

O GeoGebra[1] é um *software* dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo, em um pacote fácil de usar. Este *software* possui muitos usuários ao redor do mundo e é líder, apoiando ciência, tecnologia, engenharia, matemática e inovação no processo de ensino-aprendizagem em todo o mundo. A Figura 6 apresenta a tela inicial da versão 5.0.139.0 para o sistema operacional *Windows*.

Figura 6 – Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Produzida pelo autor.

Para mais informações sobre os comandos básicos e exemplos de trabalhos feitos com o uso deste *software*, podem ser usados como fontes de pesquisa o manual disponível no site oficial do projeto Geogebra[2], em alguns canais do *Youtube* e em referências

[1]Disponível em https://www.geogebra.org/download
[2]<http://wiki.geogebra.org/pt/Manual>

de autores como Giraldo, Caetano e Mattos (2012), Dantas e Ferreira (2014) e Dantas (2016).

O site O GEOGEBRA[3] é um importante canal de divulgação de materiais educativos produzidos com o *software*. Segundo a descrição encontrada no próprio site: *''Este site é um espaço para a divulgação do software GeoGebra. Disponibilizamos materiais e recursos para capacitar usuários em seus aspectos técnicos e para fomentar reflexões sobre seu uso em situações de ensino e aprendizagem.''*

O conhecimento e escolha deste *software* como ferramenta auxiliar durante o processo de pesquisa ocorreu devido às leituras e análises de trabalhos de pesquisadores do Campus Mucuri da UFVJM e que resultaram em publicações como Jardim et al. (2015), Da Silva, Jardim e Carius (2016) e Pereira, Da Silva e Jardim (2017).

A partir deste momento, serão descritos os roteiros de construção utilizados durante a fase de experimentação da pesquisa. Estes roteiros utilizaram as abas de criação de ''Texto'', ''Controle Deslizante'' e os comandos ''CampoDeDireções[ ]'', ''ResolverEDO[ ]'', ''AnimarConstruçãoDoGráfico[ ]'' digitados no campo de ''Entrada'' do *software*.

4.3.2 As Sequências Didáticas

As SD utilizadas durante a fase de execução do projeto de pesquisa, foram elaboradas objetivando a simplicidade de manipulação, sem deixar de lado a coerência com os modelos estudados, bem como, a consistência das definições matemáticas.

As SD foram divididas em duas partes: a primeira parte composta das Aulas 01 e 02, com aulas teóricas sem utilização do GeoGebra. A segunda parte composta das Aulas 03, 04 e 05 utilizando os modelos com o auxílio do GeoGebra.

A primeira parte serviu de preparação para as etapas utilizando o a modelagem matemática e o *software* GeoGebra, portanto não haverá hipotéses investigadas nesta etapa.

Aula 01:

A Aula 01 foi composta pela apresentação teórica, de 60 minutos, sobre as funções exponenciais e logarítmicas segundo Lima et al. (2012a) e Lima (2013) visando apresentar aos discentes algumas noções básicas sobre as funções supracitadas. Após a explicação, os estudantes responderam ao questionário 01, referente ao que foi discutido na apresentação.

Desta forma, ao responder ao questionário 01, é esperado que o estudante relacione conceitos relativos às definições e caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas.

[3] <http://www.ogeogebra.com.br>

Aula 02:

A Aula 02 durou 80 minutos e abordou algumas noções de Modelagem Matemática. Ainda nesta aula, noções de equações diferenciais e de diferenças, noções de funções contínuas e discretas foram apresentadas aos estudantes. O objetivo era propiciar aos discentes uma melhor compreensão sobre as etapas do processo de modelagem.

É esperado, ao responderem o questionário 02, que o discente relacione corretamente ideias referentes aos seguintes itens: i) modelagem matemática; ii) equações diferenciais; iii) equações de diferenças; iv) funções contínuas e funções discretas.

A segunda etapa das SD contou com o auxílio do GeoGebra ao longo das aulas 03, 04 e 05. Nesta segunda etapa, a Modelagem foi utilizada na apresentação e discussão dos modelos propostos.

O público alvo foi composto de 18 discentes dos semestres iniciais do BC&T da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. O desenvolvimento das atividades ocorreu no Laboratório de Simulação Computacional no Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia, da UFVJM, durante o mês de Fevereiro de 2017.

Aula 03:

Para a Aula 03, os roteiros criados serão descritos detalhadamente a seguir. Cada passo dos roteiros serão identificados por 1º passo, 2º passo,... e assim por diante.

Além de serem observados pelo pesquisador durante as atividades, os estudantes responderam, no final, ao questionário 03. Este questionário auxiliou na análise *a posteriori* das atividades.

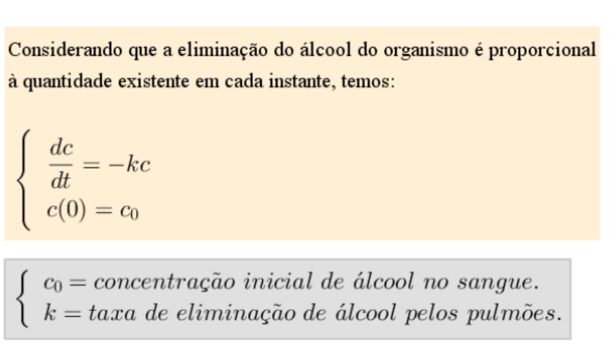
Modelo: "Eliminação de álcool ingerido"

No GeoGebra:

1º Passo: A partir da análise da teoria relacionada ao fenômeno, as hipóteses deveriam ser relacionadas.

O objetivo do **1º passo** foi possibilitar aos discentes a organização de algumas informações sobre o fenômeno estudado. Com as informações coletadas na *internet*, em livros de física e de cálculo, os estudantes deveriam utilizar a ferramenta de texto, bem como alguns comandos básicos em LaTeX, para relacionar na tela do GeoGebra as informações pertinentes ao fenômeno. Na Figura 7 há um exemplo de como este procedimento deveria ser feito;

Figura 7 – Relacionando as hipóteses.



Considerando que a eliminação do álcool do organismo é proporcional à quantidade existente em cada instante, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -kc \\ c(0) = c_0 \end{cases}$$

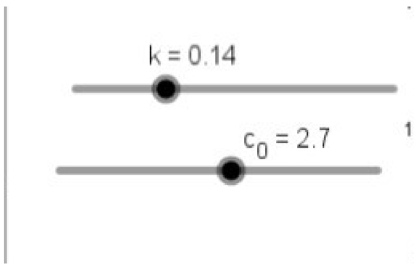
$$\begin{cases} c_0 = \textit{concentração inicial de álcool no sangue.} \\ k = \textit{taxa de eliminação de álcool pelos pulmões.} \end{cases}$$

Fonte: Produzida pelo autor.

Assim, era esperado pelo professor que o estudante, a par de informações significantes contidas nos livros e *internet*, extraísse as ideias relevantes do fenômeno de eliminação de álcool ingerido, para converter em linguagem matemática.

2º Passo: Os controles deslizantes, com as constantes, seriam criados, Figura 8;

Figura 8 – Criando os controles deslizantes.



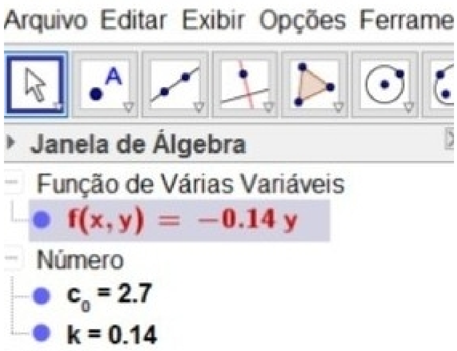
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **2º passo** foi mostrar aos discentes como as constantes relacionadas à este fenômeno poderiam assumir valores contínuos específicos em um intervalo.

No **2º passo**, era esperado que o discente criasse um controle deslizante com intervalo pertinente para cada constante.

3º passo: Adotando $t = x$ e $c = y$ a função de duas variáveis $f(t, c) = -kc$ seria criada, Figura 9;

Figura 9 – Criando função de duas variáveis $f(x, y)$.



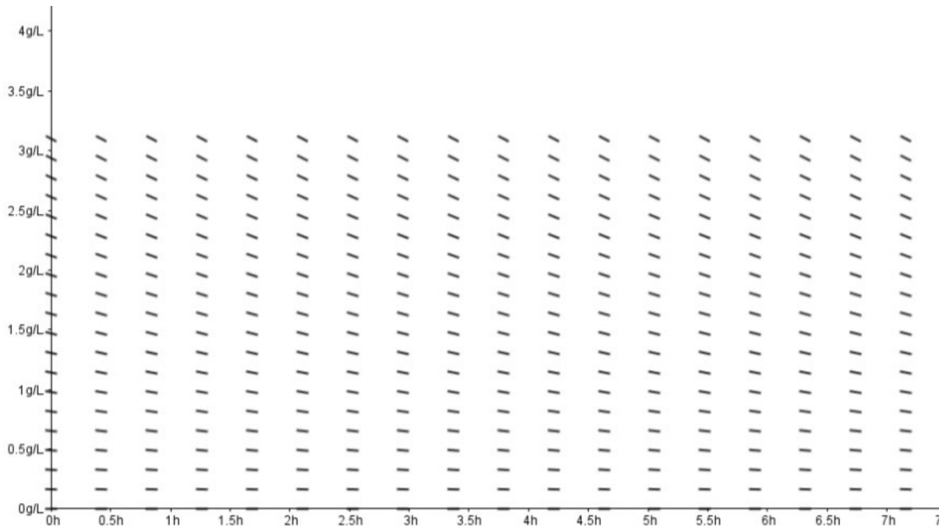
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **3º passo** foi definir uma função de duas variáveis $f(x, y)$.

Neste passo era esperado que o discente conseguisse vincular uma função de duas variáveis relacionada à equação diferencial $\dfrac{dc}{dt} = -kc$.

4º passo: Criação do campo de direções, com o comando: CampoDeDireções [<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>], referente à função $f(x, y)$, com x sendo o tempo decorrido em horas e y a concentração de álcool em gramas por litro. Desta maneira, este campo de direções mostra a tendência da concentração em relação ao tempo. Isto é feito antes de se trabalhar com a resolução da equação diferencial referente ao problema, Figura 10;

Figura 10 – Criando o campo de direções de $f(x, y)$.



Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo deste passo foi mostrar ao discente uma possibilidade de visualização gráfica do comportamento do fenômeno em relação ao tempo, sem ainda ter resolvido a equação diferencial. Os discentes utilizando as possibilidades: <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y> deveriam ajustar a melhor visualização do campo de direções por meio de tentativas e erros.

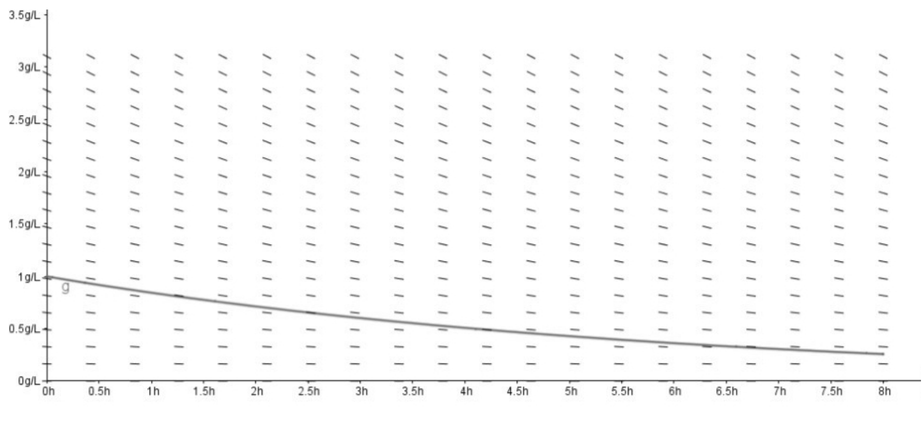
Esperava-se que o discente vinculasse o campo de direções às possíveis soluções do sistema de equação diferencial relacionado ao fenômeno. Também era esperado que o discente conseguisse visualizar como o decaimento da concentração ocorreria.

5º passo: Resolução do problema de valor inicial (50) com o auxílio do comando: ResolverEDO[<f(x, y)>, <Ponto de f>], Figura 11. O <ponto de f> é $(0, c_0)$, onde c_0, a concentração inicial, é um dos controles deslizantes definidos no **2º passo**.

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = f(t,c) \\ \\ c(0) = c_0 \end{cases} \tag{50}$$

O GeoGebra, ao resolver o sistema de valor inicial, dá como resposta o gráfico de uma função exponencial decrescente. O gráfico da solução fica sobreposto ao campo de direções criado no **4º passo**.

Figura 11 – Resolvendo o problema de valor incial.



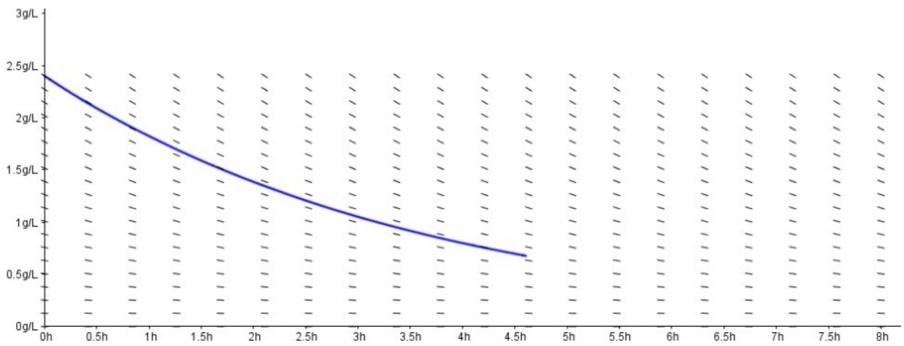
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo deste passo era que o estudante vinculasse a solução gráfica do problema de valor inicial como uma das possíveis direções impostas pelo campo de direções.

Desta forma, era esperado que o estudante vinculasse a tendência de decaimento da concentração, prevista no campo de direções, à função exponencial decrescente da solução.

6º passo: Apresentação interativa da evolução da solução do problema de valor inicial em relação ao tempo com auxílio do (Comando: AnimarConstruçãoDoGráfico[<Função>]), Figura 12;

Figura 12 – Evolução da solução em relação ao tempo



Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo deste passo era simular, através da construção dinâmica do gráfico, a velocidade em que ocorre o decaimento da concentração de álcool do organismo.

Esperava-se que o estudante conseguisse vincular o gráfico dinâmico, a uma simulação do decaimento da concentração de álcool do organismo.

7º passo: Observação das soluções gráficas do problema;

O objetivo deste passo era que o estudante analisasse as soluções gráficas do modelo.

Era esperado que o discente percebesse que quanto maior for c, ou seja, quanto maior for a concentração de álcool, mais rápido esta concentração decairia. Era esperado que o estudante percebesse este fato pela curvatura do gráfico, que quanto mais verticalizada maior seria a concentração.

8º passo: Conclusões finais sobre o modelo, tiradas pelos estudantes.

O objetivo deste passo era que o estudante relacionasse as funções de tipo exponencial, com base e, com as questões naturais, especificamente neste modelo de eliminação de álcool do organismo.

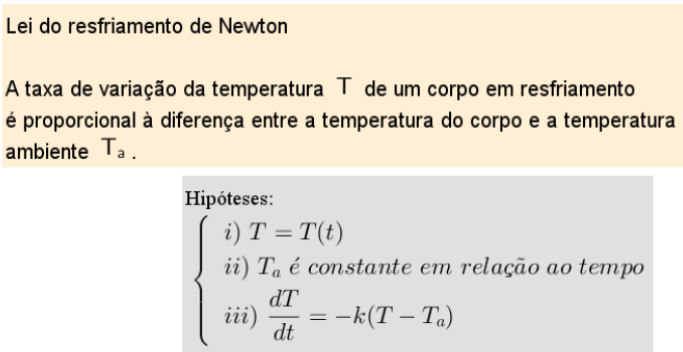
Era esperado que o estudante relacionasse o decaimento da concentração de álcool do organismo à função exponencial de base e, dada como resposta no **5º passo**. Esperava-se também que o discente percebesse a vantagem de se escrever a solução final como uma função do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$, como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

Modelo: "Lei do resfriamento de Newton"

No GeoGebra:

1º passo: A partir da análise da teoria relacionada ao fenômeno, as hipóteses deveriam ser relacionadas. Na Figura 13 há um exemplo de como este procedimento deveria ser feito;

Figura 13 – Relacionando as hipóteses.



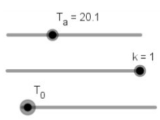
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **1º passo** foi possibilitar aos discentes a organização de algumas informações sobre o fenômeno relacionado à Lei do resfriamento de Newton. Com as informações coletadas na *internet*, em livros de física e de cálculo, os estudantes deveriam utilizar a ferramenta de texto, bem como alguns comandos básicos em LaTeX, para relacionar na tela do GeoGebra as informações pertinentes ao fenômeno.

Assim, era esperado pelo professor que o estudante, a par de informações significantes contidas nos livros e na *internet*, extraísse as ideias relevantes do fenômeno referente à Lei do resfriamento de Newton, para converter em linguagem matemática.

2º passo: Os controles deslizantes, com as constantes, seriam criados (Figura 14);

Figura 14 – Criando os controles deslizantes.



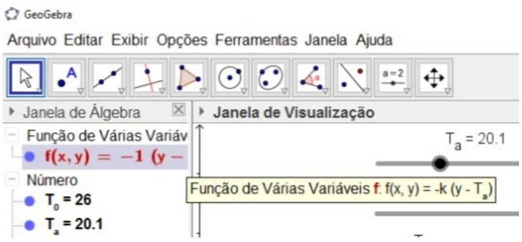
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **2º passo** foi mostrar aos discentes como as constantes relacionadas à este fenômeno poderiam assumir valores contínuos específicos em um intervalo.

No **2º passo**, era esperado que o discente criasse um controle deslizante com intervalo pertinente para cada constante.

3º passo: Adotando $t = x$ e $T = y$ a função de duas variáveis $f(t, T) = -k(T - T_a)$ seria criada (Figura 15);

Figura 15 – Criando função de duas variáveis $f(x, y)$.



Fonte: Produzida pelo autor.

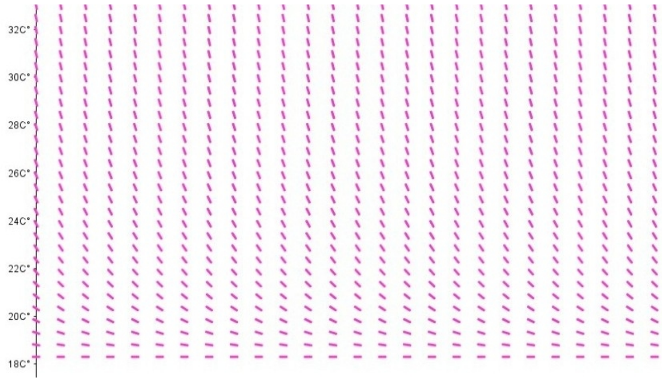
O objetivo do **3º passo** foi definir uma função de duas variáveis $f(x, y)$.

Desta maneira, era esperado neste passo que o discente conseguisse vincular uma função de duas variáveis relacionada à equação diferencial $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$, com T_a sendo a temperatura do ambiente.

4º passo: Criação do campo de direções, com o comando: CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>], referente à função $f(x, y)$, com x sendo o tempo decorrido em horas e y a tendência da diferença de temperatura em relação ao tempo, medida em graus Celsius. Desta maneira, este campo de direções mostra a tendência da temperatura em relação ao tempo. Isto é feito antes de se trabalhar com a resolução da equação diferencial referente ao problema.

O objetivo deste passo foi mostrar ao discente uma possibilidade de visualização gráfica do comportamento do fenômeno em relação ao tempo, sem ainda ter resolvido a equação diferencial. Os discentes, utilizando as possibilidades: <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y> do comando deveriam ajustar a melhor visualização do campo de direções por meio de tentativas e erros. Na Figura 16 há um campo de direções similar ao que se pede.

Figura 16 – Criando o campo de direções de $f(x, y)$.



Fonte: Produzida pelo autor.

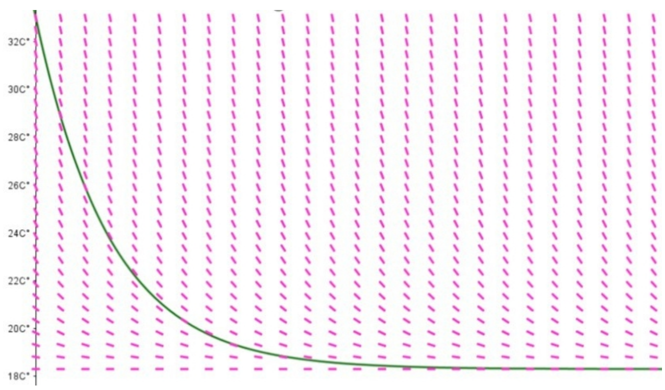
Desta maneira, esperava-se que o discente vinculasse o campo de direções às possíveis soluções do sistema de equação diferencial relacionado ao fenômeno. Era esperado que o discente conseguisse visualizar como o decaimento da diferença de temperatura ocorreria.

5º passo: Resolução do problema de valor inicial (51), com o auxílio do comando: ResolverEDO[<f(x, y)>, <Ponto de f>], Figura 17. O <ponto de f> é $(0, T_0)$, onde T_0, a temperatura inicial, é um dos controles deslizantes definidos no **2º passo**.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = f(t, T) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \tag{51}$$

O GeoGebra, ao resolver o sistema de valor inicial, dá como resposta o gráfico de uma função exponencial decrescente. O gráfico da solução fica sobreposto ao campo de direções criado no **4º passo**.

Figura 17 – Resolvendo o problema de valor inicial.



Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo deste passo foi que o estudante vinculasse a solução gráfica do problema de valor inicial como uma das possíveis direções impostas pelo campo de direções.

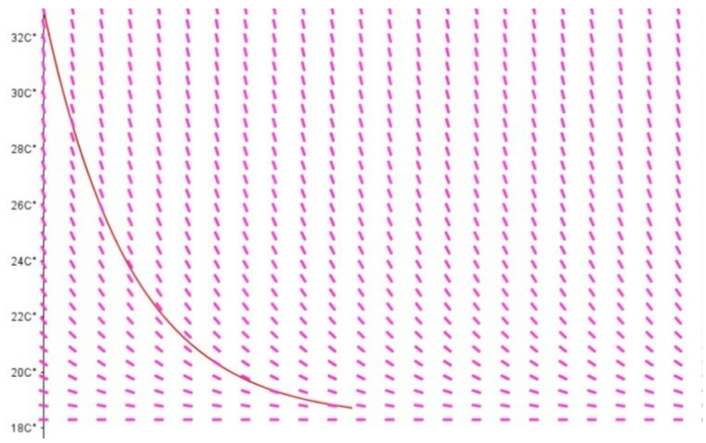
Desta forma, era esperado que o estudante vinculasse a tendência de decaimento da diferença de temperatura, prevista no campo de direções, à função exponencial decrescente da solução.

6º passo: Apresentação interativa da evolução da solução do problema de valor inicial em relação ao tempo com auxílio do (Comando: AnimarConstruçãoDoGráfico[<Função>]).

O objetivo deste passo foi simular, através da construção dinâmica do gráfico, a velocidade em que ocorre o decaimento da diferença de temperatura entre o ambiente e o corpo.

Esperava-se que o estudante conseguisse vincular o gráfico dinâmico, a uma simulação do decaimento da diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Na Figura 18, tem-se um exemplo do que é esperado.

Figura 18 – Evolução da solução em relação ao tempo



Fonte: Produzida pelo autor.

7º passo: Observação das soluções gráficas do problema;

O objetivo deste passo era que o estudante analisasse as soluções gráficas do modelo.

Esperava-se que o estudante percebesse que quanto maior for diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente, mais rápido a temperatura T do corpo decairia. Era esperado que o estudante percebesse este fato pela curvatura do gráfico, mais verticalizada quando a diferença de temperatura é maior.

8º passo: Conclusões finais sobre o modelo, tiradas pelos estudantes.

O objetivo deste passo foi que o estudante relacionasse as funções de tipo exponencial, com base e, com as questões naturais, especificamente neste modelo relacionado à Lei de resfriamento de Newton.

Era esperado que o estudante relacionasse o decaimento, da diferença de temperatura, à função exponencial de base e, dada como resposta no **5º passo**. Esperava-se também que o discente percebesse a vantagem de se escrever a solução final como uma função do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

Modelo: "Modelo de crescimento populacional de Malthus"

No GeoGebra:

1º passo: A partir da análise da teoria relacionada ao fenômeno, as hipóteses devem ser relacionadas. Na Figura 19 há um exemplo de como este procedimento deve ser feito;

Figura 19 – Relacionando as hipóteses.

A população $P(t)$ no instante t assume somente valores inteiros sendo pois uma função discreta de t, entretanto, quando o número de indivíduos é suficientemente grande, $P(t)$ pode ser aproximado por uma função contínua, variando continuamente no tempo.

A proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população e as taxas de fertilidade n e de mortalidade m sejam constantes. Supõe-se também que a espécie tem recursos ilimitados e não interage com competidores ou predadores.

MODELO DISCRETO

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1+\alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \\ \alpha = n - m \end{cases}$$

MODELO CONTÍNUO

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \beta P(t) \\ P(0) = P_0 \\ \beta = \ln(1+\alpha) \end{cases}$$

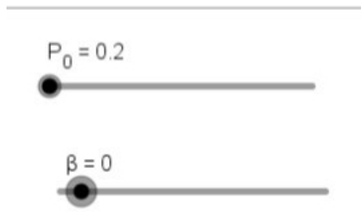
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **1º passo** foi possibilitar aos discentes a organização de algumas informações sobre o fenômeno estudado. Com as informações coletadas na *internet*, em livros de física e de cálculo, os estudantes deveriam utilizar a ferramenta de texto, bem como alguns comandos básicos em LaTeX, para relacionar na tela do GeoGebra as informações pertinentes ao fenômeno.

Assim, era esperado pelo professor que o estudante, a par de informações significantes contidas nos livros e *internet*, extraísse as ideias relevantes do fenômeno de crescimento populacional segundo Malthus, para converter em linguagem matemática.

2º passo: Os controles deslizantes, com as constantes, são criados (Figura 20);

Figura 20 – Criando os controles deslizantes.



Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **2º passo** foi mostrar aos discentes como as constantes relacionadas à este fenômeno poderiam assumir valores contínuos específicos em um intervalo.

No **2º passo**, era esperado que o discente criasse um controle deslizante com intervalo pertinente para cada constante.

3º passo: Adotando $t = x$ e $P = y$ a função de duas variáveis $f(t, P) = \beta P$ é criada (Figura 21);

Figura 21 – Criando função de duas variáveis $f(x, y)$.

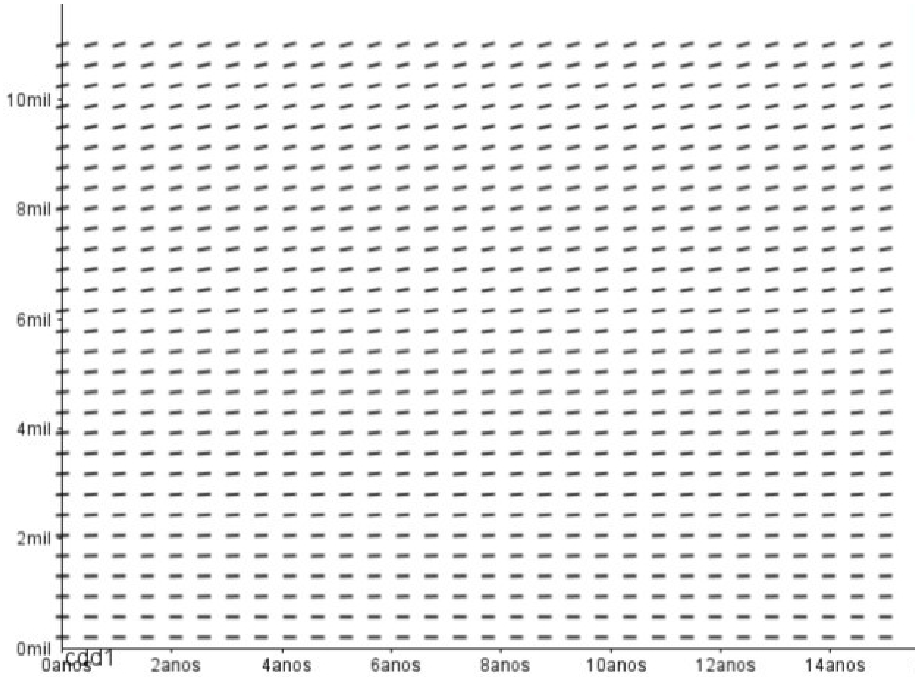
Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo do **3º passo** foi definir uma função de duas variáveis $f(x, y)$.

Desta maneira, era esperado que o discente conseguisse vincular uma função de duas variáveis relacionada à equação diferencial $\dfrac{dP}{dt} = kP$.

4º passo: Criação do campo de direções, com o comando: CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>], referente à função $f(x, y)$, com x sendo o tempo decorrido em horas e y a população. Desta maneira, este campo de direções mostra a tendência de crescimento populacional em relação ao tempo. Isto é feito antes de se trabalhar com a resolução da equação diferencial referente ao problema, Figura 22;

Figura 22 – Criando o campo de direções de $f(x, y)$.



Fonte: Produzida pelo autor.

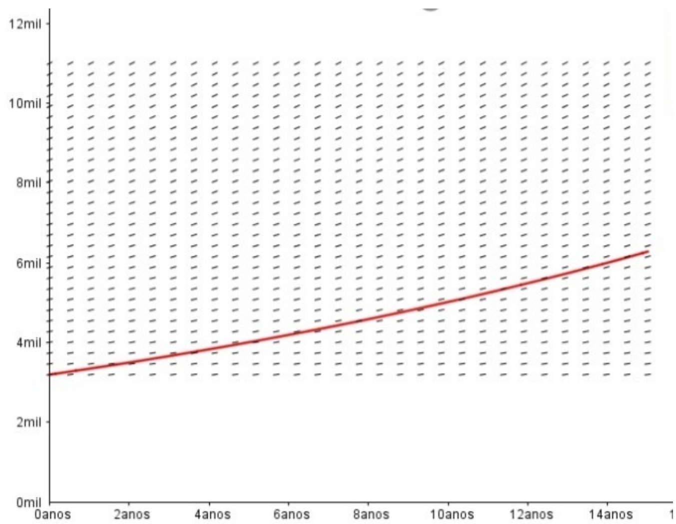
O objetivo deste passo foi mostrar ao discente uma possibilidade de visualização gráfica do comportamento do fenômeno em relação ao tempo, sem ainda ter resolvido a equação diferencial. Os discentes utilizando as possibilidades: <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y> do comando supracitado deveriam ajustar a melhor visualização do campo de direções por meio de tentativas e erros.

Desta maneira, era esperado que o discente vinculasse o campo de direções às possíveis soluções do sistema de equação diferencial relacionado ao fenômeno. Era esperado que o discente conseguisse visualizar como o crescimento populacional ocorre.

5º passo: Resolução do problema de valor inicial (52) com o auxílio do comando: ResolverEDO[<f(x, y)>, <Ponto de f>], Figura 23. O <ponto de f> é $(0, P_0)$, onde P_0, a população inicial, é um dos controles deslizantes definidos no **2º passo**. O GeoGebra, ao resolver o sistema de valor inicial, dá como resposta o gráfico de uma função exponencial crescente. O gráfico da solução fica sobreposto ao campo de direções criado no **4º passo**.

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = f(t, P) \\ \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{52}$$

Figura 23 – Resolvendo o problema de valor incial.



Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo deste passo foi que o estudante vinculasse a solução gráfica do problema de valor inicial como uma das possíveis direções impostas pelo campo de direções.

Desta forma, era esperado que o estudante vinculasse a tendência de crescimento da população, prevista no campo de direções, à função exponencial crescente da solução.

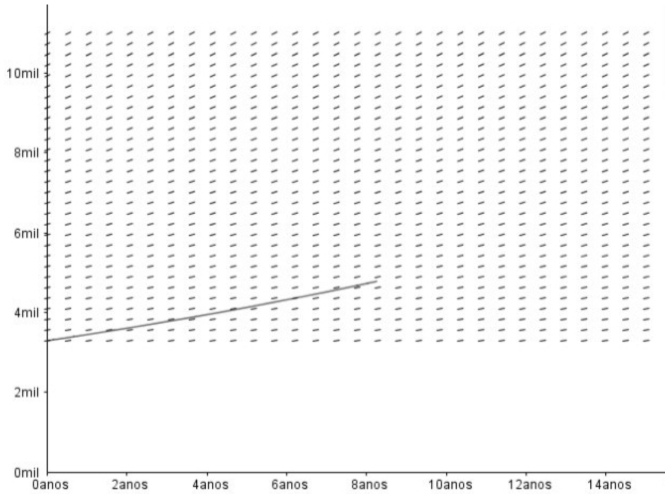
6º passo: Apresentação interativa da evolução da solução do problema de valor inicial em relação ao tempo com auxílio do (Comando: AnimarConstruçãoDoGráfico[<Função>]), Figura 24;

O objetivo deste passo foi simular, através da construção dinâmica do gráfico, a velocidade em que ocorre o crescimento da população.

Esperava-se que o estudante conseguisse vincular o gráfico dinâmico, a uma simulação do crescimento da população.

7º passo: Observação das soluções gráficas do problema;

Figura 24 – Evolução da População em relação ao tempo



Fonte: Produzida pelo autor.

O objetivo deste passo foi que o estudante analisasse as soluções gráficas do modelo.

Era esperado que o discente percebesse que quanto maior for a população, mais rápido esta população crescerá. Era esperado que o estudante percebesse este fato pela curvatura do gráfico, mais verticalizada quando a população for maior.

8º passo: Conclusões finais sobre o modelo, tiradas pelos estudantes.

O objetivo deste passo foi que o estudante relacionasse as funções de tipo exponencial, com base e, com as questões naturais, especificamente neste modelo de crescimento populacional de Malthus.

Era esperado que o estudante relacionasse o crescimento populacional à função exponencial de base e, dada como resposta no **5º passo**. Esperava-se também que o discente percebesse a vantagem de se escrever a solução final como uma função do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

Aula 04:

Na Aula 04, a partir dos roteiros de construção da **Aula 03**, os estudantes deveriam trabalhar com o modelo de decaimento radioativo e de eliminação de drogas do organismo. Os passos a seguir, destes dois modelos, são semelhantes ao que foi feito nos modelos da **Aula 03**, logo não serão detalhados nesta etapa.

O objetivo da construção destes modelos, pelos estudantes, foi que conseguissem utilizar os conhecimentos adquiridos na aula anterior e construir seus próprios modelos utilizando a teoria encontrada nos livros de cálculo e na *internet*.

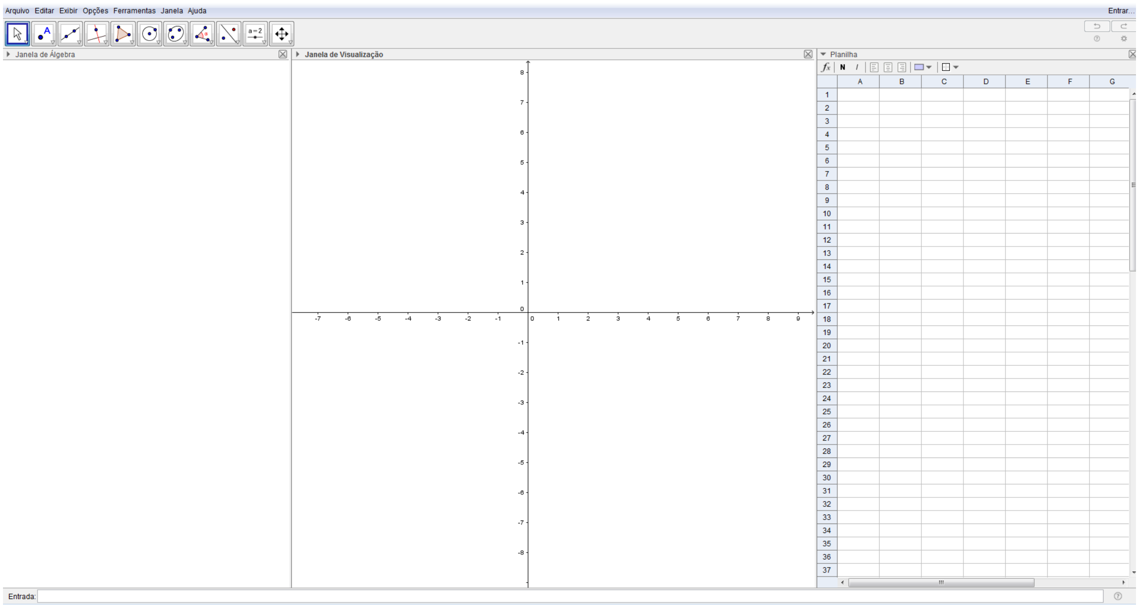
Desta forma, era esperado que os estudantes construíssem os modelos e percebessem a importância das taxas de variações e dos campos de direções nas construções dos modelos.

Aula 05:

Na Aula 05, para construir o Modelo de crescimento populacional Logístico contínuo (Verhulst), os estudantes deveriam pesquisar dados de cidades no site[4] do IBGE. Os dados pesquisados de cada cidade eram referentes às populações, segundo os Censos realizados entre os anos de 1970 e 2010.

No GeoGebra, para a utilização deste Modelo de Verhulst, foi necessário a utilização da Planilha do *software*, Figura 25.

Figura 25 – Janelas de Álgebra, de Visualização e Planilha abertas ao mesmo tempo.

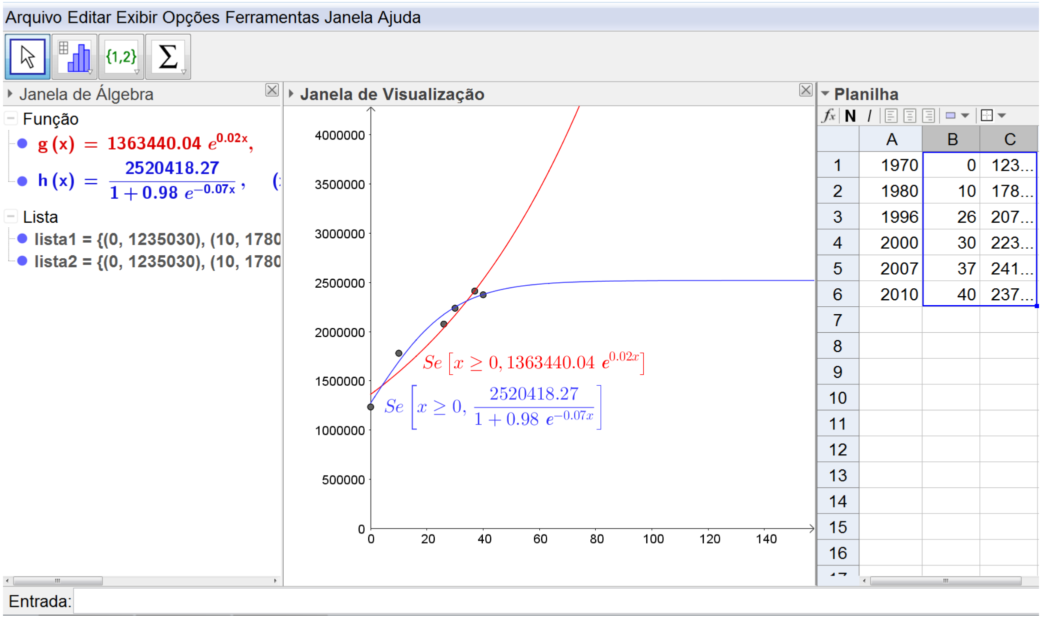


Fonte: Produzida pelo autor.

Os dados são inseridos nas células das planilhas e, em seguida, é necessário selecionar as colunas referentes ao tempo decorrido em anos, desde a primeira aferição do Censo para aquela cidade, junto com a coluna referente à população em cada ano referido. Depois, deve-se utilizar a ferramenta de Análise Bivariada e selecionar como curva de ajuste de dados o Modelo Exponencial ou o Modelo Logístico. A Figura 26 ilustra esta construção.

[4] <http://www.cidades.ibge.gov.br/v3/cidades/home-cidades>

Figura 26 – Construção dos modelos Logísticos.



Fonte: Produzida pelo autor.

Esta atividade pode ser feita utilizando os dados discretos obtidos no site do IBGE e as recorrências. Sendo assim esta etapa pode ser adaptada para atividades relativas do Ensino Médio.

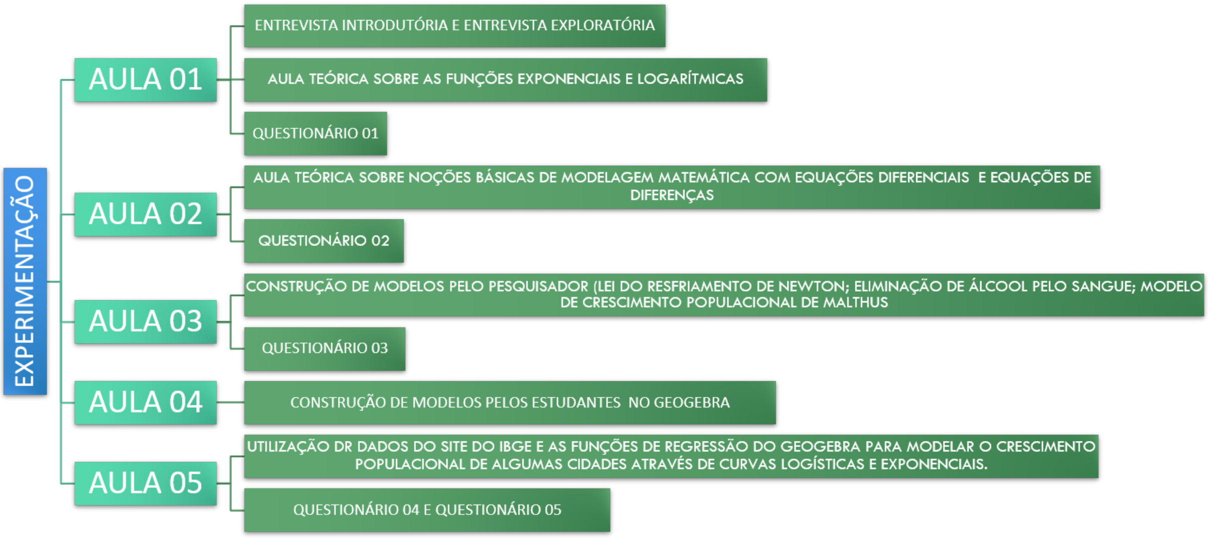
O principal objetivo desta atividade foi que o estudante conseguisse relacionar dados reais às funções exponenciais, e obter previsões aproximadas da população ao logo do tempo.

Esperava-se que o estudante conseguisse relacionar, da melhor maneira possível, através do ajuste de curvas do GeoGebra os dados populacionais e as funções exponenciais. Também era esperado, que o estudante comparasse a construção do modelo de Malthus com a construção do modelo de Verhulst e que o estudante tivesse autonomia para trabalhar com os dados e propor novas relações.

5 APLICAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Esta seção apresenta como as sequências didáticas foram aplicadas. Para facilitar o entendimento da dinâmica de interação com os estudantes, a Figura 27 mostra como ocorreram as etapas das atividades dentro do Laboratório de Simulação Computacional.

Figura 27 – Organograma com as etapas da experimentação.



Fonte: Produzida pelo autor.

Nesta etapa da descrição da pesquisa, as transcrições das respostas dos discentes serão indicadas, para termos de organização visual das informações, como: **R1** Resposta 1, **R2** Resposta 2, ..., **R5** Resposta 5,..., de maneira que estas numerações não indicam que as respostas **R1** de duas perguntas diferentes pertençam ao mesmo estudante. É importante ressaltar que nem todas as respostas a cada pergunta foram transcritas nesta parte do texto, pois algumas foram similares às respostas dos outros estudantes e por isso não foram utilizadas.

5.1 Entrevistas iniciais

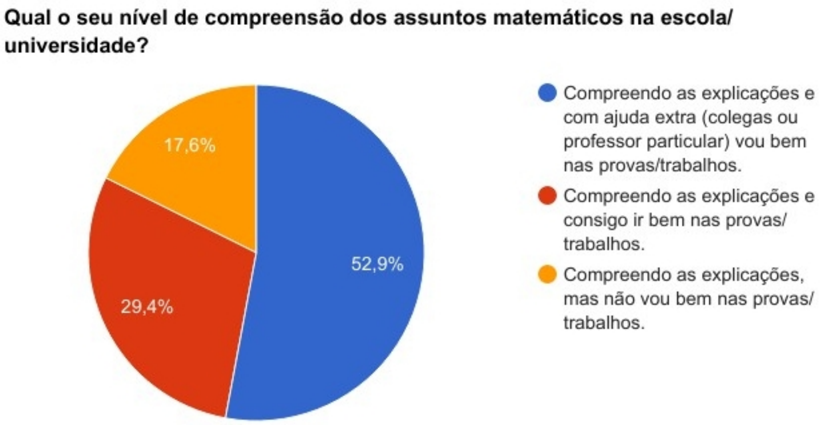
Antes da aplicação das SD, foram feitas, através de questionários descritivos, as Entrevistas Introdutória e Exploratória. As entrevistas serviram como a verificação cognitiva das análises prévias para relacionar aspectos ligados ao modo como os cursistas estudam Matemática.

Na Aula 01, os estudantes reponderam em 10 minutos ao ‘‘Questionário Introdutório’’ para fornecer informações de como eles estudam Matemática e quais as fontes auxiliares de estudo que utilizam.

Inicialmente, foram aplicados questionários diagnósticos através da plataforma *GoogleForms*, com o intuito de verificar as dificuldades encontradas pelos discentes sobre as funções exponenciais e logarítmicas.

Embora as intervenções tenham sido aplicadas com discentes dos primeiros semestres do curso de BC&T da UFVJM, Campus do Mucuri, o estudo das funções supracitadas ocorre inicialmente no ensino médio. Sendo assim, as dificuldades oriundas desta etapa do sistema de ensino causam muitas dificuldades aos discentes de um curso de Ciência e Tecnologia com disciplinas como o Cálculo, por exemplo. Através da Entrevista Introdutória, respondida por 17 estudantes, foram construídos os gráficos das Figuras 28, 29, 30 e 31.

Figura 28 – Entrevista Introdutória

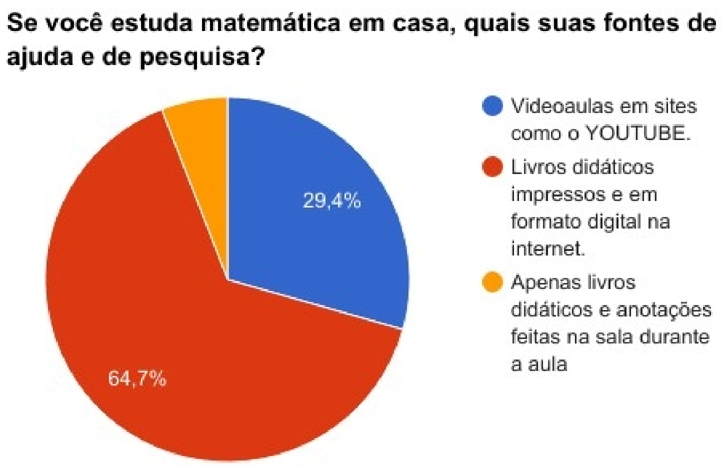


Fonte: Produzida pelo autor.

Figura 29 – Entrevista Introdutória

Fonte: Produzida pelo autor.

Figura 30 – Entrevista Introdutória



Fonte: Produzida pelo autor.

Figura 31 – Entrevista Introdutória

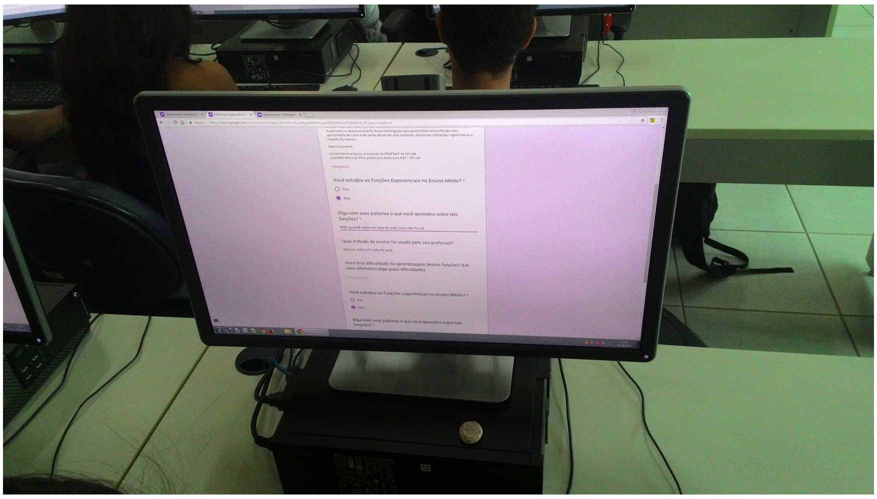
Fonte: Produzida pelo autor.

Ao analisar os gráficos das Figuras 28, 29, 30 e 31 observa-se que $52,9\%$ do grupo de estudantes disse compreender os assuntos explicados com alguma ajuda extra, como colegas ou tutores particulares. Cerca de $41,2\%$ dos discentes entrevistados disseram dedicar mais de 4 horas semanais ao estudo de matemática em casa, fato explicado por estarem cursando o Curso de BC&T na UFVJM que exige este nível de dedicação. Outro fato importante notado, é que $64,7\%$ dos entrevistados tem como fonte de pesquisa para os estudos livros didáticos impressos e digitais e $29,4\%$ utilizam videoaulas do *YouTube* ou outras plataformas.

O gráfico da Figura 31 mostra que $82,4\%$ dos estudantes entrevistados já utilizaram algum programa que auxiliasse no aprendizado de Matemática. Este fato se deve principalmente a estes discentes já estarem nos primeiros semestres do BC&T, onde, por exemplo, já tiveram contato com o GeoGebra. Desta maneira, não foram necessárias aulas introdutórias sobre o *software*.

O segundo questionário aplicado aos cursistas, a Entrevista Exploratória, serviu para se ter noção do que os discentes lembravam sobre o que viram no ensino médio, sobre funções exponenciais e logarítmicas. Na Figura 32 é observado um cursista utilizando a plataforma para responder à entrevista.

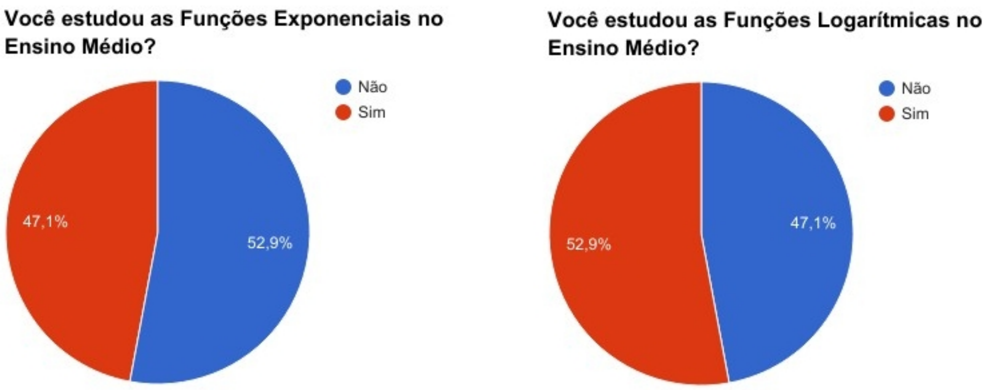
Figura 32 – Cursista respondendo à Entrevista Exploratória



Fonte: Produzida pelo autor.

Como é percebido nas Figuras 33 (a) e (b), apenas $47,1\%$ dos discentes entrevistados estudaram funções exponenciais no ensino médio e $52,9\%$ estudaram funções logarítmicas.

Figura 33 – Entrevista Introdutória



(a) (b)

Fonte: Produzida pelo autor.

Na Figura 34, aparecem as respostas à pergunta "Diga com suas palavras o que aprendeu sobre tais funções [exponenciais]?". Considerando apenas os $47,1\%$ que responderam afirmativamente à primeira pergunta, aparecem respostas como:

R1 *"Conteúdos básicos sendo introduzidos apenas conceitos superficiais."*, *"... gráficos e resolução com tabelas."*.

R2 *"Resolução, gráficos e raízes."*.

Figura 34 – Diga com suas palavras o que aprendeu sobre tais funções [exponenciais]?

Diga com suas palavras o que você aprendeu sobre tais funções? (17 respostas)

Nem sabia que existiam. Nem sabia que existia o numero neperiano.

Nada, porque não foi dado em sala de aula

Conteúdo básico, sendo introduzidos apenas conceitos superficiais.

No Ensino Médio aprendi o básico das funções, como algumas características

Não estudei essa função no ensino médio, portanto não aprendi nada sobre ela.

Aprendi no ensino medio apenas o básico sobre elas, gráfico e resolução com tabela

N/D

Em minha escola este tipo de função foi apresentada mas não explicada.

Não aprendi nada em sala de aula, pois não foi ministrado tal conteúdo.

Aprende sobre as funções lineares e sobre as funções de segundo grau exclusivamente.
Tive até uma boa quantidade de exercícios de ambas as funções o que me fez recordar um pouco quando alcancei o ensino superior.
Contudo, não sabia para que elas serviriam ou em que elas seriam usadas, pois o aprendizado foi totalmente baseado em resoluções de exercícios.

Na escola apenas foi apresentado a função, sendo uma variável como expoente. Mas não foi estudado a fundo com apresentação do conteúdo e exercícios.

Aprendi de forma básica,como se comporta graficamente e calculá-las .

São funções em que a incógnita aparece no expoente. Crescem ou diminuem muito rápido.

São funções do tipo e^x, podendo x ser qualquer número real, que são usadas também em funções logarítmicas.

Aprendi que são funções do tipo e^x, sendo x qualquer número real.

Na verdade não me lembro muito bem o que aprendi no ensino medio sobre essas funções

Resolução, Gráficos e Raízes

Fonte: Produzida pelo autor.

Estas respostas corroboram Masetti e Pires (2014) que, em sua análise, mostram a preferência dos materiais didáticos do PNLD 2015 em utilizar exercícios procedimentais.

Em sequência foi perguntado aos cursistas ‘‘Qual método de ensino foi usado pelo seu professor?’’. Novamente, foram consideradas para análise as respostas dos alunos que estudaram o assunto funções exponenciais no ensino médio como pode ser visto na Figura 35.

Figura 35 – Qual método de ensino foi usado pelo seu professor?

Qual método de ensino foi usado pelo seu professor? (16 respostas)
Nenhum
Nenhum
Não me foi passado o conteúdo em sala de aula.
Método básico de ensino, sendo constituído por explicação e aplicação de exercícios.
Aulas utilizando a apostila
Utilizava o quadro para demonstração
O meu professor do ensino médio apresentou o formato da função no quadro, mas não aprofundou sobre o assunto.
Nenhum.
Demonstração de como se resolvia uma equações do primeiro e segundo e a aplicação de vários exercícios.
Nenhum, apenas foi apresentado o modelo da função na sala de aula.
Exercícios ,explicações em sala (no quadro),e uso do livro didático .
Explicação da matéria seguindo o livro didático.
Foi utilizado o quadro, slides, introdução ao software Geogebra.
Foi feito uso do aplicativo Geogebra, e em sala de aula, passando o conhecimento em palavras, exemplos e gráficos.
Não consigo recordar da metodologia
Teórico

Fonte: Produzida pelo autor.

Surgiram como respostas:

R1 *‘‘... explicação e aplicação de exercícios.’’*

R2 *‘‘Aulas utilizando a apostila.’’*

R3 *‘‘...apresentou o formato de função no quadro...’’*

R4 *‘‘... uso do livro didático.’’*

Novamente é observado a influência da utilização dos livros didáticos e suas atividades de caráter procedimental, vistas em Masetti e Pires (2014). É interessante notar que dois cursistas responderam:

R6 *"... introdução ao software GeoGebra."*

R7 *"Foi feito uso do aplicativo GeoGebra, e em sala de aula, passando o conhecimento em palavras, exemplos e gráficos."*

A segunda resposta ressalta a utilização do *software* para construir o gráfico da função, utilização já prevista desde os anos 1990 em Borba (2007). Contudo, pelos relatos dos estudantes, percebe-se que a utilização do *software* foi feita de forma superficial, pois como afirma Valente (1999), a abordagem citada pelos discentes tem o computador utilizado para informatizar os processos de ensino existentes. O autor ainda afirma que esta abordagem facilitou a implantação do computador na escola, pois não quebra a dinâmica por ela adotada, não exige muito investimento na formação do professor, mas no entanto, os resultados em termos da adequação dessa abordagem no preparo de cidadãos capazes de enfrentar as mudanças que a sociedade está passando são questionáveis.

Na pergunta "Você teve dificuldade na aprendizagem destas funções? Em caso afirmativo diga quais dificuldades.", como pode ser visto na Figura 36 , as respostas foram inconclusivas, pois os cursistas que estudaram as funções exponenciais não especificaram as dificuldades que tiveram e deram respostas como:

R1 *"Sim, pois a compreensão era complicada e quase não sabia como resolvê-las."*

R2 *"Pode-se dizer que sim, pois quando acrescenta-se exponenciais à outras funções, as mesmas tornam-se pouco complicadas."*

Apenas uma resposta foi específica:

R3 *"SIM, construir gráficos."*

Figura 36 – Você teve dificuldade na aprendizagem destas funções? Em caso afirmativo diga quais dificuldades.

Você teve dificuldade na aprendizagem destas funções? Em caso afirmativo diga quais dificuldades.
SIM, construir gráficos
essa função no ensino médio, portanto não aprendi nada sobre ela.
Sim, reconhecer a função
Não, pois não me foi apresentada tais funções.
Sim, pois eu só tive acesso a este tipo de estudo no Ensino Superior na disciplina de Cálculo 1.
Não, pois não foi apresentado tal conteúdo.
Não, pois naquela época para resolver você teria somente que diferenciar a forma como iria resolver, o que se baseava em soma, subtração, divisões e multiplicação.
Sim, pois só aprendi após o ensino médio.
Sim ,pois a compreensão era complicada e quase não sabia como resolvê-las.
Não
Pode-se dizer que sim, pois quando acrescenta-se exponenciais à outras funções, as mesmas tornam-se pouco complicadas
Sim, pois não tendo boa base no ensino médio o "novo" acaba sendo complicado, pois tem também o tempo curto para se aprender.

Fonte: Produzida pelo autor.

Analisando as respostas sobre a pergunta “Diga com suas palavras o que aprendeu sobre tais funções [logarítmicas]?”, na Figura 37 é observado que estas funções foram pouco trabalhadas no ensino médio dos cursistas.

Figura 37 – Diga com suas palavras o que aprendeu sobre tais funções [logarítmicas]?

Diga com suas palavras o que você aprendeu sobre tais funções? (17 respostas)

Nem sabia que existiam. Sabia que existia o logaritmo, mas também não sabia o que era.

Nada, porque não foi dado em sala de aula

Apenas o conteúdo básico da matéria em questão.

Não lembro de ter aprendido essa matéria

Aprendi essa função de forma superficial, então vi pouca coisa, como o que era a base, como se comportava essas funções graficamente e como calcular as mais simples.

Eu não lembro muita coisa à respeito

N/D

Eu não vi este tipo de função no meu ensino médio.

Não aprendi nada em sala de aula, pois não foi ministrado tal conteúdo.

Não, não aprendi sobre estas funções no ensino médio.

Não aprendi funções logarítmas no ensino médio,

Bem pouco ,o básico ,como seu comportamento no gráfico e como se calcula.Mas não foi muito utilizada em todo meu ensino médio, pois era dada de forma simples esse conteúdo.

Não lembro.

São funções que podem ser usadas em variadas áreas de atuações, sua forma algébrica, e alguns usos.

No ensino médio aprendi apenas o básico, como por exemplo as propriedades do logarítimo, o seu gráfico, e a forma da função.

A forma geral da função, gráficos e as propriedades logaritmas

Resoluções e Gráficos

Fonte: Produzida pelo autor.

Destacando-se as seguintes respostas:

R1 *“Nem sabia que existiam[as funções logarítmicas]. Sabia que existia o logaritmo, mas também não sabia o que era.”*

R2 *“Aprendi essa função de forma superficial, então vi pouca coisa, como o que era* *a base, como se comportava essas funções graficamente e como calcular as mais simples.''*

R3 *''No ensino médio aprendi apenas o básico, como por exemplo as propriedades do logarítimo (sic), o seu gráfico, e a forma da função.''.*

Nestas transcrições das respostas dos cursistas, é notada mais uma vez a influência de exercícios procedimentais e repetitivos.

Quando foram questionados sobre o método de ensino do professor para ensinar funções exponenciais, os cursistas responderam:

R1 *''Exposição tradicional de conceitos e aplicação de exercícios.''*

R2 *''Livro didático e explicação no quadro.''*

R3 *''Ele copiou a matéria no quadro e explicou e passou questões para fazer.''*

Apenas um estudante respondeu que o *software* foi utilizado na construção do gráfico:

R4 *''Foi feito uso do aplicativo GeoGebra como forma de demonstração mais prática, e em sala de aula através de exemplos e demonstrações manuais dos gráficos.''*

Finalmente, em relação às dificuldades de aprendizagem dos estudantes em relação às funções logarítmicas, eles relataram pouco tempo de estudo, dificuldade para desenhar os gráficos e até confundiram com as funções exponenciais:

R1 *''...pelo fato de o estudo dessas funções ter sido feito em um curto período de tempo.''*

R2 *''...Dificuldade para a resolução da função e para o desenho do gráfico.''*

R3 *''...as vezes trocava os valores da base e expoente, e tive dificuldade em conseguir pegar as propriedades.''.*

Contudo, os cursistas não especificaram claramente quais habilidades e conteúdos tiveram dificuldade.

5.2 Sequências Didáticas

Aula 01:

Nesta aula, os objetivos da pesquisa foram esclarecidos para os estudantes e ficou combinado que, após assistir a explanação de 60 minutos, eles deveriam responder ao questionário proposto.

Além disso, foi especificado aos estudantes que algumas fotografias seriam tiradas como ilustração do trabalho e que questionamentos pertinentes ao assunto, feitos por eles, seriam bem-vindos.

A aula teórica sobre as funções exponenciais e logarítmicas, tendo como base Lima et al. (2012a) e Lima (2013) foi realizada. Em sequência, 15 estudantes responderam ao ‘‘Questionário 01’’ e agora as respostas serão analisadas.

No Questionário 01, em relação ao pedido ‘‘Descreva e justifique quais as principais características da função exponencial você percebeu e gostaria de destacar.’’, várias informações pertinentes foram relacionadas pelos cursistas. Nestes trechos, os cursistas conseguiram relacionar propriedades das funções exponenciais, bem como a variação, domínio e imagem:

R1 *‘‘A definição de funções exponenciais é que a variação relativa depende apenas de um acréscimo h, e não da variável x em si. Um exemplo de utilidade para transformar uma Progressão Aritmética em Geométrica. Ela tem também por propriedade transformar uma soma em produto.’’*

R2 *‘‘Função exponencial é um número elevado a uma incógnita. Ela depende apenas do acréscimo e não da variável, vai do conjunto dos números reais para os reais positivos, é uma função monótona e injetora e sua principal propriedade é transformar a soma em multiplicação, ex: transforma uma PA em PG.’’*

O pedido seguinte ‘‘Relacione as principais características das funções inversas das funções exponenciais.’’, teve respostas onde destacam-se a transformação de produtos em soma, propriedade da função logarítmica e o fato de apenas funções bijetoras possuírem inversas:

R1 *‘‘A função logarítmica tem o domínio real positivo e a imagem real e ela é o inverso das exponenciais.’’*

R2 *‘‘Elas são monótonas e injetivas enquanto uma transforma soma em produto outra transforma produto em soma.’’*

R3 *‘‘Para uma função ser inversa, ela deve ser bijetora.Tem a capacidade de transformar soma em multiplicação. A função inversa da exponencial é a logaritma (sic).’’*

A terceira descrição pedida ‘‘Relacione as principais características da função logarítmica.’’ tinha o intuito de descobrir se os estudantes perceberam que de fato a função logarítmica é a função inversa da exponencial. Estas transcrições mostram que os estudantes perceberam o fato da função logarítmica ser a função inversa da exponencial, bem como o fato de uma das suas principais características ser a de transformar produtos em somas:

R1 *''A função logarítmica tem o domínio real positivo e a imagem real e ela é o inverso das exponenciais. A função logarítmica transforma produto em soma.''*

R2 *''As funções logarítmicas são as inversas das exponenciais, auxiliam no processo de modelagem matemática, e tem por principal característica converter produto para soma.''*

Para o último pedido de descrição deste questionário, ''Descreva e justifique quais as principais características da função exponencial de base *e*.'' é necessário ressaltar que os cursistas já haviam estudado Cálculo Diferencial e Integral, segundo a grade curricular do curso de BC&T. Desta forma, a aula inicial teve referências a taxas de variação, integração, etc., influindo nas respostas, que foram, por exemplo:

R1 *''A função exponencial de base 'e' apresenta inclinação igual à seu valor. Logo, a variação dessa função sempre tem relação com seu valor. Ela nos permite avaliar fenômenos em que o crescimento ou decrescimento tenha relação direta com sua quantidade medida. Asim são muitos fenômenos naturais, logo, sempre é a melhor opção avaliar tais fenômenos usando funções exponenciais.''*

R2 *''Através das funções exponenciais de base 'e' pode identificar facilmente a taxa de crescimento ou decrescimento de um fenômeno.''*

R3 *''Possui um crescimento e decrescimento muito alto, além disso 'e' possui integral e derivada igual. Há uma fácil visualização e por isso é muito utilizada na ciência.''.*

Aula 02:

Nesta aula, os discentes assistiram a uma aula teórica de 80 minutos sobre noções básicas de Modelagem Matemática com equações diferenciais e equações de diferenças segundo Bassanezi (1999), Bassanezi (2014), Biembengut e Hein (2002) e Biembengut (2009), depois eles responderam em 30 minutos ao ''Quesionário 02'' sobre os principais pontos da aula.

Em resposta à solicitação do Questionário 02 ''Descreva o que você entendeu sobre Modelagem Matemática.'', os discentes foram condizentes com Andrews e Mclone (1976) que afirmam que um modelo matemático é um objeto matemático abstrato, simplista representado uma parte da realidade:

R1 *''Do fenômeno você tira inferências, dados, hipóteses (Teoria intrínseca). Através disso você cria modelos simplistas e trabalha em cima do modelo, fazendo previsões* *sobre o fenômeno. Quanto mais o modelo se aproxima da realidade mais complexo, mais difícil para ser aplicado, trabalha-se mais com o computador e a modelagem fica mais precisa.''*

Por esta descrição percebe-se que os cursistas conseguiram descrever de forma pertinente o processo de modelar matematicamente.

Para responder à solicitação ''Descreva quais as principais características que você percebeu sobre a Modelagem Matemática.'' os estudantes utilizaram expressões como:

R1 *''... objetivo de fazer previsões de fenômenos estudados''*

R2 *''Pesquisa teórica, criação de hipóteses, criação de modelos simples...''*

R3 *''Trabalha com taxas de variação''*

Observando os depoimentos apresentados nas descrições, percebeu-se um entendimento sobre os objetivos de fazer modelagem, por parte dos cursistas. Para prosseguimento das intervenções, seria necessário um conhecimento prévio dos discentes sobre equações diferenciais e de diferenças, então a aula teórica nesta intervenção foi necessária. Respostas na Figura 38.

Figura 38 – Você já tinha ouvido ou visto algo sobre equações diferenciais?

Você já tinha ouvido ou visto algo sobre equações diferenciais? Em caso afirmativo descreva o que você já ouviu ou viu sobre.

(13 respostas)

Sim, equações diferenciais são aquelas que envolvem derivadas,números e igualdades de uma função

Sim, são cálculos que envolvem igualdade, números, uma ou mais derivadas de função.

Sim, nas aulas de Cálculo I vi uma introdução, não tão aprofundada. Usa-se da derivada.

Sim. Já tinha visto que equações diferenciais que podem ser usadas para diversas aplicações práticas, em diversas áreas, inclusive na engenharia.

Sim, equações que relacionam taxas de variações.

Antes do ingresso no curso superior não. Nas equações diferenciais, tem-se como resposta funções; encontra-se taxas de variações (a taxa de variação é proporcional a função); é a equação que tem derivada; mede-se e a partir da variação, descobre-se funções.

Sim. Já ouvi que as equações diferencias são aplicadas a modelos de crescimento e decrescimento populacional, e a sistemas presa-predador.

Equações diferenciais envolvem derivada e igualdade.

Não tinha ouvido e agora já tenho uma noção que todas as equações diferenciais são uma recorrência. Ela vai servir para aplicar nos modelos de crescimento e decrescimento de populações.

Já tinha visto, mas não possuía nenhuma noção sobre o assunto.

Sim, em cálculo I , vi de maneira simplificada . Consigo resolve-las a partir de um ponto base.

Não tinha ouvido antes, mas hoje obtive uma noção básica de que são funções que possuem derivadas .

Sim, que elas podem prever o crescimento ou decrescimento de algum fenômeno.

Fonte: Produzida pelo autor.

Contudo, todos os discentes disseram não ter conhecimento sobre as Equações de Diferenças, como é visto na Figura 39. Embora seja um assunto passível de ser trabalhado no ensino médio, compreender as equações de diferenças ou recorrências exige um base matemática consistente, por parte do estudante. Este foi um dos itens que os cursistas mais tiveram dúvidas durante as intervenções.

Figura 39 – Você já tinha ouvido ou visto algo sobre equações de diferenças?

Não, hoje foi a primeira vez que tive contato com este tipo de equação.

Não, conheci na apresentação realizada hoje. É conhecida como recorrência, que é uma relação de dependência com algo que se fez antes. Trabalha com a parte discreta.

Não , mas hoje em dia sei que é através da recorrência que é uma dependência entre o antes e o depois , ou o agora e o depois .
Ex.:t=t+1;

Não tinha ouvido antes, mas hoje obtive uma noção básica de que elas são analisadas em intervalos.

Fonte: Produzida pelo autor.

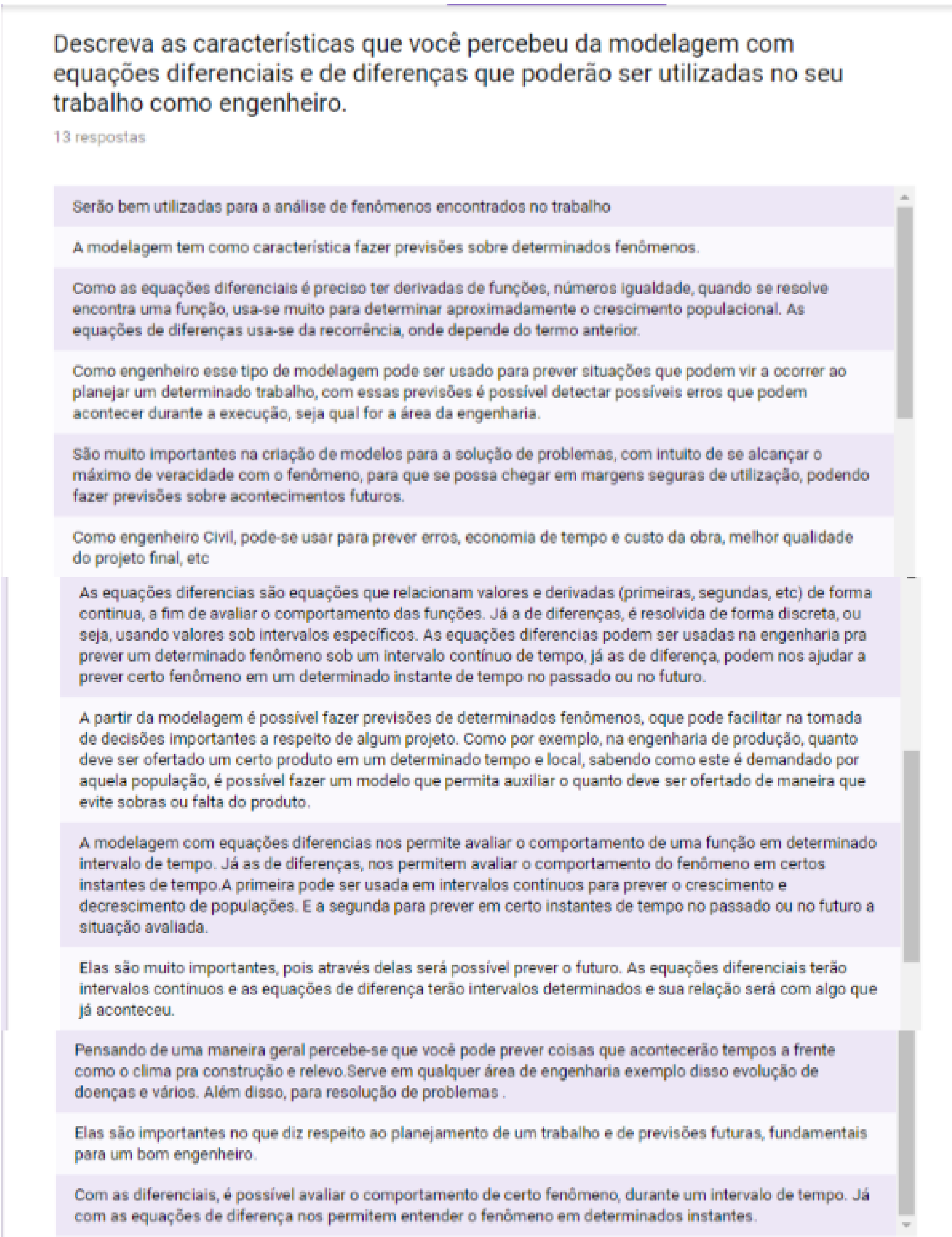
Como dito na introdução desta dissertação, é importante a utilização da linguagem matemática nas ciências em geral, principalmente nas exatas. Com este intuito foi feita a solicitação aos alunos: ‘‘Descreva as características que você percebeu da modelagem com equações diferenciais e de diferenças que poderão ser utilizadas no seu trabalho como engenheiro.’’, Figura 40. Descrições dos cursistas corroboram a ideia de que compreenderam esta importância:

R1 *‘‘Como engenheiro esse tipo de modelagem pode ser usado para prever situações que podem vir a ocorrer ao planejar um determinado trabalho, com essas previsões é possível detectar possíveis erros que podem acontecer durante a execução, seja qual for a área da engenharia.’’*

R2 *‘‘São muito importantes na criação de modelos para a solução de problemas, com intuito de se alcançar o máximo de veracidade com o fenômeno, para que se possa chegar em margens seguras de utilização, podendo fazer previsões sobre acontecimentos futuros.’’*

R3 *‘‘A partir da modelagem é possível fazer previsões de determinados fenômenos, o que pode facilitar na tomada de decisões importantes a respeito de algum projeto. Como por exemplo, na engenharia de produção, quanto deve ser ofertado um certo produto em um determinado tempo e local, sabendo como este é demandado por aquela população, é possível fazer um modelo que permita auxiliar o quanto deve ser ofertado de maneira que evite sobras ou falta do produto.’’*

Figura 40 – Descreva as características que você percebeu da modelagem com equações diferenciais e de diferenças que poderão ser utilizadas no seu trabalho como engenheiro.



Descreva as características que você percebeu da modelagem com equações diferenciais e de diferenças que poderão ser utilizadas no seu trabalho como engenheiro.

13 respostas

Serão bem utilizadas para a análise de fenômenos encontrados no trabalho

A modelagem tem como característica fazer previsões sobre determinados fenômenos.

Como as equações diferenciais é preciso ter derivadas de funções, números igualdade, quando se resolve encontra uma função, usa-se muito para determinar aproximadamente o crescimento populacional. As equações de diferenças usa-se da recorrência, onde depende do termo anterior.

Como engenheiro esse tipo de modelagem pode ser usado para prever situações que podem vir a ocorrer ao planejar um determinado trabalho, com essas previsões é possível detectar possíveis erros que podem acontecer durante a execução, seja qual for a área da engenharia.

São muito importantes na criação de modelos para a solução de problemas, com intuito de se alcançar o máximo de veracidade com o fenômeno, para que se possa chegar em margens seguras de utilização, podendo fazer previsões sobre acontecimentos futuros.

Como engenheiro Civil, pode-se usar para prever erros, economia de tempo e custo da obra, melhor qualidade do projeto final, etc

As equações diferencias são equações que relacionam valores e derivadas (primeiras, segundas, etc) de forma continua, a fim de avaliar o comportamento das funções. Já a de diferenças, é resolvida de forma discreta, ou seja, usando valores sob intervalos específicos. As equações diferencias podem ser usadas na engenharia pra prever um determinado fenômeno sob um intervalo contínuo de tempo, já as de diferença, podem nos ajudar a prever certo fenômeno em um determinado instante de tempo no passado ou no futuro.

A partir da modelagem é possível fazer previsões de determinados fenômenos, oque pode facilitar na tomada de decisões importantes a respeito de algum projeto. Como por exemplo, na engenharia de produção, quanto deve ser ofertado um certo produto em um determinado tempo e local, sabendo como este é demandado por aquela população, é possível fazer um modelo que permita auxiliar o quanto deve ser ofertado de maneira que evite sobras ou falta do produto.

A modelagem com equações diferencias nos permite avaliar o comportamento de uma função em determinado intervalo de tempo. Já as de diferenças, nos permitem avaliar o comportamento do fenômeno em certos instantes de tempo.A primeira pode ser usada em intervalos contínuos para prever o crescimento e decrescimento de populações. E a segunda para prever em certo instantes de tempo no passado ou no futuro a situação avaliada.

Elas são muito importantes, pois através delas será possível prever o futuro. As equações diferenciais terão intervalos continuos e as equações de diferença terão intervalos determinados e sua relação será com algo que já aconteceu.

Pensando de uma maneira geral percebe-se que você pode prever coisas que acontecerão tempos a frente como o clima pra construção e relevo.Serve em qualquer área de engenharia exemplo disso evolução de doenças e vários. Além disso, para resolução de problemas .

Elas são importantes no que diz respeito ao planejamento de um trabalho e de previsões futuras, fundamentais para um bom engenheiro.

Com as diferenciais, é possível avaliar o comportamento de certo fenômeno, durante um intervalo de tempo. Já com as equações de diferença nos permitem entender o fenômeno em determinados instantes.

Fonte: Produzida pelo autor.

5.2.1 Experimentação utilizando os roteiros de construção

As atividades de experimentação utilizando os modelos descritos nos roteiros de construção ocorreram a partir da Aula 03. Autores como Bassanezi (2014), Biembengut (2012) e Blum et al. (2007) relatam que o tema a ser utilizado na modelagem deve surgir no contexto dos estudantes, em situações que emerjam de questionamentos dos participantes do processo de modelagem. Desta forma, a pesquisa utilizou modelos clássicos que fizessem referências a temas recorrentes no cotidiano dos cursistas.

Na Aula 03, inicialmente o pesquisador utilizou o GeoGebra seguindo o roteiro de construção do Modelo de Eliminação de álcool ingerido. Os discentes acompanharam as etapas desta construção pelo projetor multimídia, construindo simultaneamente também em seus computadores.

O modelo sobre eliminação do álcool despertou bastante interesse nos estudantes que lembraram da ‘‘lei seca’’ Lei nº 11.705, de 19 de junho de 2008 (BRASIL, 2008) e Lei nº 12.760, de 20 de dezembro de 2012 (BRASIL, 2012). As alterações ocorridas no Código Brasileiro de Trânsito provocaram a diminuição do máximo tolerável da concentração de álcool no organismo dos condutores de veículos.

É importante salientar que o modelo da forma como foi trabalhado pelo pesquisador é de caráter simplista, pois leva em conta apenas a eliminação de álcool pelos processos respiratórios e supõe que todo o álcool ingerido é absorvido pelo organismo. Nesta etapa, os discentes compreenderam a importância de se conhecer as características intrínsecas ao fenômeno estudado, pois ao serem solicitados ‘‘Descreva o que você percebeu sobre a importância do conhecimento sobre as características de um fenômeno para modelá-lo matematicamente.’’ eles relataram:

R1 *‘‘A análise do comportamento do fenômeno, é totalmente dependente da teoria por traz do acontecimento, pois é preciso entender quais são as variáveis e qual é o comportamento e a função de cada uma para se poder modelar.’’*

R2 *‘‘É extremamente importante conhecer as características de um fenômeno para modelá-lo, pois é preciso inicialmente identificar o problema, formular hipóteses e fazer previsões, sem estudá-lo é impossível passar por essas etapas.’’*

O objetivo principal de contextualização das funções exponenciais foi atingido durante a construção deste modelo, pois os cursistas perceberam que a função exponencial de base natural apareceu como solução para definir o comportamento da eliminação do álcool ingerido. A função exponencial não foi dada a princípio, nem citada antes do processo de modelagem terminar.

As descrições dos estudantes atendendo ao pedido do Questionário 03 ‘‘Descreva como a metodologia impactou (positivamente ou negativamente) na sua compreensão da ligação do fenômeno estudado e das funções exponenciais.''corroboram a importância da metodologia neste processo de aprendizagem:

R1 *''A metodologia foi de grande ajuda na compreensão do fenômeno, pois pode mostrar o comportamento, principalmente a sua característica de decaimento exponencial, que veio a mostrar como as funções exponenciais podem ser úteis na modelagem de um problema.''*

R2 *''O fato de ter tido uma explicação e em seguida uma demonstração do fenômeno e de como a função dele se comportava quando jodado (sic) no Geogebra, possibilitou que entendêssemos claramente que este fenômeno se comporta de maneira exponencial.''*

R3 *''Foi interessante fazer uma ligação entre as funções exponenciais e a algo presente em nosso cotidiano. Ajuda a ter uma maior compreensão das funções, pois essas deixam de ser algo abstrato.''*

A importância da utilização do *software* GeoGebra também foi ressaltada nestas descrições:

R4 *''O fato de visualmente ter as coisas 'acontecendo' facilitou bastante o intendimento (sic), também por ter utilizado um programa já conhecido, se tornou mais fácil a compreensão.''*

R5 *''Os métodos utilizados foram bem claros, facilitando o entendimento. O auxílio do software Geogebra traz praticidade ao desenvolvimento de equações e desenho de gráficos.''*

R6 *''A metodologia foi essencial , pois facilitou bastante o entendimento, cujo foi feita relações do dia-a-dia que contribuíram para um melhor desempenho. Incluindo a utilização do software geogebra , que permitiu uma ampliação do rendimento na aula.''*

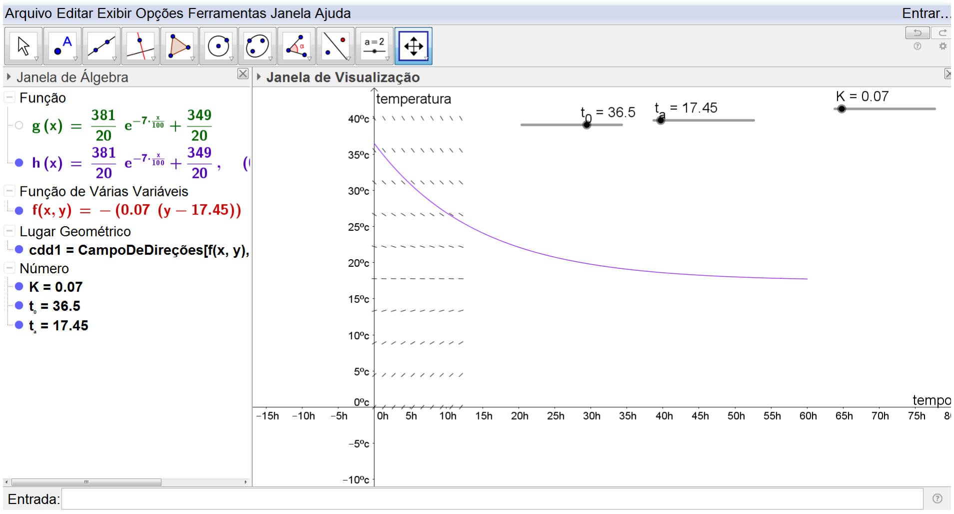
Ainda na etapa de construção do Campo de Direções, relativo às taxas de variações, os discentes já conseguiam visualizar como o decaimento da concentração ocorreria. Este fato pode ser confirmado pelas descrições feitas em resposta ao pedido ''Descreva como a utilização do campo de direções das taxas de variação no GeoGebra ajudou você a identificar o comportamento final dos fenômenos como funções exponenciais.'':

R1 *''A característica do campo de direções ajuda a visualizar a tendencia de direções que o gráfico de uma função vai ter.''*

R2 *''Ajudou a compreender o sentido do movimento, no caso o decaimento, ela foi muito boa para gerar uma aproximação da edo do modelo sem conhecer sua solução''*

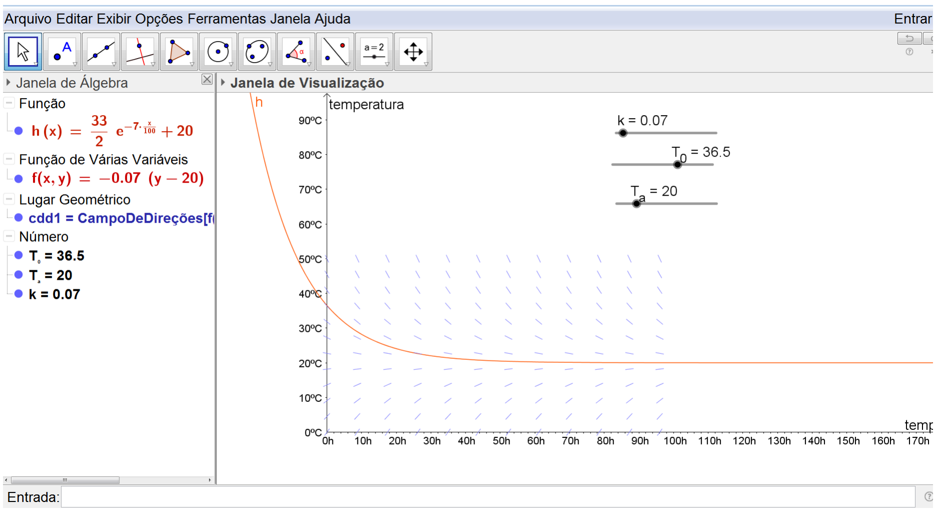
Os modelos da Lei do Resfriamento de Newton e de crescimento populacional de Malthus foram explicados pelo pesquisador de maneira que os estudantes acompanharam o processo fazendo suas próprias construções no GeoGebra. Nas Figuras 41, 42, 43 e 44 estão ilustradas duas construções de cada modelo, feitas pelos cursistas. Estas imagens corroboram a ideia de que os estudantes compreenderam os procedimentos previstos nos roteiros de construção.

Figura 41 – Construção do Modelo de resfriamento por um cursista.



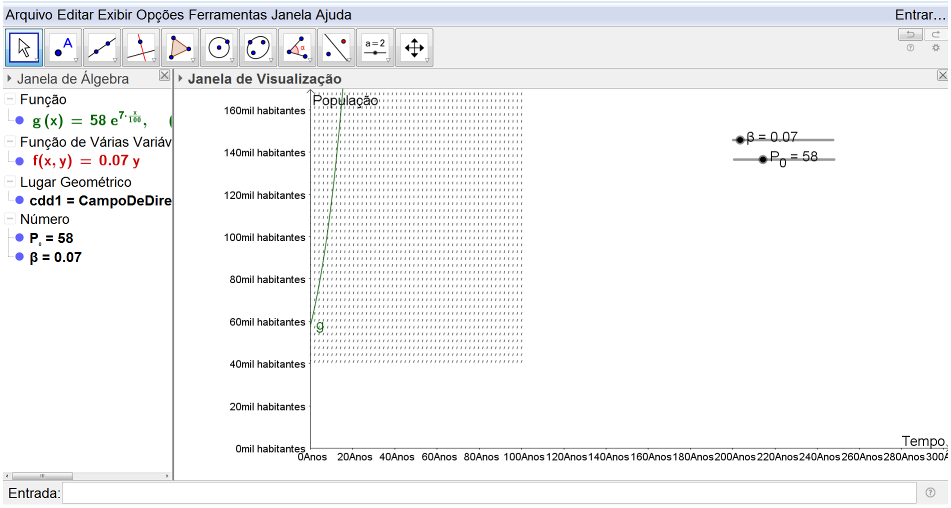
Fonte: Produzida por um cursista.

Figura 42 – Construção do Modelo de resfriamento por outro cursista.



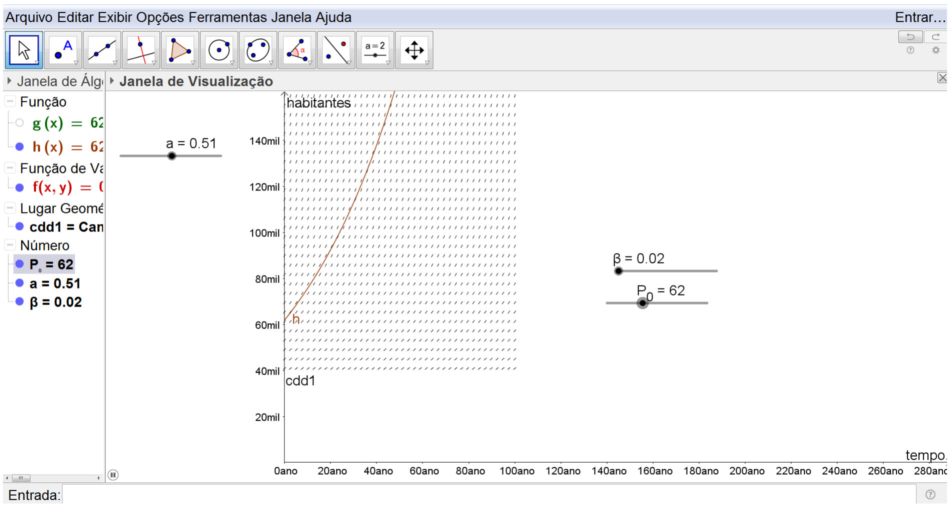
Fonte: Produzida por um cursista.

Figura 43 – Construção do Modelo de Crescimento Populacional de Malthus por um cursista.



Fonte: Produzida por um cursista.

Figura 44 – Construção do Modelo de Crescimento Populacional de Malthus por outro cursista.



Fonte: Produzida por um cursista.

A solicitação “Descreva as características que você percebeu do fenômeno estudado que o ligam a funções exponenciais e qual a importância da Modelagem Matemática com o auxílio do GeoGebra para você perceber estas características.” do Questionário 03 foi tecida segundo a hipótese lançada durante a análise *a priori* de que a utilização da Modelagem Matemática possibilitaria a contextualização do processo de ensino-aprendizagem das Funções Exponenciais e Logarítmicas. Algumas respostas dos estudantes estão descritas a seguir:

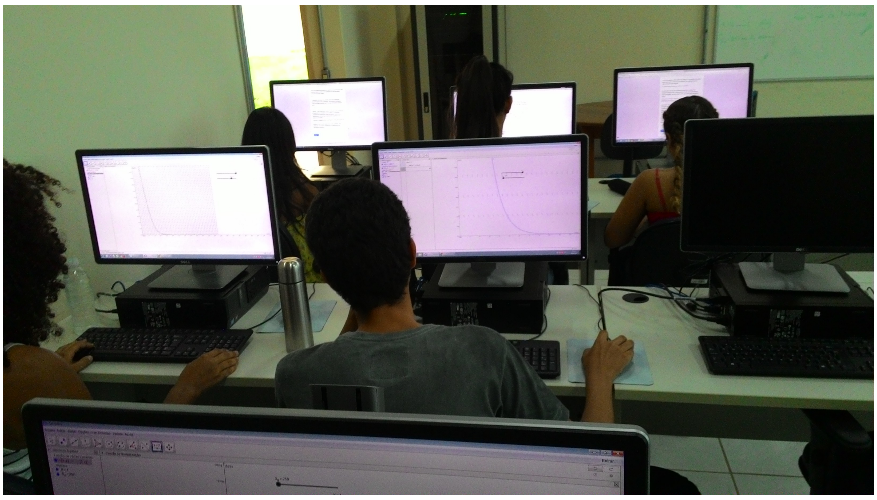
R1 *“Foi possível perceber, previamente o comportamento que o modelo teria por se tratar de um fenômeno que é descrito pela função exponencial, e além de tudo a modelagem ajuda a perceber melhor tais características por tornar o fenômeno mais visível.”*

R2 *“O fenômeno (eliminação do álcool no organismo), está relacionado diretamente à concentração do álcool no organismo. Pela sua variação estar relacionada diretamente com seu valor, usamos uma função exponencial pra examinar este fenômeno, já que as funções exponencias também têm essa características. Com o Geogebra, foi possível visualizar a taxa de variação da função e, como a taxa de variação diminui junto a concentração.”*

R3 *“No fenômeno estudado foi possível perceber que as funções exponenciais estão presente, percebendo-se que a ligação entre tempo e concentração obedece um formato de função exponencial. A Modelagem Matemática auxilia a fazer previsões a partir de dados obtidos previamente, e o Geogebra ajuda a demonstrar graficamente a essa modelagem.”*

Na Aula 04, os discentes deveriam construir modelos utilizando os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores sobres os comando do GeoGebra e a Modelagem Matemática. Os modelos propostos para serem construídos foram o Modelo de Decaimento da Concentração de drogas no organismo e o Modelo de Decaimento Radioativo. A Figura 45 ilustra os estudantes construindo os modelos.

Figura 45 – Estudantes construindo os modelos da Aula 04.



Fonte: Produzida pelo autor.

Os modelos seguiam a mesma dinâmica dos roteiros utilizados durante a Aula 03. Neste processo, os estudantes utilizaram os modelos para estimar concentrações de droga em determinado instante para certos parâmetros ou para estimar a meia vida de substâncias radioativas.

Através do Questionário 04 (aplicado na Aula 05) foi verificado, nesta intervenção, se os estudantes perceberam a importância das taxas de variações e dos campos de direções nas construções dos modelos. A solicitação referente a esta constatação foi "A utilização das taxas de variação junto dos campos de direções ajudou você a relacionar os fenômenos estudados com as funções exponenciais? Em caso afirmativo descreva como.". Algumas descrições dos cursistas aparecem a seguir:

R1 *"Sim, pois ao ver o expoente da função exponencial, podemos ver as taxas de crescimento ou decrescimento, pois a taxa de variação é o número que acompanha a função, segundo a regra da derivação da função exponencial natural. Quando usamos o campo de direções, podemos visualizar como seria o comportamento de determinado fenômeno, pois ele nos fornece a inclinação da função no gráfico."*

R2 *"Sim, pois com a ajuda deles era possível observar melhor como acontecia o comportamento do gráfico, se ele ia crescer ou decrescer e em que sentido e direção."*

Na Aula 05, para construir o Modelo de crescimento populacional Logístico contínuo (Verhulst), os estudantes pesquisaram dados de cidades no site[5] do IBGE. Os dados pesquisados de cada cidade eram referentes às populações, segundo os Censos realizados entre os anos de 1970 e 2010.

Após participarem das construções os discentes responderam à solicitação do Questionário 4 "Descreva suas impressões sobre a utilização das ferramentas de regressão do GeoGebra para modelar o crescimento populacional através das teorias de Malthus (crescimento exponencial) e de Verhulst (crescimento logístico) com os dados reais do IBGE.", algumas descrições estão relacionadas a seguir:

R1 *"As ferramentas de regressão do GeoGebra facilitam muito o trabalho com esse tipo de dado relacionado a estatísticas, pois apenas com os dados coletados previamente já é possível obter as equações referentes aos dados e assim traçar os gráficos, sendo possível também, analisar facilmente a taxa de crescimento, e a população máxima, ou mínima que uma população pode alcançar, isto no modelo de Verhulst."*

R2 *"Pode-se notar que em alguns casos ocorriam discrepância, mas na maioria das vezes eram bem aproximado, tendo a de Verhulst se aplicando melhor."*

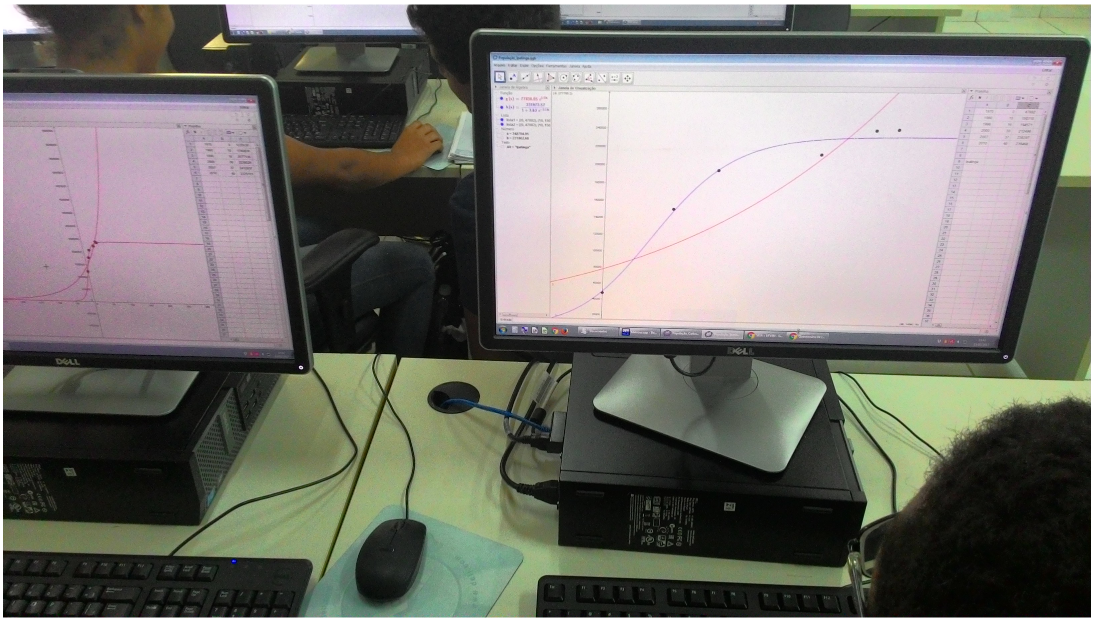
R3 *"Utilizando o GeoGebra era possível analisar como e quanto ia crescer ou decrescer a população. E os dados do IBGE serviriam de uma base para que pudesse comparar qual das teorias melhor se enquadravam na modelagem do fenômeno."*

[5] <http://www.cidades.ibge.gov.br/v3/cidades/home-cidades>

R4 *''As teorias nos ajudaram a analisar e prevermos a população de uma cidade .Com as ferramentas do geogebra poderíamos concluir se a população iria crescer ou decair e perceber qual teoria se adequaria com o número real de população das cidades.''*

A Figura 46 ilustra os estudantes fazendo as construções da Aula 05.

Figura 46 – Estudantes construindo os modelos da Aula 05.



Fonte: Produzida pelo autor.

Para finalizar as intervenções na Aula 05, os estudantes responderam à solicitação ''Descreva como as atividades desta aula ajudaram você a relacionar as funções exponenciais e logarítmicas aos fenômenos estudados.''. As descrições corroboram a validação positiva da utilização dos modelos para a contextualização do conteúdo de Funções Exponenciais e Logarítmicas. Algumas descrições estão relacionadas a seguir:

R1 *''Eu agora entendo porque a função e^x é a mais usada, eu já sabia isso, mas não sabia o porquê. Agora eu entendo que ela é mais utilizada, pela sua praticidade, pois é fácil observar a taxa de variação de uma função, olhando o expoente da solução da equação que descreve o fenômeno.''*

R2 *''Devido à metodologia, por ser aplicado à um fenômeno real, possibilita visualizar melhor o comportamento das funções.''*

R3 *''Com as aulas, podemos notar as principais características dos fenômenos, e notar a grande utilidade das funções exponenciais na modelagem, uma vez que muitos fenômenos tem características exponenciais.''*

R4 *''As aulas ajudaram a entender como essas funções podem ser aplicadas na prática, em fenômenos do cotidiano. Pois até o momento oque eu tinha visto ou aprendido era apenas relacionado a parte algébrica da função.''*

R5 *''Ao analisar cada fenômeno pude observar que seu comportamento está diretamente ligado a sua função . Os problemas que apresentam tal decrescimento e crescimento não podem ser expressadas por polinomiais ,então essas funções(exponencias e logarítimicas) são básicas para sua resolução . Vemos em que podemos aplicar cada função em fenômenos reais , já que durante muito tempo sabíamos sobre a parte algébrica delas. Foi muito interessante !''*

Considerações

Durante a fase de experimentação, foi detectado pela análise dos questionários que os discentes perceberam a importância da utilização das Mídias Informáticas na interpretação dos fenômenos estudados. Os seguintes trechos das descrições produzidas pelos discentes corroboram esta análise:

R1 *''O fato de visualmente ter as coisas 'acontecendo' facilitou bastante o intendimento, também por ter utilizado um programa já conhecido, se tornou mais fácil a compreensão.''*

R2 *''...Observar essa modelagem no Geogebra ajuda a ter um entendimento maior da variação de um fenômeno em função do tempo. Com suas ferramentas o estudo de modelos se torna mais fácil.''*

R3 *''...Os fenômenos da natureza muitas vezes são representados por equações, funções , o geogebra trabalha com gráficos, para ajudar analisa-los e calcula coisas que manualmente são complicadas de resolver.''*

R4 *''A modelagem Matemática com o auxílio do geogebra é mais fácil perceber as mudanças ocorridas com mais facilidade e analisar o seu comportamento através de um gráfico...''*

R5 *''A importância da Modelagem, é que ela nos ajuda a prever o que irá acontecer, a fazer suposições com o auxílio do software, e seus respectivos comandos. Consegue-se ver graficamente e equacionalmente as possibilidades da necessidade em questão.''*

Nas descrições feitas em resposta às solicitações dos questionários, os estudantes valorizaram a utilização dos modelos de crescimento e decaimento no estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Algumas descrições estão evidenciadas no seguintes trechos:

R1 *''A metodologia foi de grande ajuda na compreensão do fenômeno, pois pode mostrar o comportamento, principalmente a sua característica de decaimento exponencial, que veio a mostrar como as funções exponenciais podem ser úteis na modelagem de um problema.''*

R2 *''Foi interessante fazer uma ligação entre as funções exponenciais e a algo presente em nosso cotidiano. Ajuda a ter uma maior compreensão das funções, pois essas deixam de ser algo abstrato.''*

R3 *''As aulas ajudaram a entender como essas funções podem ser aplicadas na prática, em fenômenos do cotidiano. Pois até o momento oque eu tinha visto ou aprendido era apenas relacionado a parte algébrica da função.''*

Os discentes demonstraram compreender a importância das equações diferenciais e das equações de diferenças na descrição de fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais, pois relataram nas descrições:

R1 *''A modelagem com equações diferencias nos permite avaliar o comportamento de uma função em determinado intervalo de tempo. Já as de diferenças, nos permitem avaliar o comportamento do fenômeno em certos instantes de tempo.A primeira pode ser usada em intervalos contínuos para prever o crescimento e decrescimento de populações. E a segunda para prever em certo instantes de tempo no passado ou no futuro a situação avaliada.''*

R2 *''Pensando de uma maneira geral percebe-se que você pode prever coisas que acontecerão tempos a frente como o clima pra construção e relevo.Serve em qualquer área de engenharia exemplo disso evolução de doenças e vários. Além disso, para resolução de problemas .''*

R3 *''Como engenheiro Civil, pode-se usar para prever erros, economia de tempo e custo da obra, melhor qualidade do projeto final, etc''*

A importância da Modelagem Matemática na construção do conhecimento científico foi evidenciada pelas seguintes descrições dos estudantes:

R1 *''É um procedimento que permite ao Engenheiro ou cientista prever o comportamento de certo fenômeno, a partir de hipóteses e solução de um problema que se aproxima da situação real.''*

R2 *''É notório que é importante conhecer um fenômeno e suas respectivas características, como no exemplo citado de hoje, que foi a Eliminação do álcool no sangue. Sabendo as medidas de concentração de álcool no sangue, e dados físicos da pessoa, consegue-se prever quanto tempo uma pessoa 'bêbada' demora para 'voltar a si'. Então, pode-se dizer que a importância é o conhecimento, a 'previsão' do que irá acontecer.''*

R3 *''É necessário conhecer as características do fenômeno, pois, a partir das leis que regem o fenômeno em questão, podemos prever matematicamente seu comportamento, a fim de avaliar e estudar seu estado em determinado tempo. Assim, em face a um processo natural, podemos entender melhor como ele funciona, e, se necessário, tomar medidas preventivas ou de reparação para o fenômeno.''*

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esta seção tem o objetivo de discutir os resultados obtidos durante a fase de experimentação. É importante que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, desvelando seus procedimentos de raciocínio, segundo Pais (2015).

O processo de validação é fundamentado no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, de acordo com Carneiro (2005). Segundo Artigue (1996), o confronto destas duas análises será utilizado para investigar o que foi considerado nas hipóteses, verificando os resultados do processo.

Para fins de esclarecimento, serão detalhadas novamente as variáveis locais definidas nas análises *a priori* e depois serão, ou não, validadas com os trechos das descrições dos estudantes ou observações feitas pelo pesquisador sendo relacionados para justificar a validação.

6.1 Análise *a posteriori* e validação

Esta análise apresentará, aula por aula, cada análise *a priori*, e depois a análise *a posteriori*. Finalmente, em seguida, será feita, ou não, a validação de cada atividade. No primeiro momento, serão analisadas as atividades das Aulas 01 e 02 que não utilizaram o GeoGebra.

Aula 01

Atividade: Apresentação teórica, de 60 minutos, sobre as funções exponenciais e logarítmicas segundo Lima et al. (2012a) e Lima (2013). No total, 15 discentes responderam ao questionário.

Análise *a priori*: Era esperado que o estudante fosse capaz de relacionar conceitos relativos às definições e caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas.

Análise *a posteriori*: Os estudantes responderam ao Questionário 01 e os trechos **R1**, **R2**, **R3**, **R4** e **R5** a seguir, indicam que os discentes souberam relacionar características e definições pertinentes às funções trabalhadas.

R1 *''As funções exponenciais tem um crescimento e um decaimento muito rápido. Ela á inversa da função logarítmica. Não é monótona injetiva. Ao usar a definição de limite para derivada e o resultado não depender da variável "x", certamente ela é uma função exponencial. A função exponencial transforma soma em produto.''*

R2 *''As funções exponenciais são aquelas que crescem e decrescem muito rapidamente. Ela é inversa da função logarítmica, com domínio R e contradomínio R+''*

R3 *''A funções exponenciais são injetivas e monótonas''*

R4 *''As funções exponenciais são inversas às funções logarítmicas, são funções exponenciais de base 'e', bijetoras, transforma soma em produto, e ajuda na modelagem matemática como por exemplo no crescimento radioativo. Transformam números Reais, em Reais positivos.''*

R5 *''A função logarítmica tem o domínio real positivo e a imagem real e ela é o inverso das exponenciais. A função logarítmica transforma produto em soma.''*

Validação: Pela comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*, desta atividade, considera-se que o objetivo foi concluído.

Aula 02

Atividade: Explanação oral, com auxílio da lousa, de 80 minutos abordando algumas noções de Modelagem Matemática, noções de equações diferenciais e de diferenças, noções funções contínuas e discretas. No total, 13 estudantes responderam ao questionário 02.

Análise *a priori*: Era esperado que o discente relacionasse corretamente ideias referentes aos seguintes itens: i) modelagem matemática; ii) equações diferenciais; iii) equações de diferenças; iv) funções contínuas e funções discretas.

Análise *a posteriori*: Os discentes conseguiram relacionar corretamente os ítens i), ii), porém tiveram dificuldade e não conseguiram, em sua maioria, relacionar o item iii), já o item iv) tiveram dificuldades, mas conseguiram relacionar algumas ideias:

i) modelagem matemática: Conseguiram explicitar características, como pode ser visto em **R1** e **R2**:

R1 *''Do fenômeno você tira inferências, dados, hipóteses (Teoria intrínseca). Através disso você cria modelos simplistas e trabalha em cima do modelo, fazendo previsões sobre o fenômeno. Quanto mais o modelo se aproxima da realidade mais complexo, mais difícil para ser aplicado, trabalha-se mais com o computador e a modelagem fica mais precisa.''*

R2 *''Modelagem é um processo de compreensão de algum fenômeno observado, partindo da analise de dados, teorias e experimentações, para se obter de início um modelo simples que futuramente possa ser refinado com intuito de se aproximar cada vez mais da realidade observada.''*

ii) equações diferenciais: Conseguiram relacionar características, como pode ser visto em **R3** e **R4**, parte desta compreensão deveu-se ao fato de já terem estudado tais equações no BC&T:

R3 *''...equações diferenciais são aquelas que envolvem derivadas,números e igualdades de uma função''*

R4 *''Antes do ingresso no curso superior não. Nas equações diferenciais, tem-se como resposta funções; encontra-se taxas de variações (a taxa de variação é proporcional a função); é a equação que tem derivada; mede-se e a partir da variação, descobre-se funções.''*

iii) equações de diferenças: Disseram não conhecer e pouco compreenderam do que foi explicado, como poder ser visto nos trechos **R5** e **R6**:

R5 *''...hoje foi a primeira vez que tive contato com este tipo de equação.''*

R6 *''Não tinha ouvido antes, mas hoje obtive uma noção básica de que elas são analisadas em intervalos.''*

iv) funções contínuas e funções discretas: Com dificuldades, conseguiram relacionar, como poder ser visto nos trechos **R7** e **R8**:

R7 *''As funções discretas são aplicadas nas equações de diferenças, sendo que trabalham apenas com os números inteiros. Já as funções contínuas são usadas nas equações diferenciais, por terem a possibilidade de ser diferenciáveis em todo o seu domínio.''*

R8 *''As funções discretas estão relacionadas a equações de diferenças e as continuas a equações diferencias.''*

Validação : Pelo exposto, os objetivos dos itens i), ii) foram atingidos, o objetivo do item iii) não foi atingido e o objetivo do item iv) foi atingido parcialmente.

Agora, as atividades das aulas 03, 04 e 05 serão analisadas, levando em contas as hipóteses:

A) A utilização de computadores, com o *software* GeoGebra como recurso didático, fomenta as possibilidades de visualização, cálculo e interpretação;

B) O estudo das funções exponencial e logarítmica, através dos modelos de crescimento e decaimento, melhora a compreensão destes conteúdos;

C) Há relação entre o estudo contextualizado das funções exponenciais e logarítmicas e a aplicação do conteúdo aprendido em situações reais, pelos discentes;

Aula 03

Após as atividades desta aula, 17 estudantes responderam ao questionário 03, auxiliando na análise *a posteriori*.

Atividade: Construção do Modelo: ''Eliminação de álcool ingerido'' utilizando o roteiro.

1º Passo: Hipótese envolvida: B)

Análise *a priori*: Assim, era esperado pelo professor que o estudante, a par de informações significantes contidas nos livros e *internet*, extraísse as ideias relevantes do fenômeno de eliminação de álcool ingerido, para converter em linguagem matemática.

Análise *a posteriori*: Observando-se as construções feitas pelos discentes percebeu-se que conseguiram traduzir informações, sobre o processo de eliminação de álcool do organismo, em hipóteses sucintas que foram transformadas em linguagem matemática. Os relatos **R1** e **R2** mostra que os estudantes perceberam a importância de se conhecer e utilizar as informações sobre o fenômeno.

R1 *''É extremamente importante conhecer as características de um fenômeno para modelá-lo, pois é preciso inicialmente identificar o problema,formular hipóteses e fazer previsões, sem estudá-lo é impossível passar por essas etapas.''*

R2 *''É notório que é importante conhecer um fenômeno e suas respectivas características, como no exemplo citado de hoje, que foi a Eliminação do álcool no sangue... ''*

Validação : Através desta análise, tem-se que a hipótese envolvida foi validada.

2º Passo: Hipótese envolvida: A)

Análise *a priori*: No **2º passo**, era esperado que o discente criasse um controle deslizante com intervalo pertinente para cada constante.

Análise *a posteriori*: Observando as construções dos discentes percebe-se que conseguiram criar controles deslizantes condizentes com os intervalos de variações das constantes.

Validação: Por esta análise, conclui-se que a hipótese envolvida foi validada.

3º passo: Hipótese envolvida: A)

Análise *a priori*: Neste passo, era esperado que o discente conseguisse vincular uma função de duas variáveis relacionada à equação diferencial $\frac{dc}{dt} = -kc$.

Análise *a posteriori*: Observando-se as construções dos discentes, na tela do computador, percebeu-se que conseguiram relacionar funções de duas variáveis às equações diferenciais relacionadas ao modelo.

Validação: Esta análise confirma a validação da hipótese envolvida.

4º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Esperava-se que o discente vinculasse o campo de direções às possíveis soluções do sistema de equação diferencial, relacionado ao fenômeno. Também era esperado que o discente conseguisse visualizar como o decaimento da concentração ocorre.

Análise *a posteriori*: Os discentes conseguiram visualizar o comportamento da concentração em função do tempo, observando o campo de direções e já imaginavam qual família de funções seriam as soluções. Os trechos **R1**, **R2** e **R3** ilustram esta constatação.

R1 *''A característica do campo de direções ajuda a visualizar a tendencia de direções que o gráfico de uma função vai ter.''*

R2 *''Com o auxilio do campo de direção, foi possível analisar o comportamento de decaimento do fenômeno, evidenciando o caráter exponencial dele.''*

R3 *''Ajudou de forma, a aplicar diretamente o conhecimento oferecido, sendo que o geogebra foi uma ferramenta essencial no entendimento, pois no campo de direções me informava qual era o comportamento da função de acordo as variações eram feitas em k e C_0.''*

Validação: De acordo com esta análise, as hipóteses envolvidas foram validadas.

5º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Desta forma, era esperado que o estudante vinculasse a tendência de decaimento da concentração, prevista no campo de direções, à função exponencial decrescente da solução.

Análise *a posteriori*: Foi observado que os discentes vincularam a solução gráfica do sistema à uma função exponencial decrescente. Os seguintes trechos **R1** e **R2**, corroboram a constatação anterior.

R1 *‘‘O tempo está diretamente ligado a quantidade inicial de álcool que estava no sangue, **decaindo exponencialmente**. Quanto mais álcool , mais rápido será expulso do corpo até que chegue uma hora que a partir daí ele começa a perder lentamente esse álcool.’’*

R2 *‘‘Foi possível perceber, previamente o comportamento que o modelo teria por se tratar de um fenômeno que é **descrito pela função exponencial**, e além de tudo a modelagem ajuda a perceber melhor tais características por tornar o fenômeno mais visível.’’*

Validação: Desta maneira, as hipóteses envolvidas foram validadas.

6º passo: Hipótese envolvida A)

Análise *a priori*: Esperava-se que o estudante conseguisse vincular o gráfico dinâmico, a uma simulação do decaimento da concentração de álcool do organismo.

Análise *a posteriori*: Foi observado, que os estudantes vincularam o gráfico dinâmico à uma simulação do decaimento da concentração. O trechos **R1** confirma esta afirmação.

R1 *‘‘A velocidade de decaimento, que é dependente da concentração atual, ligando a ideia de variação relativa. Com o geogebra é possível ver o quão importante é essa ligação.’’*

Validação: Desta maneira, a hipótese envolvida foi validada.

7º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Era esperado que o discente percebesse que quanto maior for c, ou seja, quanto maior for a concentração de álcool, mais rápido esta concentração decairá. Era esperado que o estudante percebesse este fato pela curvatura do gráfico, que quanto mais verticalizada maior é a concentração.

Análise *a posteriori*: Os estudantes perceberam a relação do valor da concentração do álcool e a velocidade de decaimento. Este fato foi constatado pela observação dos diálogos entre os discentes e pelos trechos **R1**, **R2** e **R3**, a seguir.

R1 *‘‘**Quanto maior o valor inicial, mais rápido é o seu decaimento**, ou dependo do caso, crescimento. Os fenômenos da natureza muitas vezes são representados por equacões, funções , o geogebra trabalha com gráficos, para ajudar analisa-los e calcula coisas que manualmente são complicadas de resolver.’’*

R2 *“A velocidade de decaimento, que é dependente da concentração atual, ligando a ideia de variação relativa. Com o geogebra é possível ver o quão importante é essa ligação.”*

R3 *“O tempo está diretamente ligado a quantidade inicial de álcool que estava no sangue, decaindo exponencialmente. Quanto mais álcool , mais rápido será expulso do corpo até que chegue uma hora que a partir daí ele começa a perder lentamente esse álcool.”*

Validação: Desta forma, as hipóteses envolvidas foram validadas.

8º passo: Hipótese envolvida: B)

Análise *a priori*: Era esperado que o estudante relacionasse o decaimento da concentração de álcool do organismo à função exponencial de base e, dada como resposta no **5º passo**. Esperava-se também que o discente percebesse a vantagem de se escrever a solução final como uma função do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$, como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

Análise *a posteriori*: Os cursistas perceberam que a função exponencial de base natural apareceu como solução para definir o comportamento da eliminação de álcool do organismo. As observações e o trecho **R1**, corroboram esta constatação.

R1 *“Eu agora entendo porque a função e^x é a mais usada, eu já sabia isso, mas não sabia o porquê. Agora eu entendo que ela é mais utilizada, pela sua praticidade, pois é fácil observar a taxa de variação de uma função, olhando o expoente da solução da equação que descreve o fenômeno.”*

Validação: A hipótese envolvida foi validada.

Atividade: Construção do Modelo: “Lei do resfriamento de Newton” utilizando o roteiro.

1º Passo: Hipótese envolvida: B)

Análise *a priori*: Assim, era esperado pelo professor que o estudante, a par de informações significantes contidas nos livros e na *internet*, extraísse as ideias relevantes do fenômeno referente à Lei do resfriamento de Newton, para converter em linguagem matemática.

Análise *a posteriori*: Analisando-se as construções feitas pelos discentes notou-se que conseguiram elencar as hipóteses relevantes sobre a Lei do resfriamento de Newton. Os discentes traduziram estas hipóteses do modelo em linguagem matemática, usando o comando de texto do GeoGebra. Os relatos **R1** e **R2** mostra que os estudantes perceberam a importância de se conhecer e utilizar as informações sobre o fenômeno.

R1 *''A análise do comportamento do fenômeno, é **totalmente dependente da teoria por traz do acontecimento**, pois é preciso entender quais são as variáveis e qual é o comportamento e a função de cada uma para se poder modelar.''*

R2 *''Para a construção de um modelo matemático é necessário que se conheça, na maioria das vezes, profundamente sobre o assunto com o qual irá trabalhar. Pois será necessário estudar o fenômeno de acordo com o nível de complexidade do modelo para que esse seja o mais próximo da realidade, por mais simples que seja.''*

Validação : Através desta análise, tem-se que a hipótese envolvida foi validada.

2º Passo: Hipótese envolvida: A)

Análise *a priori*: No **2º passo**, era esperado que o discente criasse um controle deslizante com intervalo pertinente para cada constante.

Análise *a posteriori*: Observando as construções dos discentes, percebeu-se que conseguiram criar controles deslizantes condizentes com os intervalos de variações das constantes, relativas à Lei de resfriamento de Newton.

Validação: Por esta análise, conclui-se que a hipótese envolvida foi validada.

3º passo: Hipótese envolvida: A)

Análise *a priori*: Desta maneira, era esperado neste passo que o discente conseguisse vincular uma função de duas variáveis relacionada à equação diferencial $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$, com T_a sendo a temperatura do ambiente.

Análise *a posteriori*: Observando-se as construções dos discentes, na tela do computador, Figura 47 por exemplo, percebeu-se que conseguiram relacionar funções de duas variáveis às equações diferenciais relacionadas ao modelo.

Figura 47 – Função de duas variáveis vinculada à equação diferencial

Fonte: Produzida pelo autor.

Validação: Esta análise confirma a validação da hipótese envolvida.

4º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Desta maneira, esperava-se que o discente vinculasse o campo de direções às possíveis soluções do sistema de equação diferencial relacionado ao fenômeno. Era esperado que o discente conseguisse visualizar como o decaimento da diferença de temperatura ocorre.

Análise *a posteriori*: Os discentes conseguiram visualizar o comportamento da diferença de temperatura, entre o corpo e o ambiente, em função do tempo. Eles observaram o campo de direções e visualizaram as possíveis soluções. Esta constatação, feita pelo pesquisador, foi motivada pela observação das falas dos discentes que estavam criando os campos de direções: "*Olha, as setas estão inclinadas para baixo. Acho que a diferença de temperatura vai cair.*", "*Nossa! Consigo enxergar o gráfico de uma função exponencial observando as setas.*"

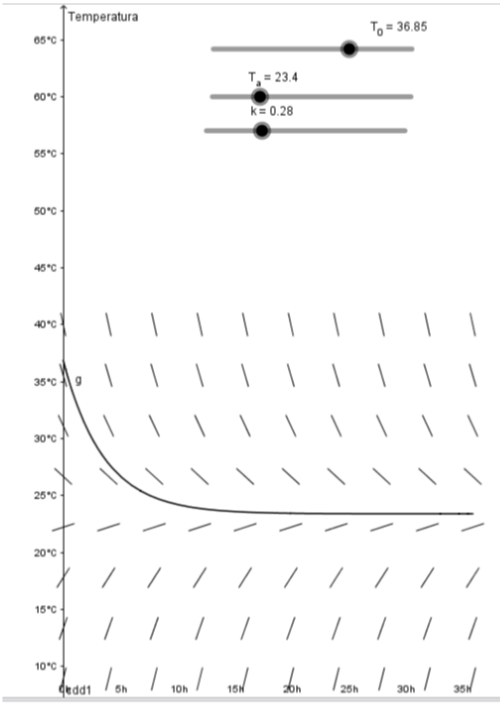
Validação: De acordo com esta análise, as hipóteses envolvidas foram validadas.

5º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Desta forma, era esperado que o estudante vinculasse a tendência de decaimento da diferença de temperatura, prevista no campo de direções, à função exponencial decrescente da solução.

Análise *a posteriori*: Foi observado que os discentes vincularam a solução gráfica do sistema à uma função exponencial decrescente. Na figura 48, observa-se um exemplo, feito por um estudante, da solução gráfica. Os estudantes, ao analisar suas produções, falaram por exemplo: "O campo de direções 'margeia' a função".

Figura 48 – Campo de direções e solução gráfica da equação diferencial, feitos por um estudante



Fonte: Produzida pelo autor.

Validação: Desta maneira, as hipóteses envolvidas foram validadas.

6º passo: Hipótese envolvida A)

Análise *a priori*: Esperava-se que o estudante conseguisse vincular o gráfico dinâmico, a uma simulação do decaimento da diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente.

Análise *a posteriori*: Foi observado, que os estudantes vincularam o gráfico dinâmico à uma simulação do decaimento da concentração. Esta constatação foi motivada por falas dos estudantes, como por exemplo: ‘‘Olha! O gráfico está sendo desenhado na tela e posso controlar a velocidade e simular como ocorre na vida real.’’

Validação: Desta maneira, a hipótese envolvida foi validada.

7º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Esperava-se que o estudante percebesse que quanto maior for diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente, mais rápido a temperatura T do corpo decairá. Era esperado que o estudante percebesse este fato pela curvatura do gráfico, mais verticalizada quando a diferença de temperatura é maior.

Análise *a posteriori*: Os estudantes perceberam a relação da diferença de temperatura, entre o corpo e o ambiente, e a velocidade de decaimento. Este fato foi constatado pela observação dos diálogos entre os discentes como: "*O gráfico quando vai passando o tempo ele fica cada vez mais reto*" , "*Perto do começo onde a diferença de temperatura é maior o gráfico esta mais em pé.*"

Validação: Desta forma, as hipóteses envolvidas foram validadas.

8º passo: Hipótese envolvida: B)

Análise *a priori*: Era esperado que o estudante relacionasse o decaimento da diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente à função exponencial de base e, dada como resposta no **5º passo**. Esperava-se também que o discente percebesse a vantagem de se escrever a solução final como uma função do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$, como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

Análise *a posteriori*: Os cursistas perceberam que a função exponencial de base natural apareceu como solução para definir o comportamento do decaimento da diferença de temperatura, entre o corpo e ambiente. As observações dos diálogos entre os estudantes e o trecho **R1**, corroboram esta constatação.

R1 *"A função exponencial de base 'e' apresenta inclinação igual à seu valor. Logo, a variação dessa função sempre tem relação com seu valor. Ela nos permite avaliar fenômenos em que o crescimento ou decrescimento tenha relação direta com sua quantidade medida. Asim são muitos fenômenos naturais, logo, sempre é a melhor opção avaliar tais fenômenos usando funções exponenciais."*

Validação: A hipótese envolvida foi validada.

Atividade: Construção do Modelo: "Modelo de crescimento populacional de Malthus", utilizando o roteiro.

1º Passo: Hipótese envolvida: B)

Análise *a priori*: Assim, era esperado pelo professor que o estudante, a par de informações significantes contidas nos livros e *internet*, extraísse as ideias relevantes do fenômeno de crescimento populacional segundo Malthus, para converter em linguagem matemática.

Análise *a posteriori*: Analisando-se as construções feitas pelos discentes notou-se que conseguiram elencar as hipóteses relevantes sobre a Lei do resfriamento de Newton. Os discentes traduziram estas hipóteses do modelo em linguagem matemática, usando o comando de texto do GeoGebra.

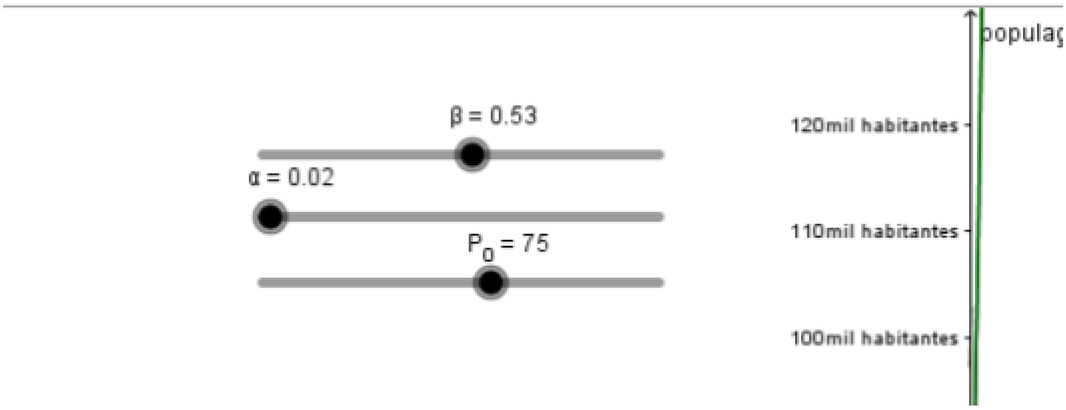
Validação : Através desta análise, tem-se que a hipótese envolvida foi validada.

2º Passo: Hipótese envolvida: A)

Análise *a priori*: No **2º passo**, era esperado que o discente criasse um controle deslizante com intervalo pertinente para cada constante.

Análise *a posteriori*: Observando as construções dos discentes, percebeu-se que conseguiram criar controles deslizantes condizentes com os intervalos de variações das constantes, relativas à Lei de resfriamento de Newton. A Figura 49 ilustra esta constatação.

Figura 49 – Controles deslizantes construídos por um dos cursistas



Fonte: Produzida pelo autor.

Validação: Por esta análise, conclui-se que a hipótese envolvida foi validada.

3º passo: Hipótese envolvida: A)

Análise *a priori*: Desta maneira, era esperado neste passo que o discente conseguisse vincular uma função de duas variáveis relacionada à equação diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$.

Análise *a posteriori*: Observando-se as construções dos discentes, na tela do computador, Figura 50 por exemplo, percebeu-se que conseguiram relacionar funções de duas variáveis às equações diferenciais relacionadas ao modelo.

Figura 50 – Exemplos de Função de duas variáveis vinculada à equação diferencial do modelo malthusiano

Fonte: Produzida pelo autor.

Validação: Esta análise confirma a validação da hipótese envolvida.

4º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Desta maneira, era esperado que o discente vinculasse o campo de direções às possíveis soluções do sistema de equação diferencial relacionado ao fenômeno. Era esperado que o discente conseguisse visualizar como o crescimento populacional ocorre.

Análise *a posteriori*: Os discentes conseguiram visualizar o comportamento, do tamanho da população, em função do tempo. Eles observaram o campo de direções e visualizaram as possíveis soluções. Esta constatação, feita pelo pesquisador, foi motivada pela observação das falas dos discentes que estavam criando os campos de direções: "*Os segmentos estão inclinadas para cima. A população vai aumentar.*", "*Nossa! Consigo enxergar o gráfico de uma função exponencial observando os segmentos.*"

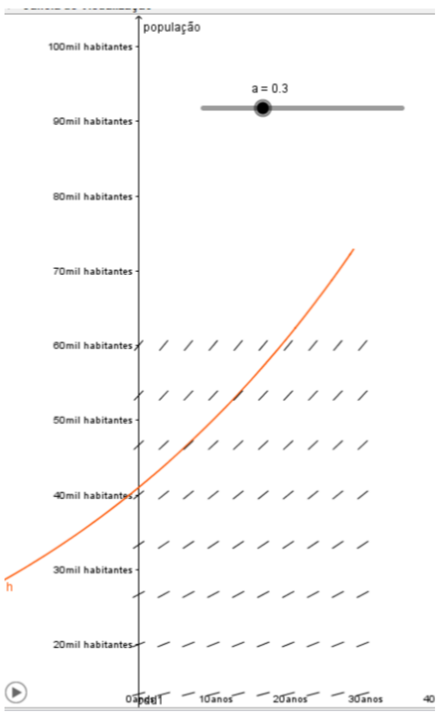
Validação: De acordo com esta análise, as hipóteses envolvidas foram validadas.

5º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Desta forma, era esperado que o estudante vinculasse a tendência de crescimento da população, prevista no campo de direções, à função exponencial crescente da solução.

Análise *a posteriori*: Foi observado que os discentes vincularam a solução gráfica do sistema à uma função exponencial crescente. Na figura 51, observa-se um exemplo, feito por um estudante, da solução gráfica. Os estudantes, ao analisar suas produções, falaram por exemplo: "O campo de direções 'margeia' a função".

Figura 51 – Campo de direções e solução gráfica da equação diferencial, feitos por um estudante



Fonte: Produzida pelo autor.

Validação: Desta maneira, as hipóteses envolvidas foram validadas.

6º passo: Hipótese envolvida A)

Análise *a priori*: Esperava-se que o estudante conseguisse vincular o gráfico dinâmico, a uma simulação do crescimento da população.

Análise *a posteriori*: Foi observado, que os estudantes vincularam o gráfico dinâmico à uma simulação do crescimento populacional. Esta constatação foi motivada por falas dos estudantes, como por exemplo: "Hum! O gráfico está sendo desenhado na tela e posso controlar a velocidade e simular como a população cresce realmente."

Validação: Desta maneira, a hipótese envolvida foi validada.

7º passo: Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Era esperado que o discente percebesse que quanto maior for a população, mais rápido esta população crescerá. Era esperado que o estudante percebesse este fato pela curvatura do gráfico, mais verticalizada quando a população for maior.

Análise *a posteriori*: Os estudantes perceberam a relação o tamanho da população e a velocidade de crescimento. Este fato foi constatado pela observação dos diálogos entre os discentes como: ‘‘*O gráfico quando vai passando o tempo ele fica cada vez mais vertical*’’ , ‘‘*À medida que o tempo passa o gráfico fica mais em pé.*’’

Validação: Desta forma, as hipóteses envolvidas foram validadas.

8º passo: Hipótese envolvida: B)

Análise *a priori*: Era esperado que o estudante relacionasse o crescimento populacional à função exponencial de base e, dada como resposta no **5º passo**. Esperava-se também que o discente percebesse a vantagem de se escrever a solução final como uma função do tipo exponencial sob a forma $f(x) = be^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento/decaimento de f.

Análise *a posteriori*: Os cursistas perceberam que a função exponencial de base natural apareceu como solução para definir o comportamento do decaimento da diferença de temperatura, entre o corpo e ambiente. As observações dos diálogos entre os estudantes e o trecho **R1**, corroboram esta constatação.

R1 ‘‘*Eu agora entendo porque a função e^x é a mais usada, eu já sabia isso, mas não sabia o porquê. Agora eu entendo que ela é mais utilizada, pela sua praticidade, pois é fácil observar a taxa de variação de uma função, olhando o expoente da solução da equação que descreve o fenômeno.*’’

Validação: A hipótese envolvida foi validada.

Aula 04:

Atividade: Construção dos Modelos: ‘‘Decaimento Radioativo’’ e ‘‘Eliminação de drogas do organismo’’ utilizando o roteiro.

Hipóteses envolvidas: A) e B)

Análise *a priori*: Desta forma, era esperado que os estudantes construíssem os modelos e percebessem a importância das taxas de variações e dos campos de direções nas construções dos modelos.

Análise *a posteriori*: Foi verificado, nesta intervenção, que os estudantes perceberam a importância das taxas de variações e dos campos de direções nas construções dos modelos. . Algumas descrições dos cursistas, aparecem a seguir e corroboram esta constatação:

R1 *''Sim, pois ao ver o expoente da função exponencial, podemos ver as taxas de crescimento ou decrescimento, pois a taxa de variação é o número que acompanha a função, segundo a regra da derivação da função exponencial natural. Quando usamos o campo de direções, podemos visualizar como seria o comportamento de determinado fenômeno, pois ele nos fornece a inclinação da função no gráfico.''*

R2 *''Sim, pois com a ajuda deles era possível observar melhor como acontecia o comportamento do gráfico, se ele ia crescer ou decrescer e em que sentido e direção.''*

Validação: As hipóteses envolvidas foram validadas.

Aula 05:

Atividade: Construção dos Modelo de crescimento populacional Logístico contínuo (Verhulst)

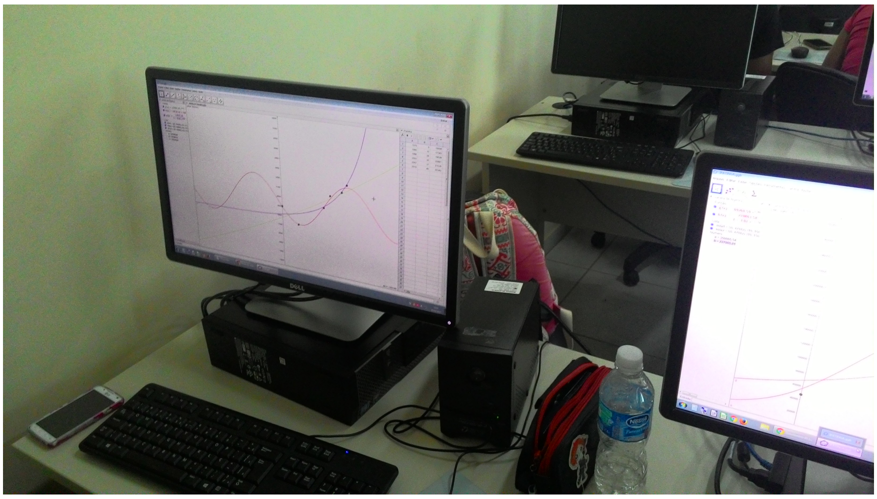
Hipóteses envolvidas: A), B) e C)

Análise *a priori*: Esperava-se que o estudante conseguisse relacionar, da melhor maneira possível, através do ajuste de curvas do GeoGebra os dados populacionais e as funções exponenciais. Também era esperado, que o estudante comparasse a construção do modelo de Malthus com a construção do modelo de Verhulst e que o estudante obtivesse autonomia para trabalhar com os dados e propor novas relações.

Análise *a posteriori*: Os estudantes conseguiram construir e relacionar através do ajuste de curvas do GeoGebra os dados populacionais e as funções exponenciais, como foi constatado nas construções na tela de cada computador. Eles compararam e deixaram suas impressões sobre os modelos de Malthus e Verhulst. Finalmente, ressalta-se que dois estudantes durante a aula 05, na construção dos modelos utilizando os dados do IBGE, perceberam que os dados sobre os censos populacionais, de algumas cidades com cursos universitários, eram melhor indexados com curvas de regressão senoidal. Neste ponto os discentes demonstraram interesse em utilizar a Modelagem

Matemática para estudar a hipótese de que a variação populacional de cidades com perfil de centro universitário e com grande rotatividade populacional tem curva populacional em função do tempo representada por uma senoide. A Figura 52 ilustra um dos estudantes modelando a situação supracitada com um curva senoidal. Estes discentes, procuraram este pesquisador é informaram que deram início ao processo de construção do Trabalho de Conclusão de Curso utilizando as funções senoidais em um das etapas de modelagem do crescimento populacional de espécies sazonais.

Figura 52 – Estudante relacionando variação populacional com uma curva senoidal.



Fonte: Produzida pelo autor.

O fato supracitado é validado por Bassanezi (2014) que relata que o processo de Modelagem Matemática deve se iniciar através de questões emergentes das discussões do atores envolvidos neste processo.

Validação: As hipóteses envolvidas foram validadas.

Análises finais

A utilização dos modelos de crescimento e decaimento se mostrou eficaz para contextualizar o processo de ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas. As seguintes descrições referentes à solicitação do questionário 4 "Descreva como as atividades desta aula ajudaram você a relacionar as funções exponenciais e logarítmicas aos fenômenos estudados." corroboram esta afirmação:

R1 *"Entender os modelos de crescimento e decaimento, ajuda de forma significativa o* *entendimento prático das funções logarítmicas e exponenciais. O ensino baseado na prática pode ser muito útil pra entendimento dessas funções no geral.''*

R2 *''Devido à metodologia, por ser aplicado à um fenômeno real, possibilita visualizar melhor o comportamento das funções.''*

R3 *''Com as aulas, podemos notar as principais características dos fenômenos, e notar a grande utilidade das funções exponenciais na modelagem, uma vez que muitos fenômenos tem características exponenciais.''*

R4 *''As aulas ajudaram a entender como essas funções podem ser aplicadas na prática, em fenômenos do cotidiano. Pois até o momento oque eu tinha visto ou aprendido era apenas relacionado a parte algébrica da função.''*

R5 *''Nota-se que elas ajudaram ao relacionar as funções com aplicação na realidade.''*

Constatou-se que a utilização dos modelos proporcionou aos estudantes a compreensão da utilidade da Modelagem Matemática para as carreiras dos mesmos como engenheiros. Este fato pode ser confirmado pelas seguintes descrições presentes nos questionários:

R1 *''Como engenheiro Civil, pode-se usar para prever erros, economia de tempo e custo da obra, melhor qualidade do projeto final, etc''*

R2 *''Como engenheiro esse tipo de modelagem pode ser usado para prever situações que podem vir a ocorrer ao planejar um determinado trabalho, com essas previsões é possível detectar possíveis erros que podem acontecer durante a execução, seja qual for a área da engenharia.''*

R3 *''A partir da modelagem é possível fazer previsões de determinados fenômenos, oque pode facilitar na tomada de decisões importantes a respeito de algum projeto. Como por exemplo, na engenharia de produção, quanto deve ser ofertado um certo produto em um determinado tempo e local, sabendo como este é demandado por aquela população, é possível fazer um modelo que permita auxiliar o quanto deve ser ofertado de maneira que evite sobras ou falta do produto.''*

R4 *''Pensando de uma maneira geral percebe-se que você pode prever coisas que acontecerão tempos a frente como o clima pra construção e relevo.Serve em qualquer área de engenharia exemplo disso evolução de doenças e vários. Além disso, para resolução de problemas .''*

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

O processo de construção de uma dissertação é complexo e exige tempo e dedicação. Esta dissertação foi importante na construção do conhecimento e possibilitou a compreensão de várias teorias e processos.

Ao longo do processo de execução das etapas do projeto várias fatores influenciaram positivamente o andamento dos trabalhos. Influências como comunicação eficaz da equipe de trabalho, condições satisfatórias e estrutura de funcionamento do Laboratório de Simulação Computacional, quantidade suficiente de material bibliográfico para fundamentação teórica e participação engajada dos estudantes nas intervenções didáticas.

Um dos objetivos que era propor sequências didáticas que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas para os discentes da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Campus Mucuri, foi atingido de maneira satisfatória pois, segundo os cursistas:

''Entender os modelos de crescimento e decaimento, ajuda de forma significativa o entendimento prático das funções logarítmicas e exponenciais. O ensino baseado na prática pode ser muito útil pra (sic) entendimento dessas funções no geral.''

''Com as aulas, podemos notar as principais características dos fenômenos, e notar a grande utilidade das funções exponenciais na modelagem, uma vez que muitos fenômenos tem características exponenciais.''

''Ao analisar cada fenômeno pude observar que seu comportamento está diretamente ligado a sua função . Os problemas que apresentam tal decrescimento e crescimento não podem ser expressadas por polinomiais, então essas funções (exponencias e logarítmicas) são básicas para sua resolução. Vemos em que podemos aplicar cada função em fenômenos reais, já que durante muito tempo sabíamos sobre a parte algébrica delas. Foi muito interessante !''

Durante as intervenções surgiram ideias e novas motivações da parte dos cursistas. Com apontamento extremamente interessante dos resultados obtidos, ressalta-se o fato ocorrido na Aula 05, por exemplo, quando os estudantes estavam analisando o crescimento populacional de algumas cidades e perceberam que os dados de algumas cidades com polos universitários se enquadravam melhor em gráficos de funções senoidais, surgiu então o questionamento se haveria alguma relação. Estes questionamentos durante o processo e surgimento de ideias está intimamente ligado ao fazer Modelagem Matemática Bassanezi (2014).

Finalmente, este trabalho abriu possibilidades de concepção de propostas de intervenções didáticas que visem de fato experiências em sala de aula que contribuam para a compreensão das especificidades matemáticas relativas às funções estudadas.

Para futuros estudos e projetos esta pesquisa pode servir como sugestão de aplicação em sala de aula, guardadas as especificidades de cada ambiente de ensino, bem como ponto de partida de novas investigações utilizando a Modelagem Matemática, o *software* GeoGebra e Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Nesta ocasião é importante ressaltar a existência de outros modelos de crescimento e decaimento que poderiam ser tratados na pesquisa e que exploram as funções exponenciais e logarítmicas e que não foram tratados por falta de tempo. Em referências como Zill (2003), Bassanezi (2012), Nagle, Saff e Snider (2012), por exemplo, encontram-se mais opções de modelos deste tipo.

Finalmente, um fator a ressaltar é a importância de um bom e detalhado planejamento das atividades para o andamento de forma correta da pesquisa e também da organização das informações. O trabalho de Fonseca (2012) ilustra a correta utilização da Engenharia Didática neste aspecto.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; DA SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade Didactic engineering: evolution and diversity. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012. Disponível em: <Disponívelem:<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22/23452>>. Acesso em: 02 mar. 2017.

ALVES, J. E. D. A polêmica Malthus versus Condorcet reavaliada à luz da transição demográfica. **Texto para discussão da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, ENCE/IBGE**, Rio de Janeiro, n. 4, 2002.

ANDREWS, J.; MCLONE, R. R. **Mathematical modelling**. London: Butterworths, 1976.

ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 1. Tradução: Claus Ivo Doering.

ARAúJO, P. C.; IGLIORI, S. B. C. Engenharia didática como uma estatística não-paramétrica. **Caderno de Física da UEFS**, Feira de Santana, (01 e 02), n. 7, p. 133–142, 2009.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, J. (Ed.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193–217.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: **24ª Reunião anual da ANPED**. Caxambu: ANPED, 2001. v. 24, n. 7, p. 1–15.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? por que? como? **Veritati**, Porto, v. 1, n. 4, p. 73–80, 2004.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A.; ARAúJO, J. L. **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisa e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007. v. 3.

BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática - uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. In: **XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Biomatemática IX**. Santos: IMECC, 1999. v. 9, p. 9–22.

BASSANEZI, R. C. **Temas e modelos**. São Paulo: Editora Universidade Federal do ABC, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JUNIOR, W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BELTRãO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem matemática e aplicações: uma abordagem para o ensino de funções. **Educação Matemática Pesquisa**, Pontifícia Universidade Católica de Sao Paulo PUC-SP, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 12, n. 1, 2010.

BIEMBENGUT, M. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 07–32, jul 2009. ISSN 1982-5153. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939>. Acesso em: 03 de mar. 2017.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Blumenau: Edifurb, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. Concepções e tendências de modelagem matemática na educação brasileira. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 1, n. 10, p. 195–204, 2012.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BLUM, W. et al. **Modelling and applications in mathematics education**. Nova York: Springer, 2007.

BORBA, M. d. C. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 2012.

BRASIL. Lei 9394/96 de 20 de dezembro de 1996: Lei de diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Poder Legislativo, Brasília, DF, 23 dez., 1996.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **PCN+:ensino médio. Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. Lei nº 11.705, de 19 de junho de 2008: Altera a lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997, que 'institui o código de trânsito brasileiro', e a lei nº 9.294, de 15 de julho de 1996, que dispõe sobre as restrições ao uso e à propaganda de produtos fumígeros, bebidas alcoólicas, medicamentos, terapias e defensivos agrícolas, nos termos do § 4º do art. 220 da constituição federal, para inibir o consumo de bebida alcoólica por condutor de veículo automotor, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Poder Legislativo, Brasília, DF, 20 jun., 2008. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11705.htm>. Acesso em: 23 mar. 2017.

BRASIL. Lei nº 12.760, de 20 de dezembro de 2012: Altera a lei no 9.503, de 23 de setembro de 1997, que institui o código de trânsito brasileiro. **Diário Oficial da União**, Poder Legislativo, Brasília, DF, 21 dez., 2012. Disponível em:

<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12760.htm>. Acesso em: 23 mar. 2017.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, J. (Ed.). **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35–113.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. Campinas: Biblioteca Digital da Unicamp, 1992.

BURAK, D.; KLüBER, T. E. Concepções de modelagem matemática: Contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17–34, 2008.

CARIUS, A. C.; JúNIOR, R. L. de S.; DA SILVA, J. M. Differential calculus and chemistry: the challenge of an interdisciplinary course. In: **Conference Proceedings. New Perspectives in Science Education**. Florence: Libreriauniversitaria.it, 2017. p. 119. Disponível em: <http://conference.pixel-online.net/NPSE/files/npse/ed0006/FP/3339-ESM2136-FP-NPSE6.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2017.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 85–118, 2005.

CENTRO DE INFORMAçõES SOBRE SAúDE E áLCOOL. **Como falar sobre uso de álcool com seus filhos**. São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.cisa.org.br/upload/ComoFalarAlcoolFilhos.pdf>. Acesso em: 23 de mar. 2017.

DA SILVA, J. M. **Modelos Para a Dinâmica De Vegetação Em áreas Alagáveis Amazônicas**. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2011.

DA SILVA, J. M.; GODINHO, L. A.; MORAES, P. L. Estudos de modelos de equações diferenciais para deflexão de vigas. **Revista Vozes dos Vales**, Teófilo Otoni, v. 1, n. 10, 2016. Disponível em: <http://site.ufvjm.edu.br/revistamultidisciplinar/files/2016/09/JMS01.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2017.

DA SILVA, J. M. et al. Análise de parâmetros populacionais de municípios do nordeste mineiro. **Revista Vozes dos Vales**, Teófilo Otoni, v. 1, n. 03, 2013. Disponível em: <http://site.ufvjm.edu.br/revistamultidisciplinar/files/2011/09/AnC3A1lise-de-parC3A2metros-populacionais-de-municC3ADpios-do-nordeste-mineiro.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2017.

DA SILVA, J. M. d.; JARDIM, D. F.; CARIUS, A. C. O ensino e a aprendizagem de conceitos de cálculo usando modelos matemáticos e ferramentas tecnológicas. **Revista de Ensino de Engenharia**, Brasília, v. 35, n. 2, p. 70–80, 2016. Disponível em: <http://198.136.59.239/~abengeorg/revista/index.php/abenge/article/viewFile/518/763>. Acesso em: 06 mar. 2017.

DANTAS, S. C. **Design, implementação e estudo de uma rede sócio profissional online de professores de Matemática**. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/136324>. Acesso em: 20 de mai. 2017.

DANTAS, S. C.; FERREIRA, G. F. Criando e integrando novas ferramentas no geogebra. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 85, 2014.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates**, SBEM. Ano II, v. 2, p. 15–19, 1989.

ECLESIASTES. In: **A BÍBLIA sagrada**. Brasília: Sociedade Bíblica do Brasil, 1969. Tradução João Ferreira de Almeida. Edição Revista e Corrigida.

FONSECA, L. **Funções Trigonométricas Elementos de "&" para uma Engenharia Didática**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

FRISSO, A. L. et al. Modelo da dispersão de um poluente para preservação da lagoa da pampulha. **ESPACIOS**, Caracas, v. 38, p. 1–11, 2017.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

JARDIM, D. F. et al. Estudando limites com o GeoGebra. **Revista Vozes dos Vales**, Teófilo Otoni, v. 4, n. 8, 2015. Disponível em: <http://site.ufvjm.edu.br/revistamultidisciplinar/files/2015/11/Deborah.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2017.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 2.

LOPES, A. A. D. S. et al. Modelagem do comportamento dispersivo de material impactante em um lago por meio da equação de difusão-advecção. **Ciência e Natura**, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, v. 38, n. 2, p. 756–763, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/19037/pdf>. Acesso em: 03 de mai. 2017.

LUDWIN, C. Blood alcohol content. **Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One+ Two**, Tampa, v. 3, n. 2, p. 1, 2011. Disponível em: <http://scholarcommons.usf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4819&context=ujmm>. Acesso em: 17 mai. 2017.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. v. 2, p. 197–208.

MALTHUS, T. R. **Ensaio sobre a população**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

MASETTI, C.; PIRES, C. M. C. A apresentação de funções exponenciais e logarítmicas em livros didáticos para o ensino médio. In: **Anais do Encontro de Produção Discente**. São Paulo: PUCSP/Cruzeiro do Sul, 2014. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/article/view/943/740>. Acesso em: 17 Mai. 2017.

MATOS, J. F.; CARREIRA, S. The quest for meaning in alunos'mathematical modelling activity. In: **Conference for The Psychology of Mathematics Education**. Valencia: Univérsitat de València, 1996. p. 345–352.

NAGLE, R.; SAFF, E.; SNIDER, A. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

NASCIMENTO, T. S. D. et al. Estudo analítico de um modelo de competição para a interação entre espécies de peixes. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2015. v. 3, n. 2. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/976/989>. Acesso em: 17 mai. 2017.

OLIVEIRA, M. N. A. d. **Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia. PROFMAT, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1157>. Acesso em: 02 fev. 2017.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PEREIRA, L. R.; DA SILVA, J. M.; JARDIM, D. F. Practices for geometry teaching using GeoGebra. In: **Conference Proceedings. New Perspectives in Science Education**. Florence: Libreriauniversitaria.it, 2017. p. 211. Disponível em: <http://conference.pixel-online.net/NPSE/files/npse/ed0006/FP/3336-ESM2205-FP-NPSE6.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2017.

PRATES, D. B. et al. Vaccination strategies: a comparative study in an epidemic scenario. **Journal of Physics: Conference Series**, Athens, v. 738, n. 1, p. 012083, 2016. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1742-6596/738/i=1/a=012083>. Acesso em: 02 mai. 2017.

PRATES, D. B. et al. Simulations of a epidemic model with parameters variation analysis for the dengue fever. **Journal of Physics: Conference Series**, Mykonos, v. 633, n. 1, p. 012008, 2015. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1742-6596/633/i=1/a=012008>. Acesso em: 14 abr. 2017.

SANCHES, A. D. B.; RODRIGUES, R. N. Modelagem matemática da quantidade de álcool no sangue. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2015. v. 3, n. 1. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/432/438>. Acesso em: 17 mai. 2017.

SARTORELLI, J.; HOSOUME, Y.; YOSHIMURAY, E. A lei de esfriamento de newton introdução as medidas em física-parte ii. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 21, n. 1, 1999. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v21_116.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2017.

SIAS, D. B.; TEIXEIRA, R. M. R. Resfriamento de um corpo: a aquisição automática de dados propiciando discussões conceituais no laboratório didático de física no ensino médio. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, v. 23, n. 3, p. 361–382, 2006. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6267/5803>. Acesso em: 19 mai. 2017.

TATSCH, K. J. S.; BISOGNIN, V. Modelagem matemática no ensino médio: alimentação, obesidade e desnutrição. **VIDYA**, Santa Maria, v. 24, n. 42, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/412/386>. Acesso em: 15 mai. 2017.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de softwares utilizados na educação. In: VALENTE, J. A. (Ed.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/Nied, 1999.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Thomson Learning, 2003.

ÇENGEL, Y.; PALM III, W. **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: Bookman, 2014.

APÊNDICE A – Entrevista Introdutória

Questionário Introdutório

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),

Pretendemos com estas indagações compreender como você lida com os seus estudos acerca da Matemática, bem como as fontes auxiliares de estudo que você utiliza.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

*Obrigatório

1. **Qual o seu nível de compreensão dos assuntos matemáticos na escola/universidade?** *
Marcar apenas uma oval.

- Tenho dificuldades em compreender as explicações e não vou bem nas provas/trabalhos.
- Compreendo as explicações, mas não vou bem nas provas/trabalhos.
- Compreendo as explicações e com ajuda extra (colegas ou professor particular) vou bem nas provas/trabalhos.
- Compreendo as explicações e consigo ir bem nas provas/trabalhos.

2. **Quanto tempo você dedica para estudar matemática em casa?** *
Marcar apenas uma oval.

- Menos de 1 hora por semana.
- De 1 até 3 horas por semana.
- De 3 até 4 horas por semana.
- Mais de 4 horas semanais.

3. **Se você estuda matemática em casa, quais suas fontes de ajuda e de pesquisa?** *
Marcar apenas uma oval.

- Pais e/ou parentes.
- Professor particular.
- Livros didáticos impressos e em formato digital na internet.
- Videoaulas em sites como o YOUTUBE.
- Outro: ____________________

4. **Em relação a programas de computador que ajudam no ensino da matemática:** *
Marcar apenas uma oval.

- Nunca nem ouviu falar.
- Ja ouviu sobre, mas não conhece nenhum.
- Conhece algum/alguns, mas nunca utilizou.
- Já utilizou algum.

5. **Você possui telefone celular?**
Marcar apenas uma oval.

- Não.
- Tenho telefone celular do tipo não-smartphone.
- Tenho smartphone

6. **Se possui smartphone, quais os principais usos que você faz?** *
Marcar apenas uma oval.

- Telefonar e enviar/receber mensagens de texto.
- Usar as redes sociais.
- Jogar games.
- Para estudar, utilizando aplicativos especificos.

7. **Qual sua opinião em relação ao uso de programas de computador ou aplicativos para smartphone como auxiliares no ensino-aprendizagem da Matemática?** *
Marcar apenas uma oval.

- Não ajudam.
- Ajudam pouco.
- Ajudam bastante

APÊNDICE B – Entrevista Exploratória

Entrevista exploratória (Aula 01)

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Pré-Teste

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),
Pretendemos com essa pesquisa compreender o Ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas ao qual vocês obtiveram (ou não) durante o ensino médio. Sendo assim, este momento é muito importante no desenvolvimento desta investigação, pois possibilitará uma reflexão mais aprofundada de como está sendo absorvido este conteúdo, dando-nos indicações significativas a respeito do mesmo.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

*Obrigatório

1. **Você estudou as Funções Exponenciais no Ensino Médio? ***
   Marcar apenas uma oval.
   - Sim
   - Não

2. **Diga com suas palavras o que você aprendeu sobre tais funções? ***

3. **Qual método de ensino foi usado pelo seu professor?**

4. **Você teve dificuldade na aprendizagem destas funções? Em caso afirmativo diga quais dificuldades.**

5. **Você estudou as Funções Logarítmicas no Ensino Médio?** *
Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

6. **Diga com suas palavras o que você aprendeu sobre tais funções?** *

7. **Qual método de ensino foi usado pelo seu professor?**

8. **Você teve dificuldade na aprendizagem destas funções? Em caso afirmativo diga quais dificuldades.**

APÊNDICE C – Questionário 01

Questionário 01(Referente à aula 01)

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),

Após a aula teórica acerca das características das funções exponenciais e logarítmicas, bem como relacionar as funções exponenciais de base e, você é convidado a responder a este questionário sobre os principais pontos da aula.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

1. **Descreva e justifique quais as principais características da função exponencial você percebeu e gostaria de destacar.**

2. **Descreva e justifique quais as principais características das funções inversas você percebeu e gostaria de destacar.**

3. **Descreva e justifique quais as principais características da função logarítmica você percebeu e gostaria de destacar.**

4. **Descreva e justifique quais as principais características da função exponencial de base "e" você percebeu e gostaria de destacar.**

APÊNDICE D – Questionário 02

Questionário 02 (Referente à aula 02)

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),

Após a aula teórica acerca das características da Modelagem Matemática, bem como de noções de equações diferenciais e de diferenças, você é convidado a responder a este questionário sobre os principais pontos da aula.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

1. **Descreva o que você entendeu sobre Modelagem Matemática.**

2. **Descreva quais as principais características que você percebeu sobre a Modelagem Matemática.**

3. **Você já tinha ouvido ou visto algo sobre equações diferenciais? Em caso afirmativo descreva o que você já ouviu ou viu sobre.**

4. **Você já tinha ouvido ou visto algo sobre equações de diferenças? Em caso afirmativo descreva o que você já ouviu ou viu sobre.**

5. **Descreva as diferenças principais que você percebeu sobre funções discretas e funções contínuas.**

6. **Descreva as características que você percebeu da modelagem com equações diferenciais e de diferenças que poderão ser utilizadas no seu trabalho como engenheiro.**

Powered by
Google Forms

APÊNDICE E – Questionário 03

Questionário 03 (Referente à aula 03)

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),

Após a aula prática de construções de modelos matemáticos no Geogebra que resultam em funções exponenciais, você é convidado a responder a este questionário sobre os principais pontos da aula.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

1. **Descreva o que você percebeu sobre a importância do conhecimento sobre as características de uma fenômeno para modelá-lo matematicamente.**

2. **Descreva como a metodologia impactou (positivamente ou negativamente) na sua compreensão da ligação do fenômeno estudado e das funções exponenciais.**

3. **Descreva como a utilização do campo de direções das taxas de variação no Geogebra ajudou você a identificar o comportamento final dos fenômenos como funções exponenciais.**

4. **Descreva as características que você percebeu do fenômeno estudado que o ligam a funções exponenciais e qual a importância da Modelagem Matemática com o auxílio do Geogebra para você perceber estas características.**

APÊNDICE F – Questionário 04

Questionário 04 (Referente à aula 04)

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),

Após você ter construido modelos matemáticos no Geogebra que resultam em funções exponenciais, você é convidado a responder a este questionário sobre os principais pontos da aula.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

1. **Quais suas impressões sobre o nível de dificuldade de trabalho com o Geogebra?**

2. **Você teve alguma dificuldade em aplicar os conceitos das aulas anteriores para construir os modelos? Em caso afirmativo relacione tais dificuldades.**

3. **A utilização das taxas de variação junto dos campos de direções ajudou você a relacionar os fenômenos estudados com as funções exponenciais? Em caso afirmativo descreva como.**

4. **Descreva suas impressões sobre a utilização das ferramentas de regressão do Geogebra para modelar o crescimento populacional através das teorias de Malthus (crescimento exponencial) e de Verhulst (crescimento logístico) com os dados reais do IBGE.**

5. **Descreva como as atividades desta aula ajudaram você a relacionar as funções exponenciais e logarítmicas aos fenômenos estudados.**

APÊNDICE G – Questionário 05

Questionário 05 (Referente à aula 05)

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI (UFVJM)
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Universo da Pesquisa: Alunos do Curso de Funções de Várias Variáveis do curso de BC&T da UFVJM Campus do Mucuri

Prezado(a) aluno(a),

Após as intervenções utilizando os Modelos de Crescimento e Decaimento no Geogebra você novamente relacionará as características das funções exponenciais e logarítmicas, bem como relacionar as funções exponenciais de base através deste questionário.

Atenciosamente,

Lincoln Ferreira Nunes, mestrando do PROFMAT da UFVJM
Jaqueline Maria da Silva, professora doutora do ICET - UFVJM

1. **Relacione as principais características das funções exponenciais.**

2. **Relacione as principais características das funções inversas das funções exponenciais.**

3. **Relacione as principais características da função logarítmica.**

4. **Descreva e justifique quais as principais características da função exponencial de base "e".**

ANEXO A – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP 1902702

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas

Pesquisador: LINCOLN FERREIRA NUNES

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 61212916.0.0000.5108

Instituição Proponente: UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Patrocinador Principal: UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 1.902.702

Apresentação do Projeto:

Esta pesquisa visa analisar as possibilidades de utilização de modelos de crescimento e decaimento no processo de ensino-aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas, utilizando a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Os discentes da turma de Funções de várias variáveis da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, campus do Mucuri, participarão do experimento que investigará as possibilidades supracitadas.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Propor sequências didáticas que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem de Funções exponenciais e logarítmicas para a turma de Funções de várias variáveis da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, campus do Mucuri.

Objetivo Secundário:

Detectar as principais dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de Funções exponencias e logarítmicas e propor sequências didáticas que sanem estas dificuldades.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Os riscos que podem estar relacionados com a participação na pesquisa são: a identificação e

Endereço: Rodovia MGT 367 - Km 583, nº 5000
Bairro: Alto da Jacuba **CEP:** 39.100-000
UF: MG **Município:** DIAMANTINA
Telefone: (38)3532-1240 **Fax:** (38)3532-1200 **E-mail:** cep@ufvjm.edu.br

possível constrangimento ao responder os questionários a serem aplicados. Tais riscos serão minimizados pelos seguintes procedimentos: participação dos discentes nas atividades de pesquisa preenchendo formulários on-line NA PLATAFORMA GOOGLE FORMS, sem possibilidade de vazamento de informações, além da
dispensa de identificação nominal dos mesmos.
Benefícios:
Os discentes poderão ter como beneficio aperfeiçoamento dos seus conhecimentos em relação ao conteúdo a ser trabalhado e às rotinas do software matemático a ser utilizado.A utilização da modelagem matemática poderá propiciar ao estudante obtenção de autonomia científica para trabalhar com modelos na sua profissão de engenheiro.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Este projeto de pesquisa se fundamenta na Engenharia Didática como metodologia de pesquisa em suas quatro etapas: 1.Análises prévias: Permitirão ao pesquisador identificar as variáveis didáticas que serão utilizadas nas próximas fases. Inicialmente serão aplicados questionários diagnósticos na turma de Funções de várias variáveis da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, com o intuito de verificar as dificuldades encontradas pelos discentes no estudo de funções exponenciais e logarítmicas. 2.Construção e análise a priori:Nesta etapa será feito todo o planejamento das atividades, como escolha das variáveis locais e quais estratégias tomar, baseado nos resultados obtidos pela investigação feita nas análises prévias. 3.Experimentação: Primeiro, será feito uma pesquisa bibliográfica com intuito de definir quais as melhores formas de avaliar o estudante, no que se diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem de Funções exponenciais e logarítmicas. Logo após, serão aplicadas cinco (5) sequências didáticas envolvendo modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino das funções supracitadas. As atividades serão realizadas no Laboratório de Simulação Computacional do ICET, no Campus do Mucuri da UFVJM onde: na aula 01 o estudante inicialmente responderá emM 10 minutos um (questionário introdutório, com o intuito de compreender como ele lida com o COM ESTUDOS ACERCA DA MATEMÁTICA, BEM COMO AS FONTES AUXILIARES DE ESTUDO QUE UTILIZA. EM SEQUÊNCIA UTILIZARÁ 20 MINUTOS PARA RESPONDER À (ENTREVISTA EXPLORATÓRIA) EM FORMA DE QUESTIONÁRIO SOBRE O QUE APRENDEU NO ENSINO MÉDIO SOBRE AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS. DEPOIS ASSISTIRÁ, DURANTE 60 MINUTOS, UMA AULA TEÓRICA SOBRE AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS E APÓS ESTA AULA RESPONDERÁ, EM 30 MINUTOS, AO (QUESTIONÁRIO 01) SOBRE OS PRINCIPAIS PONTOS DESTA AULA. NA AULA 02 COMO APORTE
PARA O PROSSEGUIMENTO DAS INTERVENÇÕES O DISCENTE ASSISTIRÁ UMA AULA TEÓRICA DE

MINUTOS SOBRE NOÇÕES BÁSICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS, DEPOIS TERÁ 30 MINUTOS PARA RESPONDER AO (QUESTIONÁRIO 02) SOBRE OS PRINCIPAIS PONTOS DA AULA. NA AULA 03 SERÃO CONSTRUÍDOS PELO PESQUISADOR NO GEOGEBRA, COM O AUXÍLIO DO DATA SHOW, UTILIZANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA E TEORIAS SOBRE OS FENÔMENOS (LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON; ELIMINAÇÃO DE ÁLCOOL PELO SANGUE; MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DE MALTHUS), TRÊS MODELOS SIMPLISTAS QUE RESULTAM EM FUNÇÕES EXPONENCIAIS, O ESTUDANTE ACOMPANHARÁ E FARÁ TAMBÉM ESSAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA, ESTE PROCESSO SERÁ FEITO EM 90 MINUTOS, APÓS ISSO O ALUNO TERÁ 30 MINUTOS PARA RESPONDER AO (QUESTIONÁRIO 03) SOBRE OS PRINCIPAIS PONTOS DA AULA. NA AULA 04 O DISCENTE CONSTRUIRÁ TRÊS MODELOS PROPOSTOS UTILIZANDO OS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS SOBRE A MODELAGEM NA AULA 02 E SOBRE O GEOGEBRA NA AULA 03, COM O TEMPO ESTIMADO DE 120 MINUTOS. NA AULA 05 O ESTUDANTE UTILIZARÁ DADOS OBTIDOS NO SITE DO IBGE E AS FUNÇÕES DE REGRESSÃO DO GEOGEBRA PARA MODELAR O CRESCIMENTO POPULACIONAL DE ALGUMAS CIDADES ATRAVÉS DE CURVAS LOGÍSTICAS E EXPONENCIAIS, BEM COMO VISUALIZAR A IMPORTÂNCIA DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇA E LOGARITMOS EM TAIS SITUAÇÕES, COM O TEMPO ESTIMADO DE 60 MINUTOS, AO FINAL DA AULA O ESTUDANTE RESPONDERÁ O (QUESTIONÁRIO 04) ESPECÍFICO SOBRE OS PRINCIPAIS PONTOS DA (AULA 04) E DA (AULA 05) , TEMPO ESTIMADO DE 30 MINUTOS, E DEPOIS RESPONDERÁ AO (QUESTIONÁRIO 05) SOBRE OS PRINCIPAIS PONTOS DA INTERVENÇÃO EM GERAL AVALIANDO DE FORMA QUALITATIVA A INTERVENÇÃO APLICADA PARA USAR COMO PAR METRO NA PESQUISA, TEMPO ESTIMADO 30 MINUTOS.4.Validação e análise a posteriori: Nesta etapa que encerra a pesquisa, será investigado se os objetivos foram alcançados, e se as hipóteses foram ou não válidas. NESTA ETAPA OS RESULTADOS DO (QUESTIONÁRIO 05) SERÃO COMPARADOS COM O RESULTADO DA ANÁLISE A PRIORI FEITA MEDIANTE O (QUESTIONÁRIO 01).

Metodologia de Análise de Dados:

A partir dos questionários elaborados e do desenvolvimento da sequência didática construída, será desenvolvida uma análise de dados fundamentada nos princípios da Engenharia Didática. OS RESULTADOS DO (QUESTIONÁRIO 05) SERÃO COMPARADOS COM OS
RESULTADOS DA ANÁLISE A PRIORI FEITA MEDIANTE O (QUESTIONÁRIO 01) A COMPARAÇÃO QUALITATIVA SERÁ SOBRE A PERCEPÇÃO DOS ESTUDANTES SOBRE A NECESSIDADE DE UTILIZAR FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS PARA MODELAR OS PROCESSOS DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO.A ANÁLISE SERÁ FEITA ATRAVÉS DA IDENTIFICAÇÃO DAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Continuação do Parecer: 1.902.702

(QUESTIONÁRIO 01) E AS RESPOSTAS DAS PERGUNTAS SIMILARES (NO QUESTIONÁRIO 05). A EVOLUÇÃO DO APRENDIZADO SERÁ CONSIDERADA QUALITATIVAMENTE ATRAVÉS DAS RESPOSTAS. PARA OS DISCENTES NÃO SEREM IDENTIFICADOS NOMINALMENTE SERÃO RELACIONADOS POR "ESTUDANTE 01", "ESTUDANTE 02", ..., "ESTUDANTE 20".

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Foram apresentados os seguintes termos: Projeto de Pesquisa, Folha de Rosto, Cronograma e TCLE.

Recomendações:

- Segundo a Carta Circular nº. 003/2011/CONEP/CNS, de 21/03/11, há obrigatoriedade de rubrica em todas as páginas do TCLE pelo sujeito de pesquisa ou seu responsável e pelo pesquisador, que deverá também apor sua assinatura na última página do referido termo.

- Relatório final deve ser apresentado ao CEP ao término do estudo em 17/03/2017. Considera-se como antiética a pesquisa descontinuada sem justificativa aceita pelo CEP que a aprovou.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

O projeto atende aos preceitos éticos para pesquisas envolvendo seres humanos preconizados na Resolução 466/12 CNS.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_784534.pdf	09/12/2016 20:38:19		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_DE_PESQUISA.pdf	09/12/2016 20:38:03	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Outros	Questionario_04.pdf	09/12/2016 20:07:45	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Outros	Questionario_05.pdf	09/12/2016 19:46:33	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Outros	Questionario_03.pdf	09/12/2016 19:45:40	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Outros	Questionario_02.pdf	09/12/2016 19:45:15	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Outros	Questionario_01.pdf	09/12/2016	LINCOLN FERREIRA	Aceito

Endereço: Rodovia MGT 367 - Km 583, nº 5000
Bairro: Alto da Jacuba **CEP:** 39.100-000
UF: MG **Município:** DIAMANTINA
Telefone: (38)3532-1240 **Fax:** (38)3532-1200 **E-mail:** cep@ufvjm.edu.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Continuação do Parecer: 1.902.702

Outros	Questionario_01.pdf	19:44:49	NUNES	Aceito
Outros	Entrevista_exploratoria.pdf	09/12/2016 19:43:23	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Outros	Entrevista_Introdutoria.pdf	09/12/2016 19:40:39	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_modelo.pdf	09/12/2016 19:04:21	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_assinado.pdf	09/12/2016 19:04:04	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto.pdf	09/12/2016 16:16:05	LINCOLN FERREIRA NUNES	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

DIAMANTINA, 31 de Janeiro de 2017

Assinado por:
Disney Oliver Sivieri Junior
(Coordenador)

Endereço: Rodovia MGT 367 - Km 583, nº 5000
Bairro: Alto da Jacuba **CEP:** 39.100-000
UF: MG **Município:** DIAMANTINA
Telefone: (38)3532-1240 **Fax:** (38)3532-1200 **E-mail:** cep@ufvjm.edu.br